eBOOKS
ON MATHEMATICS & PHYSICS
APPLIED TO ENGINEERING

5

Problemas resueltos de Álgebra Lineal

Almudena del Pilar Márquez Lozano
Tamara María Garrido Letrán
Práxedes Neira Gómez
Soledad Moreno Pulido

Editorial UCA
Universidad de Cádiz

eBOOKS
ON MATHEMATICS & PHYSICS
APPLIED TO ENGINEERING

Problemas resueltos de Álgebra Lineal

eBOOKS
ON MATHEMATICS & PHYSICS
APPLIED TO ENGINEERING

Problemas resueltos de Álgebra Lineal

Almudena del Pilar Márquez Lozano
Tamara María Garrido Letrán
Práxedes Neira Gómez
Soledad Moreno Pulido

Editorial UCA
Universidad de Cádiz

«Esta obra ha superado un triple proceso de evaluación externa por pares ciegos»

Política editorial de la colección: Pinche aquí

Primera edición: Abril 2025

Edita: Editorial UCA
Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
C/ Doctor Marañón, 3 - 11002 Cádiz (España)
www.uca.es/publicaciones
publicaciones@uca.es

eISBN: 979-13-88112-05-8
Depósito legal: CA 160 2025
Diseño por: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

une
Unión de Editoriales Universitarias Españolas

Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional.

A nuestras familias.

Índice general

Prefacio

Bienvenido a un viaje a través del mundo del álgebra lineal, una herramienta esencial para cualquier ingeniero que busca comprender y modelar fenómenos complejos. Este libro está diseñado para acompañarte en tu exploración de conceptos clave que van desde matrices y determinantes hasta diagonalización de matrices. El objetivo de este manual es reforzar tus conocimientos en álgebra lineal mediante la resolución de problemas.

Empezaremos con las matrices y determinantes, fundamentos sobre los cuales se construyen luego los espacios vectoriales. Descubrirás cómo estas estructuras matemáticas son la base de los problemas que aparecen en el mundo de la ingeniería.

Los sistemas de ecuaciones lineales, omnipresentes en problemas del mundo real, se desglosan de manera clara y concisa. A través de ejemplos prácticos, aprenderás a resolver estos sistemas y a aplicar estrategias efectivas para abordar los problemas.

Nuestro viaje continúa adentrándonos en los espacios vectoriales, un terreno donde la abstracción encuentra su aplicación más poderosa. Verás cómo estas ideas, aparentemente abstractas al principio, encuentran eco en la resolución de problemas concretos.

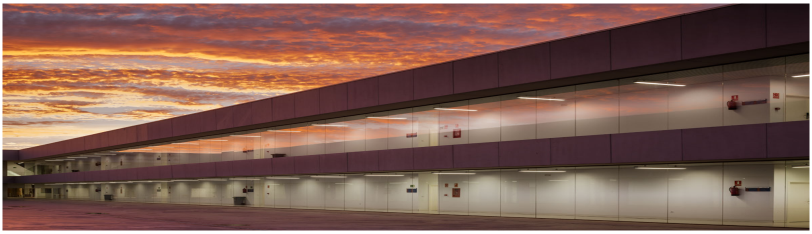
El espacio vectorial euclídeo emerge como una herramienta esencial, conectando la teoría con la geometría analítica. Exploraremos la riqueza de este espacio y cómo su comprensión profunda puede iluminar problemas geométricos y físicos.

Las aplicaciones lineales se convierten en nuestra guía a través de una variedad de escenarios prácticos donde la linealidad se convierte en una aliada poderosa en la resolución de problemas.

Finalmente, cerramos nuestro viaje con la diagonalización de matrices. Este proceso, que puede parecer misterioso al principio, revela su utilidad en la simplificación de cálculos y la comprensión profunda de sistemas dinámicos.

Como en cualquier manual de matemáticas, es fundamental entender lo que se está haciendo y su por qué. Animamos a los lectores a tener un papel al lado donde practicar todos estos problemas.

Por último, queremos agradecer a los compañeros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz por la ayuda prestada. También al Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz por su apoyo para que este manual haya visto la luz.



Capítulo 1

Matrices y determinantes

Índice

1.1 Matrices

Problema 1.1.1. *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

(a) $2A - 3B$,

(b) $(CD)^t - A^2$,

(c) $(5A - I_3)(I_3 - B)$,

(d) $AB - BA$,

(e) ABA.

Solución.

(a) $2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ 9 & 6 & -3 \\ 0 & 15 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 4 \\ -11 & -2 & 11 \\ 4 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$

(b) Sabemos que $(CD)^t - A^2 = D^tC^t - AA$ y que $D^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,
$C^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Luego,
$(CD)^t - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & -3 \\ 13 & 20 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 \\ 5 & 15 & 10 \\ 1 & 11 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -8 \\ 2 & -7 & -13 \\ 12 & 9 & -20 \end{pmatrix}.$

(c) En primer lugar, calculamos cada paréntesis,

$$5A - I_3 = 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ -5 & 10 & 20 \\ 10 & 15 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ -5 & 9 & 20 \\ 10 & 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$I_3 - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$(5A - I_3)(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 \\ -5 & 9 & 20 \\ 10 & 15 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -27 & -51 & 35 \\ -12 & -114 & 69 \\ -75 & -25 & 27 \end{pmatrix}.$$

(d) $AB - BA =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 & -5 \\ 2 & 25 & -10 \\ 17 & 9 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 13 \\ -9 & 4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -9 \\ 3 & 21 & -23 \\ 26 & 5 & -23 \end{pmatrix}.$$

(e) $ABA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 & -5 \\ 2 & 25 & -10 \\ 17 & 9 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 14 & 53 \\ -43 & 22 & 94 \\ -2 & 20 & 65 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 1.1.2. *Hallar las matrices A y B que verifican* $3A-2B=\begin{pmatrix}1 & -8 & -9\\ -6 & -8 & 7\end{pmatrix}$ *y* $5A+7B=\begin{pmatrix}12 & 28 & 47\\ 52 & 28 & 22\end{pmatrix}$.

Solución.

Como multiplicar una matriz por un escalar no cambia la dimensión de la matriz, para que A y B se puedan sumar, ambas deben tener igual dimensión, al igual que la matriz resultante. Por lo tanto, $A, B \in M_{2\times 3}$, donde $A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ b_4 & b_5 & b_6\end{pmatrix}$.

Entonces, utilizando los datos del enunciado,

$$3A-2B=3\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ b_4 & b_5 & b_6\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}3a_1 & 3a_2 & 3a_3\\ 3a_4 & 3a_5 & 3a_6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2b_1 & 2b_2 & 2b_3\\ 2b_4 & 2b_5 & 2b_6\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}3a_1-2b_1 & 3a_2-2b_2 & 3a_3-2b_3\\ 3a_4-2b_4 & 3a_5-2b_5 & 3a_6-2b_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8 & -9\\ -6 & -8 & 7\end{pmatrix}.$$
$$5A+7B=5\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ b_4 & b_5 & b_6\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}5a_1 & 5a_2 & 5a_3\\ 5a_4 & 5a_5 & 5a_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7b_1 & 7b_2 & 7b_3\\ 7b_4 & 7b_5 & 7b_6\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}5a_1+7b_1 & 5a_2+7b_2 & 5a_3+7b_3\\ 5a_4+7b_4 & 5a_5+7b_5 & 5a_6+7b_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 28 & 47\\ 52 & 28 & 22\end{pmatrix}.$$

Como dos matrices son iguales si sus elementos son iguales, entonces obtenemos 6 ecuaciones por cada expresión, formando sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{rcl}3a_1-2b_1 & = & 1\\ 5a_1+7b_1 & = & 12\end{array}\right\}\Rightarrow a_1=1, b_1=1;$$
$$\left.\begin{array}{rcl}3a_2-2b_2 & = & -8\\ 5a_2+7b_2 & = & 28\end{array}\right\}\Rightarrow a_2=0, b_2=4;$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 3a_3 - 2b_3 & = & -9 \\ 5a_3 + 7b_3 & = & 47 \end{array}\right\} \Rightarrow a_3 = 1, b_3 = 6;$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 3a_4 - 2b_4 & = & -6 \\ 5a_4 + 7b_4 & = & 52 \end{array}\right\} \Rightarrow a_4 = 2, b_4 = 6;$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 3a_5 - 2b_5 & = & -8 \\ 5a_5 + 7b_5 & = & 28 \end{array}\right\} \Rightarrow a_5 = 0, b_5 = 4;$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 3a_6 - 2b_6 & = & 7 \\ 5a_6 + 7b_6 & = & 22 \end{array}\right\} \Rightarrow a_6 = 3, b_6 = 1.$$

Por lo tanto,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 1.1.3. *Sean las matrices $A \in M_{2\times 1}$, $B \in M_{1\times 3}$ y $C \in M_{3\times 1}$. Indicar si son posibles los siguientes productos y, en caso afirmativo, dar el orden de la matriz resultante:*

(a) $A(BC)$,

(b) ACB,

(c) BAC,

(d) $B^t C^t A$,

(e) $(BC)^t A^t$.

Solución.

Sabemos que el producto AB de dos matrices A y B se puede realizar solo en el caso de que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B. En ese caso, la matriz resultante tiene dimensión "número de filas de A" × "número de columnas

de B”. Además, recordamos que el producto de matrices no es conmutativo.
(a) Se puede realizar el producto y el resultado es una matriz de orden 2×1.
(b) No se puede realizar, ya que el producto AC no es posible.
(c) No se puede realizar, ya que el producto BA no es posible.
(d) No se puede realizar, porque $B^t C^t A = (CB)^t A$ y, aunque $(CB)^t$ se puede realizar y devuelve una matriz de orden 3×3, su producto por A no es posible.
(e) Se puede realizar el producto y el resultado es una matriz de orden 1×2. Esto es así porque BC devuelve una matriz de orden 1×1, su traspuesta devuelve también una de orden 1×1 y al multiplicarla por A^t, que es de orden 1×2, el resultado es una matriz de orden 1×2.

■

Problema 1.1.4. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Hallar los productos* AB *y* BA.

Solución.

$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)$.

Como $A \in M_{1\times 3}$ y $B \in M_{3\times 1}$, su producto se puede realizar y la matriz resultante es una matriz 1×1, es decir, formada por un único elemento.

$BA = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

En este ejercicio vemos que, aunque se pueden realizar los productos AB y BA, no se cumple la propiedad conmutativa en el producto de matrices, ya que $AB \neq BA$.

■

Problema 1.1.5. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcular:*

(a) $(A+B)(A-B)$,

(b) $A^2 - B^2$,

(c) $(A+B)^2$,

(d) $A^2 + 2AB + B^2$.

Solución.
(a) Calculamos cada paréntesis,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -10 \\ -3 & 13 & -28 \\ -1 & 5 & -20 \end{pmatrix}.$$

(b)

$A^2 - B^2 = AA - BB =$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\\1 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\\1 & 1 & 4\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\6 & 9 & 1\\3 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\4 & 2 & 14\\6 & 3 & 21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 2 & -5\\2 & 7 & -13\\-3 & -1 & -18\end{pmatrix}.$$

(c)
$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\4 & 1 & 5\\1 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\4 & 1 & 5\\1 & 2 & 5\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}9 & 5 & 12\\17 & 15 & 34\\15 & 13 & 36\end{pmatrix}.$$

(d) Calculamos cada término,
$$2AB = 2\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\1 & 0 & 3\\1 & 1 & 4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\6 & -1 & 17\\2 & 1 & 7\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}4 & -4 & 8\\12 & -2 & 34\\4 & 2 & 14\end{pmatrix}.$$

Recordamos que A^2 y B^2 ya los tenemos de apartados anteriores. Luego,
$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\6 & 9 & 1\\3 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & -4 & 8\\12 & -2 & 34\\4 & 2 & 14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\4 & 2 & 14\\6 & 3 & 21\end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix}13 & 0 & 17\\22 & 9 & 49\\13 & 7 & 38\end{pmatrix}.$$

Con los resultados obtenidos en este ejercicio, podemos comprobar que las identidades notables no se cumplen en matrices.

Esto se debe a que el producto de matrices no es conmutativo. ■

Problema 1.1.6. *Escribir en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by+cz &=& j \\ dx+ey+fz &=& k \\ gx+hy+iz &=& l \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{rcl} 2x-y-z &=& 3 \\ 4x-y+2z &=& 8 \end{array}\right\}.$$

Solución.

(a) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}.$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}.$

■

Problema 1.1.7. *Calcular el producto*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

1.2 Rango

Problema 1.2.1. *Hallar el rango de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 & -4 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ -6 & -8 & -18 & 8 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Para estudiar el rango de las matrices, vamos a obtener matrices equivalentes y escalonadas por filas. Una vez obtenidas, el rango de las matrices es el número de filas no nulas de la matriz escalonada por filas que hemos obtenido, o lo que es lo mismo, el número de pivotes no nulos de dicha matriz escalonada por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 6 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{21}^{-2}, F_{31}^{-9}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -53 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{32}^{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -71 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A) = 3.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_{21}^{-1}, F_{31}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{32}^{-1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow rango(B) = 3.$$

$$C = \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix} \underset{F_{21}^{-3},F_{31}^{-2}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 11 & -6 & 4\\ 0 & 7 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{24}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 7 & -4 & 3\\ 0 & 11 & -6 & 4\end{pmatrix} \underset{F_{32}^{-7},F_{42}^{-11}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -25 & 10\\ 0 & 0 & -39 & 15\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{43}^{-39/25}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -25 & 10\\ 0 & 0 & 0 & -3/5\end{pmatrix} \Rightarrow rango(C) = 4.$$

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 0\end{pmatrix} \underset{F_{24}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{43}^{2/3}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow rango(D) = 4.$$

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \underset{F_{31}^{-2},F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix} \underset{F_{24}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{32}-1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow rango(E) = 4.$$

$$F=\begin{pmatrix}3&4&9&-4\\1&0&6&-5\\2&4&3&1\\-6&-8&-18&8\end{pmatrix}\underset{F_{21}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&6&-5\\3&4&9&-4\\2&4&3&1\\-6&-8&-18&8\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{31}^{-2},F_{41}^{6}}{\overset{F_{21}^{-3}}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&6&-5\\0&4&-9&11\\0&4&-9&11\\0&-8&18&22\end{pmatrix}\underset{F_{32}^{-1},F_{42}^{2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&6&-5\\0&4&-9&11\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$rango(F)=2.$

■

Problema 1.2.2. *Hallar, según los valores de los parámetros, el rango de las siguientes matrices:*

$$A=\begin{pmatrix}2&x&x\\-1&1&2\\1&2&6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&x&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&3&7&7\\-1&5&9&x\\0&7&14&4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&3&x&4\\1&5&3&6\\0&7&5&7\end{pmatrix}.$$

Solución.

En primer lugar, calculamos una matriz equivalente a la matriz dada que sea escalonada por filas. Una vez obtenida la matriz escalonada por filas, usamos la definición de rango de una matriz. El rango de una matriz es el número de filas no nulas de la matriz escalonada por filas o el número de pivotes no nulos de dicha matriz escalonada por filas. Por lo tanto, para resolver el problema tenemos que estudiar qué ocurre cuando dichos pivotes valen cero. Esta estrategia es la que vamos a usar también en el resto de ejercicios de esta sección.

$$A \overset{F_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & x & x \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{1}}{\overset{F_{21}^{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2+x & 4+x \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{C_{23}^{\frac{-3}{8}}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & \frac{5x+4}{8} & 4+x \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\frac{5x+4}{8} = 0 \Rightarrow 5x+4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}$.

Distinguimos casos:

- Si $x = \frac{-4}{5} \Rightarrow rango(A) = 2$.
- Si $x \neq \frac{-4}{5} \Rightarrow rango(A) = 3$.

$$B \underset{F_{31}^{-7}}{\overset{F_{21}^{-4}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -21+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{-2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -9+x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$-9+x = 0 \Rightarrow x = 9$.

Distinguimos casos:

- Si $x = 9 \Rightarrow rango(B) = 3$.
- Si $x \neq 9 \Rightarrow rango(B) = 4$.

$$C \overset{F_{21}^{1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 7 \\ 0 & 8 & 16 & 7+x \\ 0 & 7 & 14 & 4 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{\frac{-7}{8}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 7 \\ 0 & 8 & 16 & 7+x \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-17-7x}{8} \end{pmatrix}.$$

$\frac{-17-7x}{8} = 0 \Rightarrow -17-7x = 0 \Rightarrow x = \frac{-17}{7}$.

Distinguimos casos:

- Si $x = \frac{-17}{7} \Rightarrow rango(C) = 2$.

- Si $x \neq \frac{-17}{7} \Rightarrow rango(C) = 3$.

$$D \overset{F_{21}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & x & 4 \\ 0 & 2 & 3-x & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{\frac{-7}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & x & 4 \\ 0 & 2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-11+7x}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$\frac{-11+7x}{2} = 0 \Rightarrow -11 + 7x = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{7}$.

Distinguimos casos:

- Si $x = \frac{11}{7} \Rightarrow rango(D) = 2$.
- Si $x \neq \frac{11}{7} \Rightarrow rango(D) = 3$.

■

Problema 1.2.3. *Estudiar el rango, según los valores de m y n, de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & n & m \\ m & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & n & m \\ m & -1 & -4 \end{pmatrix} \underset{F_{41}^{-m}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & n & m \\ 0 & -3m-1 & 3m-4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{2}^{\frac{-1}{4}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & n & m \\ 0 & -3m-1 & 3m-4 \end{pmatrix} \underset{F_{42}^{3m+1}}{\overset{F_{32}^{-n}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2n+m \\ 0 & 0 & -3m-6 \end{pmatrix}.$$

Distinguimos casos:

- Si $2n+m=0$ entonces $m=-2n$ y la matriz escalonada queda de la siguiente forma:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6n-6 \end{pmatrix}.$$
Como la tercera fila se anula y el rango máximo de la matriz es 3, el rango depende de la última fila.

  - Si $6n-6=0$ entonces $rango(A)=2$. En este caso, como $6n-6=0$ entonces $n=1$ y como $2n+m=0$ entonces $m=-2$.
  - Si $6n-6\neq 0$ entonces $rango(A)=3$. En este caso, como $6n-6\neq 0$ entonces $n\neq 1$.

- Si $2n+m\neq 0$ entonces $m\neq -2n$ y $rango(A)=3$ y no depende de la última fila porque el rango de A no puede ser mayor que 3 al ser una matriz 4×3.

En resumen:

- Si $m=-2$ y $n=1 \Rightarrow rango(A)=2$.
- Si $m=-2n$ y $n\neq 1$ o $m\neq -2n \Rightarrow rango(A)=3$.

■

Problema 1.2.4. *Hallar el valor de x para que sea 2 el rango de la matriz*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & x-1 & -2 & 0 & 4 & 2x \\ 1 & 2 & x^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & x+1 & 2x-2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Este ejercicio no lo resolvemos como los demás ya que, si lo hacemos de esa forma, nos quedan denominadores con parámetros y se complica teniendo también que tener en cuenta los valores del parámetro x que hacen que esos denominadores se anulen. En este ejercicio, si nos fijamos en la matriz, podemos ver que podemos hacer bastantes ceros sin necesidad de emplear fracciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & x-1 & -2 & 0 & 4 & 2x \\ 1 & 2 & x^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & x+1 & 2x-2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F_{43}^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & x-1 & -2 & 0 & 4 & 2x \\ 1 & 2 & x^2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8-x^2 & 0 & x-1 & 2x-3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F_{41}^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & x-1 & -2 & 0 & 4 & 2x \\ 1 & 2 & x^2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_{51}^{-1}}{\overset{C_{32}^{1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & x-1 & x-3 & 0 & 0 & 2x \\ 1 & 2 & x^2+2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_{54}^{1},C_{64}^{1}}{\overset{C_{14}^{1},C_{24}^{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & x-1 & x-3 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & x^2+2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F_{21}^{-2}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & x-3 & x-3 & 0 & 0 & 2x-6\\ 0 & 0 & x^2+2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6\end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{F_{23}}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & x^2+2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & x-3 & x-3 & 0 & 0 & 2x-6\\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6\end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{C_{24}}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & x^2+2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x-3 & x-3 & 0 & 2x-6\\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6\end{pmatrix}.$$

Para que el rango de A sea 2, su forma canónica debe ser

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0\\ - & - & - & - & - & - & -\\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Por lo que, tras escalonar, dos de las filas deben ser nulas. Observamos que no es posible conseguir que la primera fila y la segunda fila se anulen, por lo que la única posibilidad para la que el rango de A sea 2, es que sean nulas tanto la fila 3 como la fila 4, es decir, que

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & x-3 & x-3 & 0 & 2x-6\\ 0 & 0 & 9-x^2 & 0 & x-3 & 2x-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

$x-3=0,$

$2x-6=0,$

$9-x^2=0.$

Luego, la única posibilidad para que este sistema sea compatible es que $x=3$.

Por lo tanto, $rango(A) = 2 \Leftrightarrow x = 3$.
Otra forma es añadir una transformación más a la matriz, que es intercambiar la columna 3 con la 4 y así queda la matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & x^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & x-3 & 0 & 2x-6 \\ 0 & 0 & 0 & 9-x^2 & x-3 & 2x-6 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta matriz, volvemos a fijarnos en los elementos de la diagonal, teniendo que verificarse que $x - 3 = 0$ y $9 - x^2 = 0$ para que el rango de la matriz sea 2. Luego, para que sea compatible ese sistema, de nuevo $x = 3$.

■

Problema 1.2.5. *Hallar x e y para que el rango de la matriz*
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & x & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & y \end{pmatrix}$ *sea el más pequeño posible.*

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & x & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -3 & y \end{pmatrix} \underset{F_{41}^{-3},F_{51}^{-3}}{\overset{F_{21}^{2},F_{31}^{-3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -13 & 9 & 4 & -14 \\ 0 & -6 & 6 & x+3 & -9 \\ 0 & -7 & 3 & 0 & y-12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{42}^{\frac{6}{7}},F_{52}^{1}}{\overset{F_{32}^{\frac{13}{7}}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -1 & 4\\ 0 & 7 & -3 & 0 & 5\\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 4 & \frac{-33}{7}\\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & x+3 & \frac{-33}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-7\end{pmatrix}\overset{F_{43}^{-1}}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -1 & 4\\ 0 & 7 & -3 & 0 & 5\\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & 4 & \frac{-33}{7}\\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-7\end{pmatrix}.$$

Para que el rango sea mínimo, deben ser 0 todos los elementos posibles de la diagonal de la matriz escalonada, luego,
$x-1=0 \Rightarrow x=1$.
$y-7=0 \Rightarrow y=7$.
Entonces, si $x=1$, $y=7 \Rightarrow rango(A)=3$, que es el mínimo.

■

Problema 1.2.6. *Hallar el rango de la matriz*
$A=\begin{pmatrix}2 & x & y & x+y\\ x & x & 0 & 0\\ y & 0 & y & 0\\ x+y & 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}$ *según los diferentes valores reales de x e y.*

Solución.

En primer lugar, calculamos una matriz equivalente a la matriz A y que sea escalonada por filas. Para ello, realizamos las siguientes operaciones elementales por columnas,

$$\begin{pmatrix}2 & x & y & x+y\\ x & x & 0 & 0\\ y & 0 & y & 0\\ x+y & 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}\overset{C_{12}^{-1}}{\sim}\begin{pmatrix}2-x & x & y & x+y\\ 0 & x & 0 & 0\\ y & 0 & y & 0\\ x+y & 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}$$

$$\overset{C_{13}^{-1}}{\sim}\begin{pmatrix}2-x-y & x & y & x+y\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ x+y & 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}\overset{C_{14}^{-1}}{\sim}\begin{pmatrix}2-2x-2y & x & y & x+y\\ 0 & x & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 0\\ 0 & 0 & 0 & x+y\end{pmatrix}.$$

Una vez obtenida la matriz escalonada por filas, usamos la definición de rango de una matriz. El rango de la matriz A es el número de filas no nulas de la matriz escalonada por filas o el número de pivotes no nulos de dicha matriz escalonada por filas. Por lo tanto, para resolver el problema tenemos que estudiar qué ocurre cuando dichos pivotes valen cero. Distinguimos casos:

- Si $2-2x-2y=0$ entonces $x=1-y$ y la matriz escalonada por filas queda de la siguiente forma:
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1-y & y & 1 \\ 0 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
  - Si $1-y=0$ entonces $y=1$ y la matriz A tiene rango 2.
  - Si $y=0$ entonces la matriz A tiene rango 2.
  - Si $y \neq 0, 1$ entonces la matriz A tiene rango 3.
- Si $x=0$, la matriz escalonada por filas queda de la siguiente forma:
  $$\begin{pmatrix} 2-2y & 0 & y & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$
  - Si $2-2y=0$ entonces $y=1$ y la matriz A tiene rango 2.
  - Si $y=0$ entonces la matriz A tiene rango 1.
  - Si $y \neq 0, 1$ entonces la matriz A tiene rango 3.

- Si $y = 0$, la matriz escalonada por filas queda de la siguiente forma:
$\begin{pmatrix} 2-2x & x & 0 & x \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$.
  - Si $2 - 2x = 0$ entonces $x = 1$ y la matriz A tiene rango 2.
  - Si $x = 0$ entonces la matriz A tiene rango 1.
  - Si $x \neq 0, 1$ entonces la matriz A tiene rango 3.
- Si $x + y = 0$ entonces $x = -y$ y la matriz escalonada por filas queda de la siguiente forma:
$\begin{pmatrix} 2 & -y & y & 0 \\ 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  - Si $y = 0$ entonces la matriz A tiene rango 1.
  - Si $y \neq 0$ entonces la matriz A tiene rango 3.
- Si $2 - 2x - 2y \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ y $x + y \neq 0$ entonces la matriz A tiene rango 4.

El estudio anterior queda resumido de la siguiente forma:

- Si $x = 0, y = 0 \Rightarrow rango(A) = 1$.
- Si $x = 0, y = 1$ o $x = 1, y = 0 \Rightarrow rango(A) = 2$.
- Si $x = 0, y \neq 0, 1$ o $x \neq 0, 1, y = 0$ o $x \neq -y, y \neq 0$ o $x = 1 - y, y \neq 0, 1 \Rightarrow rango(A) = 3$.

- Si $x \neq 1-y, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y \Rightarrow rango(A) = 4$.

■

Problema 1.2.7. *Determinar, según los diferentes valores reales de x e y, el rango de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x & 2 \end{pmatrix} \underset{F_{41}^{-y}}{\overset{F_{31}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 2 \end{pmatrix} \overset{F_{34}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-y & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango depende de $x-y$ una vez escalonada la matriz. Distinguimos casos:

- Si $x - y \neq 0 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow rango(A) = 3$.
- Si $x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow rango(A) = 3$.

■

1.3 Forma canónica y matriz inversa

Problema 1.3.1. *Sabiendo que la inversa de la matriz A es la matriz*

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Calcular x en la expresión $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

Solución.

Para hallar x, la podemos despejar de la expresión $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ usando la inversa de A. Para ello, multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en ambos lados de la expresión. Cabe recordar que es distinto multiplicar por la derecha a hacerlo por la izquierda, ya que el producto de matrices no es conmutativo. Además la matriz x es de dimensión 3×1, para que al multiplicar por la matriz A, se obtenga la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$A^{-1}Ax = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Ix = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

■

Problema 1.3.2. *Averiguar para qué valores de a es invertible la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Para que una matriz de orden n sea invertible, debe tener rango máximo. Como en este caso tenemos una matriz de orden 4, para que sea invertible, el rango debe ser 4. Por lo tanto, calculamos para qué valores de a el rango es 4. Para ello vamos a escalonar la matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{-1}, F_{41}^{-a}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{42}^{\frac{a^2-1}{1-a}}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{43}^{(-a-2)}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -(a-1)(a+3) \end{pmatrix}.$$

Para que el rango sea máximo ninguna fila puede ser nula. Observamos cada fila.

$$\left.\begin{array}{rcl} 1-a & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1-a & = & 0 \\ a-1 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow a = 1.$$

$$-(a-1)(a+3) = 0 \;\} \Leftrightarrow a = 1 \text{ o } a = -3.$$

Entonces, para que tenga rango máximo y, por lo tanto, A sea invertible, $a \neq 1, -3$.

■

Problema 1.3.3. *Calcular la matriz inversa de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Para calcular la inversa, adjuntamos la matriz identidad y, mediante transformaciones elementales solo de filas o solo de columnas, transformamos la matriz dada en la matriz identidad. A su vez, vamos aplicando estas transformaciones a la matriz identidad inicial y la matriz que quede en el lugar de esta, es la matriz inversa. Suponemos que existen las inversas de A, B y C.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{32}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{3}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_{23}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{12}^{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{31}^{-3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{3}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{F_{23}^{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{1}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{23}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{23}^{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{13}^{4}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 1.3.4. *Calcular, cuando sea posible, la inversa de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & 9 \\ 2 & -10 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solución.

Recordamos que para que exista la inversa de una matriz, la matriz debe ser cuadrada y tener rango máximo. Si se cumplen estas dos condiciones, calculamos la inversa de la misma forma que en el ejercicio anterior. En este ejercicio, todas las matrices son cuadradas, luego nos queda ver si tienen rango máximo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & 9 \\ 2 & -10 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{-2}}{\underset{\sim}{F_{21}^{-1}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & 6 \\ 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{32}^{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{F_{34}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-7&3&6\\0&2&1&0\\0&0&0&-9\end{pmatrix}\underset{\sim}{F_{32}^{\frac{2}{7}}}\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-7&3&6\\0&0&\frac{13}{7}&\frac{12}{7}\\0&0&0&-9\end{pmatrix}\Rightarrow rango(A)=4$$

$\Rightarrow$ existe A^{-1}.
Hallamos A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\1&-5&3&9&0&1&0&0\\2&-10&6&9&0&0&1&0\\0&2&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-2}}{\underset{\sim}{F_{21}^{-1}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&-7&3&6&-1&1&0&0\\0&-14&6&3&-2&0&1&0\\0&2&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{32}^{-2}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&-7&3&6&-1&1&0&0\\0&0&0&-9&0&-2&1&0\\0&2&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{34}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&-7&3&6&-1&1&0&0\\0&2&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&-9&0&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{32}^{\frac{2}{7}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&-7&3&6&-1&1&0&0\\0&0&\frac{13}{7}&\frac{12}{7}&\frac{-2}{7}&\frac{2}{7}&0&1\\0&0&0&-9&0&-2&1&0\end{array}\right)$$

$$\underset{F_3^{\frac{7}{13}},F_4^{\frac{-1}{9}}}{\underset{\sim}{F_2^{\frac{-1}{7}}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&0&3&1&0&0&0\\0&1&\frac{-3}{7}&\frac{-6}{7}&\frac{1}{7}&\frac{-1}{7}&0&0\\0&0&1&\frac{12}{13}&\frac{-2}{13}&\frac{2}{13}&0&\frac{7}{13}\\0&0&0&1&0&\frac{2}{9}&\frac{-1}{9}&0\end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{34}^{\frac{-12}{13}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{-6}{7} & \frac{1}{7} & \frac{-1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{23}^{\frac{3}{7}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-6}{7} & \frac{1}{13} & \frac{-15}{91} & \frac{4}{91} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{24}^{\frac{6}{7}}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{-2}{39} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{12}^{-2}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{11}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{-6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{-2}{39} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{14}^{-3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{13} & \frac{-28}{39} & \frac{17}{39} & \frac{-6}{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{-2}{39} & \frac{3}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} & \frac{-28}{39} & \frac{17}{39} & \frac{-6}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{1}{39} & \frac{-2}{39} & \frac{3}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{-2}{39} & \frac{4}{39} & \frac{7}{13} \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{2}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{32}^{-5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rango(B) = 3 \Rightarrow$ existe B^{-1}.
Hallamos B^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{2}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{-5}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 12 & -5 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{3}^{\frac{1}{43}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{43} & \frac{-5}{43} & \frac{1}{43} \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{23}^{8}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{43} & \frac{3}{43} & \frac{8}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{43} & \frac{-5}{43} & \frac{1}{43} \end{array}\right) \overset{F_{12}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{33}{43} & \frac{-3}{43} & \frac{-8}{43} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{43} & \frac{3}{43} & \frac{8}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{43} & \frac{-5}{43} & \frac{1}{43} \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{13}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{43} & \frac{2}{43} & \frac{-9}{43} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{43} & \frac{3}{43} & \frac{8}{43} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{43} & \frac{-5}{43} & \frac{1}{43} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21}{43} & \frac{2}{43} & \frac{-9}{43} \\ \frac{10}{43} & \frac{3}{43} & \frac{8}{43} \\ \frac{12}{43} & \frac{-5}{43} & \frac{1}{43} \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{2}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{-5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow rango(C) = 2 \Rightarrow$ no existe C^{-1}.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -3 & 8 & 12 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{23}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & 8 & 12 \\ 0 & -5 & 7 & 10 \end{pmatrix} \underset{F_{42}^{-5}}{\overset{F_{32}^{-3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -23 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{43}^{\frac{-23}{10}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-119}{10} \end{pmatrix} \Rightarrow rango(D) = 4 \Rightarrow \text{existe } D^{-1}.$$

Hallamos D^{-1}.

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 8 & 12 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -5 & 7 & 10 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\overset{F_{23}}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -3 & 8 & 12 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 7 & 10 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_{42}^{-5}}{\overset{F_{32}^{-3}}{\sim}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 3 & -2 & 1 & -3 & 0 \\
0 & 0 & -23 & -5 & -1 & 0 & -5 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\overset{F_{43}^{\frac{-23}{10}}}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -10 & 3 & -2 & 1 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-119}{10} & \frac{18}{5} & \frac{-23}{10} & \frac{19}{10} & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_3^{\frac{-1}{10}},F_4^{\frac{-10}{119}}}{\overset{F_2^{-1}}{\sim}}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{-3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119}
\end{array}\right)
$$

$$
\overset{F_{34}^{\frac{3}{10}}}{\sim}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -6 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119}
\end{array}\right)
$$

$$\underset{\sim}{F_{23}^{6}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{78}{119} & \frac{-30}{119} & \frac{61}{119} & \frac{-18}{119} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{24}^{3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & -4 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-30}{119} & \frac{39}{119} & \frac{4}{119} & \frac{-48}{119} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{12}^{-3}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -4 & -5 & \frac{209}{119} & \frac{-117}{119} & \frac{-12}{119} & \frac{144}{119} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-30}{119} & \frac{39}{119} & \frac{4}{119} & \frac{-48}{119} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{13}^{4}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -5 & \frac{261}{119} & \frac{-137}{119} & \frac{108}{119} & \frac{132}{119} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-30}{119} & \frac{39}{119} & \frac{4}{119} & \frac{-48}{119} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{14}^{5}}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{81}{119} & \frac{-22}{119} & \frac{13}{119} & \frac{82}{119} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-30}{119} & \frac{39}{119} & \frac{4}{119} & \frac{-48}{119} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{81}{119} & \frac{-22}{119} & \frac{13}{119} & \frac{82}{119} \\ \frac{-30}{119} & \frac{39}{119} & \frac{4}{119} & \frac{-48}{119} \\ \frac{13}{119} & \frac{-5}{119} & \frac{30}{119} & \frac{-3}{119} \\ \frac{-36}{119} & \frac{23}{119} & \frac{-19}{119} & \frac{-10}{119} \end{pmatrix}.$$

■

Problema 1.3.5. *Sean*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Despejar y calcular X en las siguientes ecuaciones:

(a) $XA = B + I$,

(b) $AX - B = C$,

(c) $XAB - XC = 2C$,

(d) $XA + B = 2C$,

(e) $AX + BX = C$.

Solución.

Recordamos que para despejar una matriz cuando otra la multiplica, hay que multiplicar por la inversa. Además, es importante si se multiplica por la derecha o por la izquierda, ya que el producto de matrices no es conmutativo. Si multiplicamos por la izquierda, en ambos lados de la igualdad se multiplica por la izquierda y de la misma forma si es por la derecha.

(a) $XA = B+I \Rightarrow XAA^{-1} = (B+I)A^{-1} \Rightarrow XI = (B+I)A^{-1} \Rightarrow X = (B+I)A^{-1}$. Para calcular X debemos ver antes si existe A^{-1} y calcularla.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{21}^{-2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(A) = 2 \Rightarrow$ existe A^{-1}.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{21}^{-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{2}^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$
$\underset{\sim}{F_{12}^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) $AX - B = C \Rightarrow AX = C + B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(C + B) \Rightarrow X = A^{-1}(C + B)$.

$X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $XAB - XC = 2C \Rightarrow X(AB - C) = 2C \Rightarrow X(AB-C)(AB-C)^{-1} = 2C(AB-C)^{-1} \Rightarrow X = 2C(AB-C)^{-1}$.
Vemos si existe $(AB - C)^{-1}$.

$AB-C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \overset{F_1^{\frac{1}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \overset{F_{21}^{-5}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow rango(AB - C) = 2 \Rightarrow$ existe $(AB - C)^{-1}$.

$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \overset{F_1^{\frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \overset{F_{21}^{-5}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & \frac{-5}{2} & 1 \end{array} \right)$
$\overset{F_2^{\frac{1}{4}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \overset{F_{12}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{8} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow$

$(AB - C)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

$X = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

(d) $XA+B = 2C \Rightarrow XA = 2C-B \Rightarrow XAA^{-1} = (2C-B)A^{-1} \Rightarrow X = (2C - B)A^{-1}$.

$X = \left[2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

(e) $AX + BX = C \Rightarrow (A + B)X = C \Rightarrow (A + B)^{-1}(A + B)X = (A + B)^{-1}C \Rightarrow X = (A + B)^{-1}C$.

Vemos si existe $(A+B)^{-1}$.
$A+B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix} \overset{F_1^{\frac{1}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 3 & 5\end{pmatrix} \overset{F_{21}^{-3}}{\sim} \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow rango(A+B) = 2$
$\Rightarrow$ existe $(A+B)^{-1}$.
$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{F_1^{\frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 3 & 5 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{F_{21}^{-3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1\end{array}\right) \overset{F_2^2}{\sim}$
$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right) \overset{F_{12}^{\frac{-3}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -3 & 2\end{array}\right)$.
$X = \begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 8\\ 2 & -5\end{pmatrix}$.

■

Problema 1.3.6. *Resolver la ecuación matricial*

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Solución.
En primer lugar denotamos
$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$.
Luego, la ecuación matricial es
$AXB = C \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow IXI = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow XI = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$.
Para calcular X debemos ver si A^{-1} y B^{-1} existen y, si es así, calcularlas.
Vemos si existe A^{-1}.
$A = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow rango(A) = 2 \Rightarrow$ existe A^{-1}.

Calculamos A^{-1}.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{12}^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Vemos si existe B^{-1}.
$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{21}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg(B) = 2 \Rightarrow$ existe B^{-1}.
Calculamos B^{-1}.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{21}^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\sim}{F_2^{\frac{-1}{3}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{12}^{-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$
$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

■

1.4 Determinantes

Problema 1.4.1. *Calcular los siguientes determinantes:*

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$,

(c) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

(d) $$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

(e) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

(f) $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Solución.

Para calcular determinantes de orden 3 usamos la regla de Sarrus, mientras que para los de orden mayor que 3 aplicamos transformaciones elementales (que pueden ser tanto de filas como de columnas) para conseguir una fila o columna de ceros y así desarrollar por menores. Entonces, en los determinantes de orden 3 resultantes aplicamos Sarrus.

Recordamos que un determinante no cambia su valor si le aplicamos transformaciones elementales de filas y columnas, excepto multiplicar una línea por una constante (que se estaría multiplicando el resultado del determinante por esa constante) o intercambiar filas o columnas (que hace que el resultado del determinante cambie de signo).

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 + 12 + 6 + 18 - 2 = 43.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{\sim}{C_{32}^{6}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 & -5 \\ 2 & 3 & 18 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -9 & 5 \end{vmatrix} \underset{\sim}{C_{42}^{3}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 & 4 \\ 2 & 3 & 18 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -9 & -1 \end{vmatrix}$

$\overset{3^a F}{=} 0 \begin{vmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 3 & 18 & 11 \\ -2 & -9 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 2 & 18 & 11 \\ 1 & -9 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$

$+0 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 4 \\ 2 & 18 & 11 \\ 1 & -9 & -1 \end{vmatrix} = -18-72+154-72+99+28 =$
119.

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\sim}{C_{31}^{-2}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -10 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \underset{\sim}{C_{41}^{4}} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -10 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$\overset{2^a F}{=} -1 \begin{vmatrix} 3 & -10 & 11 \\ 4 & 4 & 9 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(24+176+270+132-108+80) =$
$-574.$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\sim}{C_{21}^{-2}} 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -3 & 10 & 2 & 6 \\ 3 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$\overset{C_{31}^{-1}}{\sim} 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ -3 & 10 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \overset{1^aF}{=} 2\left(1\begin{vmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 10 & 5 & 6 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$= 2(-20 - 150 + 36 + 75 - 36 + 40) = -110.$

En este apartado, en el primer paso, hemos sacado el 2 que multiplica a la primera fila.

(e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3^aF}{=} 1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{3^aF}{=} -1\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1(8)$

$= -8.$

(f) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{3^aF}{=} -1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{4^aF}{=} -1\left(-1\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}\right)$

$= 12.$

■

Problema 1.4.2. *Demostrar, sin desarrollar, que los siguientes determinantes valen cero:*

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix},$

(b) $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix}.$

Solución.
Podemos aplicar transformaciones elementales a los determinantes sin que estos cambien su valor, excepto si multiplicamos una línea por una constante o intercambiamos dos líneas.
(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{C_{32}^{1}}{\sim} \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=}$
$(a+b+c)0 = 0.$
(b) $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ a & 5a & 6a \\ a & 7a & 8a \end{vmatrix} \overset{(**)}{=} 0.$
(*) Como la columna 1 y la columna 3 son iguales, el determinante vale 0.
(**) Como la columnas 3 es igual a la suma de la 1 y la 2, el determinante vale 0.

■

Problema 1.4.3. *Si el valor del determinante* $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} =$ 25. *Calcular el valor de* $|B| = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$.

Solución.
$|B| = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} \overset{F_{23}}{=} -8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ u & w & v \end{vmatrix} \overset{C_{23}}{=}$
$8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 8|A| = 8 \times 25 = 200.$ ■

Problema 1.4.4. *Sabiendo que* $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, *calcular los siguientes determinantes:*

(a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$.

Solución.

(a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = |A| = 5.$

(b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

$\stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

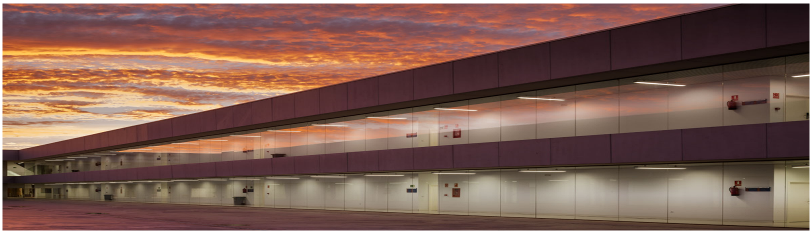
$= 0 + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + |A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 5$

$= 3 \times 0 + 5 = 5.$

(*) Utilizamos propiedad de que, si una línea de un determinante es suma de dos sumandos, el determinante es igual a la suma de dos determinantes iguales salvo en esa línea, teniendo en el primer determinante el primer sumando y en el segundo determinante, el segundo sumando.

■



Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones lineales

Índice

2.1 Sistemas de ecuaciones sin parámetros

Problema 2.1.1. *Encontrar un sistema de ecuaciones escalonado equivalente al siguiente:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5 & = & 0 \\ 3x_1-x_2+x_4-x_5 & = & 6 \\ x_1-2x_2+2x_3-2x_4 & = & -5 \\ 6x_1+x_2+x_4+x_5 & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Solución.
Un sistema es equivalente a otro cuando ambos tienen la misma solución. Para conseguir un sistema equivalente a otro, aplicamos transformaciones elementales, por teorema, si en un sistema de ecuaciones sustituimos una ecuación por la que resulta de sumarle otra multiplicada por un factor no nulo del mismo sistema, el nuevo sistema es equivalente al original. También se puede multiplicar una ecuación por una constante no nula.
Pasamos el sistema a forma matricial para escalonarlo.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 0 & -5 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-6}}{\overset{F_{21}^{-3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 6 & -5 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{2}^{\frac{-1}{7}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & -4 & 3 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & -11 & 6 & -5 & -5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{11}}{\overset{F_{32}^{4}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{-13}{7} & \frac{9}{7} & \frac{-59}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{-13}{7} & \frac{9}{7} & \frac{-59}{7} \end{array}\right) \overset{F_{43}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{-13}{7} & \frac{9}{7} & \frac{-59}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{3}^{7}}{\overset{F_{2}^{7}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & -13 & 9 & -59 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El sistema de ecuaciones escalonado equivalente que queda es

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1+2x_2-x_3+x_4+x_5 & = & 0 \\ 7x_2-3x_3+2x_4+4x_5 & = & -6 \\ 9x_3-13x_4+9x_5 & = & -59 \end{array}\right\}.$$

■

Problema 2.1.2. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$(a)\quad \left.\begin{array}{rcr} 3x-z & = & 2 \\ 4x-y+2z & = & 7 \\ 7x+2y-z & = & -3 \end{array}\right\},$$

$$(b)\quad \left.\begin{array}{rcr} x-3z & = & 0 \\ x-y & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Solución.

(a) Pasamos a forma matricial.

$$A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{F_1^{\frac{1}{3}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_{21}^{-4} \\ \sim \\ F_{31}^{-7} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{-23}{3} \end{array}\right) \overset{F_{32}^{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & \frac{10}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right).$$

El correspondiente sistema es

$$\left.\begin{array}{rcr} x-\frac{1}{3}z & = & \frac{2}{3} \\ -y+\frac{10}{3}z & = & \frac{13}{3} \\ 8z & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{1}{8},\, y=\frac{-47}{12},\, x=\frac{17}{24}.$$

(b) Pasamos a forma matricial.

$$B^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{21}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

El correspondiente sistema es

$$\left.\begin{array}{rcl} x-3z &=& 0 \\ -y+3z &=& 1 \end{array}\right\}.$$

Como hay 2 ecuaciones para 3 incógnitas, necesitamos igualar una de ellas a un parámetro y las otras 2 las obtendremos en función de ese parámetro. Se trata de un sistema compatible indeterminado.
Igualando en este caso z a α, obtenemos
$z=\alpha$, $y=3\alpha-1$, $x=3\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

■

Problema 2.1.3. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$(a)\quad \left.\begin{array}{rcr} x_1+x_2+3x_3+2x_5 &=& 6 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5 &=& 3 \\ x_2+2x_3-2x_4+x_5 &=& -5 \\ 2x_1-x_2-3x_4-x_5 &=& 2 \end{array}\right\},$$

$$(b)\quad \left.\begin{array}{rcl} x_1+x_2+3x_3+2x_5 &=& 6 \\ -x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5 &=& 3 \\ x_2+2x_3+x_4+x_5 &=& 1 \\ x_1+x_3-x_4+x_5 &=& 5 \end{array}\right\}.$$

Solución.
Seguimos los mismos pasos que en los ejercicios anteriores, pasamos a forma matricial y escalonamos la matriz.
(a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_{21}^{1} \\ \sim \\ F_{41}^{-2} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{32}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_{32}^{-2} \\ \sim \\ F_{42}^{3} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -2 & -25 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{43}^{\frac{9}{6}}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 & = & 6 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 & = & -5 \\ 6x_4 + 2x_5 & = & 19 \\ x_5 & = & \frac{7}{2} \end{array}\right\}.$$

Tengo 4 ecuaciones y 5 incógnitas, entonces necesitamos 1 parámetro.
$x_5 = \frac{7}{2}, x_4 = 2, x_3 = \alpha, x_2 = \frac{-9}{2} - 2\alpha, x_1 = \frac{7}{2} - \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_{21}^{1} \\ \sim \\ F_{41}^{-1} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{23}}\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_{32}^{-2} \\ \sim \\ F_{42}^{1} \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 & = & 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 & = & 1 \\ 2x_5 & = & 7 \end{array}\right\}.$$

Tengo 3 ecuaciones y 5 incógnitas, entonces necesitamos 2 parámetros, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$. Luego,
$x_5 = \frac{7}{2}$, $x_4 = \beta$, $x_3 = \alpha$, $x_2 = \frac{-5}{2} - 2\alpha - \beta$, $x_1 = \frac{3}{2} - \alpha + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

■

Problema 2.1.4. *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:*

$$(a) \quad \left.\begin{array}{rcr} -2x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 5x_4 & = & 6 \\ -3x_1 - 12x_2 + 10x_3 + 6x_4 & = & 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + x_4 & = & -1 \\ -2x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & -4 \end{array}\right\},$$

$$(b) \quad \left.\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 11x_3 - 4x_4 & = & 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Solución.

Para usar la regla de Cramer, el sistema debe ser compatible determinado y, por lo tanto, tener igual número de ecuaciones que de incógnitas. Como el enunciado nos dice que usemos Cramer, suponemos que el sistema es de este tipo.

(a)

Escribimos en forma matricial

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -9 & -8 & 5 & 6 \\ -3 & -12 & 10 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right).$$

$|A| = -1.$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & -12 & 10 & 6 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -4 & -6 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-1} = 8.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 6 & -8 & 5 \\ -3 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{243}{-1} = -243.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -9 & 6 & 5 \\ -3 & -12 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{15}{-1} = -15.$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -9 & -8 & 6 \\ -3 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 5 & -4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{457}{-1} = -457.$$

(b)

Escribimos en forma matricial

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & -8 & 11 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

$|A| = 1$.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -8 & 11 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 11 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & -8 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \\ 5 & -8 & 11 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{1} = 0.$$

■

Problema 2.1.5. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array}\right\},$$

Solución.

Los sistemas homogéneos siempre tienen la solución trivial, por lo que siempre son compatibles. No obstante, vemos si esa es la única solución a ese sistema (sería entonces sistema compatible determinado) o si tiene infinitas (sería entonces sistema compatible indeterminado). Pasamos a forma matricial y escalonamos.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-4},F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{43}}{\overset{F_2^{\frac{1}{3}}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ -3x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

$x_4 = 0$ y como tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, necesitamos un parámetro.
Igualamos x_3 a α y obtenemos
$x_3 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$, $x_1 = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

■

2.2 Sistemas de ecuaciones con parámetros

Problema 2.2.1. *Discutir, según los valores de a, el carácter del siguiente sistema de ecuaciones y resolverlo en caso de compa-*

tibilidad:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+ay-z & = & -1 \\ 3x+y+z & = & a \\ ax-y+2z & = & 1+a \end{array}\right\}.$$

Solución.

Vemos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada para discutir el tipo de sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius. Cabe recordar que para discutir el sistema, podemos hacerlo calculando el rango tanto usando determinantes como escalonando la matriz.

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & a \\ a & -1 & 2 & 1+a \end{array}\right).$

$|A| = a^2 - 5a + 6 = (a-3)(a-2).$

$a = 3$ y $a = 2$ son los dos posibles valores que hacen que $|A| = 0$. Distinguimos casos:

- Si $a = 3$:

  $|A| = 0, \Rightarrow rango(A) < 3.$

  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right).$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2, rango(A^*) \geq 2.$

  Ampliando el determinante,

  $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3.$

Por lo tanto, si $a = 3, rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a = 2$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 3$.

  $$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2, rango(A^*) \geq 2$ y como sus ampliaciones a orden 3 son 0, entonces $rango(A^*) = 2$.

  Por lo tanto, si $a = 2$, $rango(A) = rango(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Lo resolvemos.

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-2}}{\overset{F_{21}^{-3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

  $$\overset{F_{32}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x + 2y - z & = & -1 \\ -5y + 4z & = & 5 \end{array}\right\}.$$

  Como tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas, necesitamos un parámetro. Igualamos z a α y obtenemos

  $z = \alpha$, $y = -1 + \frac{4}{5}\alpha$, $x = 1 - \frac{3}{5}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $a \neq 2, 3$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^*) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Lo resolvemos usando Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \\ 1+a & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2+3a-2}{(a-3)(a-2)} = \frac{(a-1)(a-2)}{(a-3)(a-2)} = \frac{a-1}{a-3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & a & 1 \\ a & 1+a & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^2-3a+2}{(a-3)(a-2)} = \frac{(a-2)(a-1)}{(a-3)(a-2)} = \frac{a-1}{a-3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 3 & 1 & a \\ a & -1 & 1+a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3-3a^2+4}{(a-3)(a-2)} = \frac{(a+1)(a-2)^2}{(a-3)(a-2)} = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-3)}.$$

■

Problema 2.2.2. *Discutir y resolver, según los valores de a, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} (8-a)x+2y+3z+at & = & 0 \\ x+(9-a)y+4z+at & = & 0 \\ x+2y+(10-a)z+at & = & 0 \\ x+2y-3z+at & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Solución.

Vemos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada para discutir el tipo de sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius. Cabe recordar que para discutir el sistema, podemos hacerlo calculando el rango tanto usando determinantes, como escalonando la matriz. En este caso, como es un sistema homogéneo, tenemos la solución trivial. Es, por lo tanto, sistema compatible. Dependiendo del $rango(A)$, en función de a, vemos si es sistema compatible determinado (A tiene rango máximo) o sistema compatible indeterminado (A no tiene rango máximo). Recordamos también que en los sistemas homogéneos, el rango de la matriz ampliada coincide siempre con el de la matriz de coeficientes, puesto que la columna nula no aumenta el rango.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 8-a & 2 & 3 & a & 0 \\ 1 & 9-a & 4 & a & 0 \\ 1 & 2 & 10-a & a & 0 \\ 1 & 2 & -3 & a & 0 \end{array}\right).$$

$|A| = -a^4 + 27a^3 - 231a^2 + 637a = -a(a-7)^2(a-13).$

- Si $a \neq 0, 7, 13$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 4 = rango(A^*) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado y al ser homogéneo, la solución es la trivial, $x = y = z = t = 0$.

- Si $a = 0$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4$.

  Como $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 623 \neq 0 \Rightarrow rango(A) =$ $rango(A^*) = 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  De este menor principal, deducimos que el rango lo dan las 3 primeras ecuaciones, luego,

  $$\left.\begin{array}{rcl} 8x + 2y + 3z & = & 0 \\ x + 9y + 4z & = & 0 \\ x + 2y + 10z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

  Como t no aparece, la solución es independiente de $t \Rightarrow t = \alpha$. Resolvemos el sistema anterior como un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Como su determinante es distinto de cero, es sistema compatible determinado y su solución es la trivial, uniéndola a t, obtenemos la solución

$x = y = z = 0,\ t = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

- Si $a = 7$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4$ y, calculando, llegamos a que $rango(A) = 2 = rango(A^*) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Resolvemos,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{42}^{6}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z + 7t & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

  Necesitamos 2 parámetros, entonces

  $x = -2\alpha - 7\beta,\ y = \alpha,\ z = 0,\ t = \beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$

- Si $a = 13$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4.$

  Como $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) =$ $3 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Resolvemos,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 2 & 3 & 13 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right) \overset{F_{21}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 4 & 13 & 0 \\ -5 & 2 & 3 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{43}^{-1}}{\overset{F_{21}^{5}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -18 & 23 & 78 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{31}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -18 & 23 & 78 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 4y + 4z + 13t & = & 0 \\ -18y + 23z + 78t & = & 0 \\ 6y - 7z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Como tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, necesitamos 1 parámetro.

$x = \frac{1}{3}\alpha$, $y = \frac{7}{6}\alpha$, $z = \alpha$, $t = \frac{-1}{39}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

■

Problema 2.2.3. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$. *Hallar el valor de a para que la ecuación* $AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *donde X es una matriz cuadrada de orden* 2, *tenga solución no nula.*

Solución.

Sea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 3x + az & 3y + at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que dos matrices sean iguales, sus elementos correspondientes han de ser iguales. Igualando elemento a elemento, obtenemos el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2z & = & 0 \\ y+2t & = & 0 \\ 3x+az & = & 0 \\ 3y+at & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a & 0 \end{array}\right).$$

Tenemos un sistema homogéneo (sistema compatible). Sabemos que tiene la solución trivial (sistema compatible determinado), pero nos piden solución no nula, es decir, el valor de a para que sea un sistema compatible indeterminado. Para ello, por Rouché-Frobenius, tenemos que conseguir que $rango(A) = rango(A^*) <$ número de incógnitas = 4.

Al ser el sistema homogéneo, ya se cumple que $rango(A) = rango(A^*)$, ya que la columna nula no aumenta el rango de la matriz ampliada. Solo nos falta que ese rango sea menor que el número de incógnitas, que es 4. Para ello, $|A| = 0$.

$|A| = a^2 - 12a + 36$.

Igualando a cero, $|A| = a^2 - 12a + 36 = 0 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow |A| = 0$ y entonces $rango(A) <$ número de incógnitas = 4.

Con $a = 6$ tenemos un sistema compatible indeterminado y podemos obtener una solución no nula.

■

Problema 2.2.4. *Discutir y resolver, según los valores de a, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y-3z & = & 4 \\ 3x-y+5z & = & 2 \\ 4x+y+(a^2-14)z & = & a+2 \end{array}\right\}.$$

Solución.

Pasamos el sistema a forma matricial y vemos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada para discutir el tipo de sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius. Cabe recordar

que para discutir el sistema, podemos hacerlo calculando el rango tanto usando determinantes, como escalonando la matriz.
$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & a+2 \end{array}\right) \Rightarrow |A| = -7a^2 + 112 = 0 \Rightarrow$
$a = 4$ o $a = -4$.

- Si $a = 4$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 3$.
  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)$.
  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2, rango(A^*) \geq 2$.
  Vemos el $rango(A^*)$.
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rango(A^*) = 2 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) = 2 <$ número incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Resolvemos aplicando el método de Gauss.
  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-4}}{\overset{F_{21}^{-3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \end{array}\right)$$
  $$\overset{F_{32}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x + 2y + -3z & = & 4 \\ -7y + 14z & = & -10 \end{array}\right\}.$$
  Como tenemos 2 ecuaciones y 3 incógnitas (además, el sistema es compatible indeterminado, por lo que tenemos infinitas soluciones), necesitamos un parámetro,

$z = \alpha$, $y = \frac{10}{7} + 2\alpha$, $x = \frac{8}{7} - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $a = -4$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 3$.

  $$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

  Pero como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2, rango(A^*) \geq 2$.

  Vemos $rango(A^*)$.

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 56 \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3 \Rightarrow rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a \neq -4, 4$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^*) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

  Resolvemos por Cramer.

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ a+2 & 1 & a^2-14 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8a^2+7a+100}{-7a^2+112} = \frac{-(8a+25)(a-4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{-(8a+25)}{a+4}.$$

  $$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & a+2 & a^2-14 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-10a^2-14a+216}{(a-4)(a+4)} = \frac{-2(a-4)(5a+27)}{(a-4)(a+4)} = \frac{-2(5a+27)}{a+4}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & a+2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-7a+28}{(a-4)(a+4)} = \frac{-7(a-4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{-7}{a+4}.$$

■

Problema 2.2.5. *Discutir y resolver, según los valores de a y b, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x+2y+t & = & 1 \\ -x-3y-z & = & b \\ x+az & = & 1 \\ x-y+z+t & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Solución.

Pasamos a forma matricial y vemos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada para discutir el tipo de sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius. Cabe recordar que para discutir el sistema, podemos hacerlo calculando el rango tanto usando determinantes, como escalonando la matriz.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & b \\ 1 & 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

El rango máximo de A^* es 4, al igual que el de A.
Vemos el rango de A.
$|A| = 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2.$

- Si $a \neq 2$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) = 4 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado independientemente del valor de b.

Resolvemos con Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ b & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-3a-3ab-6}{3a-6} = \frac{-3(a+ab+2)}{3(a-2)} = \frac{-a-ab-2}{a-2}, a \neq 2, b \in \mathbb{R}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & b & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a+b}{3a-6}, a \neq 2, b \in \mathbb{R}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3b+6}{3a-6} = \frac{3(b+2)}{3(a-2)} = \frac{b+2}{a-2}, a \neq 2, b \in \mathbb{R}.$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & b \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4a+3ab-2b}{3a-6}, a \neq 2, b \in \mathbb{R}.$$

- Si $a = 2$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4.$

  $$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3$ independientemente de b y $rango(A^*) \geq 3$.

Vemos si el restante determinante 4×4 es distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4b + 8 = 0 \Rightarrow b = -2.$$

En el caso $a = 2$ puede ser que $b = -2$ o $b \neq -2$. Distinguimos casos:

- Si $b = -2$:
  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3 =$ $rango(A) <$ número de incógnitas $= 4 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Resolvemos con Gauss,
  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
  $$\underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-1}}{\overset{F_{21}^{1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
  $$\underset{F_{42}^{-3}}{\overset{F_{32}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{43}^{-1}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+t & = & 1 \\ -y-z+t & = & -1 \\ 4z-3t & = & 2 \end{array}\right\}.$$

Como tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, necesitamos 1 parámetro,

$x = \frac{-3}{2}\alpha$, $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha$, $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\alpha$, $t = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

– Si $b \neq -2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & b \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 4 \neq$$

$rango(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

■

Problema 2.2.6. *Discutir y resolver, según los valores de a, los siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$(a) \quad \left.\begin{array}{rcl} x+y+z & = & a \\ x+y+az & = & 1 \\ x+ay+z & = & 1 \\ ax+y+z & = & 1 \end{array}\right\},$$

$$(b) \quad \left.\begin{array}{rcr} x+2y-2z+2t & = & 2 \\ 2x+2y-4z+a^2t & = & a+2 \\ x+4y-2z+(6-a^2)t & = & 4-a \\ 4x+4y-8z+(a^2+4)t & = & a+6 \end{array}\right\},$$

Solución.

(a) Pasamos a forma matricial y vemos los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada para discutir el tipo de sistema aplicando el teorema de Rouché-Frobenius. Cabe recordar que para discutir el sistema, podemos hacerlo calculando el rango tanto usando determinantes, como escalonando la matriz.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$rango_{max}(A) = 3, rango_{max}(A^*) = 4.$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

- Si $a = 1$:

  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) = 1 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Para resolver, nos quedamos con 1 ecuación, ya que el resto son iguales a esta,

  $$\left. x + y + z = 1 \right\}.$$

  Como tenemos 1 ecuación y 3 incógnitas, necesitamos 2 parámetros,

  $z = \beta, y = \alpha, x = 1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

- Si $a \neq 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3, rango(A^*) \geq 3.$$

$|A^*| = a^4 - 6a^2 + 8a - 3 = 0 \Rightarrow a = 1$ o $a = -3$.

No puede ser $a = 1$ porque estamos en el caso de $a \neq 1$, luego solo puede es posible $a = -3$.

- Si $a = -3$:

  $|A^*| = 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^*) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Resolvemos por el método de Gauss.

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-1}, F_{41}^{3}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{array}\right)$$
  $$\overset{F_{24}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3^{\frac{1}{4}}, F_4^{\frac{1}{4}}}{\overset{F_2^{\frac{1}{4}}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
  $$\overset{F_{32}^{1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{43}^{1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$
  $$\left.\begin{array}{rcl} x + y + z & = & -3 \\ y + z & = & -2 \\ z & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow z = -1, y = -1, x = -1.$$

- Si $a \neq -3$:

  $|A^*| \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) \neq rango(A) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Este ejercicio también se podría haber resuelto calculando directamente $|A^*|$ e igualándolo a 0 para ver los valores de a en base a los que discutir el sistema, que habrían sido $a = 1$ y $a = -3$.

(b) En primer lugar, pasamos a forma matricial.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & a^2 & a+2 \\ 1 & 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 4 & 4 & -8 & a^2+4 & a+6 \end{array}\right).$$

$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4.$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & a^2 \\ 4 & -2 & 6-a^2 \\ 4 & -8 & a^2+4 \end{vmatrix} = -12a^2 + 48 = 0 \Rightarrow a = 4 \text{ o } a = -4.$$

- Si $a \neq 4, -4$:

  $rango(A) = 3, rango(A^*) \geq 3.$

  Vemos $rango(A^*)$ en función de a (ampliamos el determinante anterior).

  $$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & a^2 & a+2 \\ 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 4 & -8 & a^2+4 & a+6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3 \Rightarrow$$
  $rango(A) =$

  $= rango(A^*) = 3 <$ número de incógnitas $= 4 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Como $\begin{vmatrix} 2 & -4 & a^2 \\ 4 & -2 & 6-a^2 \\ 4 & -8 & a^2+4 \end{vmatrix} \neq 0$ en el caso que estamos de $a \neq 4$ y $a \neq -4$, las ecuaciones que nos dan información son las asociadas a este determinante (segunda, tercera y cuarta). Con ellas formamos nuestro sistema.

$$\left.\begin{array}{rcc} 2x+2y-4z+a^2t & = & a+2 \\ x+4y-2z+(6-a^2)t & = & 4-a \\ 4x+4y-8z+(a^2+4)t & = & a+6 \end{array}\right\}.$$

Pasamos a matriz y escalonamos para resolver.

$$B^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -4 & a^2 & a+2 \\ 1 & 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 4 & 4 & -8 & a^2+4 & a+6 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{21}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 2 & 2 & -4 & a^2 & a+2 \\ 4 & 4 & -8 & a^2+4 & a+6 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-4}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 0 & -6 & 0 & 3a^2-12 & 3a-6 \\ 0 & -12 & 0 & 5a^2-20 & 5a-10 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{-2}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & 6-a^2 & 4-a \\ 0 & -6 & 0 & 3a^2-12 & 3a-6 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2+4 & -a+2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcc} x+4y-2z+(6-a^2)t & = & 4-a \\ -6y+(3a^2-12)t & = & 3a-6 \\ (-a^2+4)t & = & -a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$t = \frac{1}{a+2}, z = \alpha, y = 0, x = \frac{2a+2a\alpha+4\alpha+2}{a+2}, a \neq 4, -4, \alpha \in \mathbb{R}.$

- Si $a = 4$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 16 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & -10 & 0 \\ 4 & 4 & -8 & 20 & 10 \end{array}\right).$$

Discutimos y resolvemos con el método de Gauss.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 16 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & -10 & 0 \\ 4 & 4 & -8 & 20 & 10 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-4}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-2}}{\overset{F_{32}^{1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rango(A) = 3 = rango(A^*) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - 2z + 2t & = & 2 \\ -2y + 12t & = & 2 \\ -12t & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow t = \frac{1}{6}, z = \alpha, y = 0, x = \frac{5}{3} + 2\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Si $a = -4$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 16 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -10 & 8 \\ 4 & 4 & -8 & 20 & 2 \end{array}\right).$$

Discutimos y resolvemos con el método de Gauss.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 16 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -10 & 8 \\ 4 & 4 & -8 & 20 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-1},F_{41}^{-4}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-2}}{\overset{F_{32}^{1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rango(A) = 3 = rango(A^*) <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y - 2z + 2t & = & 2 \\ -2y + 12t & = & -6 \\ -12t & = & 6 \end{array}\right\} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}, z = \alpha, y = 0, x =$$

$2\alpha + 3,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

■

Problema 2.2.7. *Discutir, según los valores de a y b, el siguiente sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by + z & = & 1 \\ x + aby + z & = & b \\ x + by + az & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Solución.

Pasamos a forma matricial y procedemos de igual forma que en los ejercicios anteriores.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{array}\right)$$

$|A| = a^3b - 3ab + 2b = b(a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow b = 0$ o $a = 1$ o $a = -2$.

- Si $b = 0$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) \leq 2 \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right).$

  Vemos el rango en función de a, $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 = 0 \Rightarrow$ $a = 1$.

  - Si $b = 0$ y $a = 1$:
    $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rango(A) = 1,$
    $rango(A^*) = 2$. Por lo tanto, $rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
  - Si $b = 0$ y $a \neq 1$:
    $rango(A) = 2$, $rango(A^*) \geq 2$.
    Vemos $rango(A^*)$ ampliando el determinante,
    $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
    $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$
    Como estamos en caso de $a \neq 1$, ese determinante es distinto de 0, luego,
    $rango(A^*) = 3 \Rightarrow rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a = 1$:

  $|A| = 0 \Rightarrow rango(A) \leq 2 \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right).$

Todos los determinantes 2×2 dan 0 independientemente del valor de b, luego $rango(A) = 1$.

Vemos $rango(A^*)$ en función de b.

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ b & 1 & b \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rango(A^*) < 3.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1.$$

- Si $a = 1$ y $b = 1$:

  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow rango(A^*) = 1 =$ $rango(A) <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Nos quedamos con una ecuación ya que las 3 son iguales.

  $x + y + z \; = \; 1 \;\; \Rightarrow z = \beta, y = \alpha, x = 1 - \alpha - \beta,$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Si $a = 1$ y $b \neq 1$:

  $rango(A^*) = 2 \neq rango(A) = 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

• Si $a = -2$:

$$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) \leq 2 \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2$ independientemente de b y
$rango(A^*) \geq 2$.

Vemos ahora $rango(A^*)$ en función de b.
$\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ -2b & 1 & b \\ b & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3b^2 + 6b = b(3b+6) = 0 \Rightarrow b = 0$ o
$b = -2$.

- Si $a = -2$ y $b = 0$:
  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$.
  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3 \Rightarrow$
  $rango(A^*) \neq rango(A) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- Si $a = -2$ y $b = -2$:
  $A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right)$.
  $rango(A^*) < 3$ y como vimos que $rango(A^*) \geq 2 \Rightarrow rango(A^*) = 2$, tenemos que $rango(A^*) = 2 = rango(A) <$ número de incógnitas $= 3, \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

  Nos quedamos con las 2 ecuaciones del menor principal de orden 2,
  $\left. \begin{array}{rcr} -2x - 2y + z & = & 1 \\ x + 4y + z & = & -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$z = -1 - 2\alpha, y = \alpha, x = -1 - 2\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $a = -2$ y $b \neq 0, -2$:

  $\begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ -2b & 1 & b \\ b & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A^*) = 3.$

  Como $rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $b \neq 0$ y $a \neq 1, -2$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) = 3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

  Resolvemos usando Cramer.

  $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-ab^2+b^2+a^2b-ab}{|A|} = \frac{-b(a-1)(b-a)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(b-a)}{(a-1)(a+2)}.$

  $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2a+a^2b-b+2}{|A|} = \frac{-(a-1)(2-b(1+a))}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{2-b(1+a)}{b(a-1)(a+2)}.$

  $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-ab^2+b^2+a^2b-ab}{|A|} = \frac{-b(a-1)(b-a)}{b(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(b-a)}{(a-1)(a+2)}.$

■

Problema 2.2.8. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & b-1 & b \end{pmatrix}$. *Para* $b = 3$*, determinar a y c para que el sistema de ecuaciones* $AX = B$*, con* $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}$*, sea compatible indeterminado y resolverlo.*

Solución.

Siendo X la matriz de incógnitas, el sistema es

$$\left.\begin{array}{rcr} x - y + 2z + t & = & 1 \\ 2x - 3y + 4z & = & 0 \\ -x + 2y + az + bt & = & -1 \\ y + (b-1)z + bt & = & c \end{array}\right\}.$$

En forma matricial para $b = 3$,

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & a & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & c \end{array}\right).$$

Para que sea sistema compatible indeterminado, $rango(A) = rango(A^*) <$ número de incógnitas $= 4$. El rango máximo de A y A^* es 4. Para llegar a ello, vamos a discutir en función de a y c hasta dar con el caso de sistema compatible indeterminado. Para ello, procedemos de igual forma que en los ejercicios anteriores.

$|A| = -a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2$.

Como con $a = 2$, $rango(A) < 4$ independientemente de c, a debe ser 2.

Si $a = 2$,

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & c \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$rango(A) = 3 \Rightarrow rango(A^*) \geq 3$.

Para que $rango(A^*)$ sea 3, tenemos que hacer que los posibles determinantes ampliados 4×4 del menor principal 3×3 que hemos obtenido, sean 0.

Una ampliación es $|A|$, que para $a = 2$ es 0.

La otra es $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & c \end{vmatrix} = -4c + 4 = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow$

$rango(A^*) = 3$.

Por lo tanto, con $a = 2$, $c = 1$, se cumple que $rango(A) = rango(A^*) = 3 <$ número de incógnitas $= 4 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Resolvemos con el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{1}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{1}}{\overset{F_{32}^{1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{F_{3}^{\frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{43}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x - y + 2z + t & = & 1 \\ -y - 2t & = & -2 \\ 2z + t & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$t = -1 - 2\alpha, z = \alpha, y = 4 + 4\alpha, x = 6 + 4\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. ■

Problema 2.2.9. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Discutir para qué valores de a es A inversible.

(b) Discutir y resolver el sistema $AX = 0$.

Solución.
(a) Recordamos que para que A sea inversible, $|A| \neq 0$. Hallamos los valores de a que hacen que $|A| \neq 0$. $|A| = 2a = 0 \Rightarrow a = 0$. Luego, para $a \neq 0$, A es inversible.
(b) El sistema, siendo X la matriz de incógnitas es

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ y+az+t & = & 0 \\ y+2t & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Es un sistema homogéneo, por lo que tiene la solución trivial.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Del apartado anterior sabemos que $|A| = 0 \Rightarrow a = 0$. Distinguimos casos teniendo en cuenta que en un sistema homogéneo, es decir, $rango(A) = rango(A^*)$ siempre.

- Si $a = 0$:

$$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4 \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^*) <$ número de incógnitas = 4 ⇒ Sistema compatible indeterminado.

Resolvemos con el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{42}^{-1}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{43}^{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x + z & = & 0 \\ y & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$t = 0, z = \alpha, y = 0, x = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $a \neq 0$:

  $|A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) =$ número de incógnitas = 4 ⇒ Sistema compatible determinado.

  Como es un sistema homogéneo, al ser compatible determinado, la solución es la trivial,

  $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$.

■

Problema 2.2.10. *Discutir, según los valores de a, el sistema de* *ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}.$$

Resolver dicho sistema cuando sea posible.

Solución.
Para este ejercicio seguimos el mismo procedimiento que en los anteriores.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & a \\ -2 & 8 & 1 & 8 & -a \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -a \end{array}\right).$$

$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 4.$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3$ independientemente de a y $rango(A^*) \geq 3$.

Para $rango(A^*)$, ampliamos el menor principal de A con la última ampliación posible, que es añadiéndole la última columna, y vemos el rango en función de a.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & a \\ -2 & 8 & 1 & -a \\ 0 & 3 & -1 & -a \end{vmatrix} = -36a + 108 = 0 \Rightarrow a = 3.$$

- Si $a = 3$:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Como todos los determinantes 4×4 de A^* son 0, $rango(A^*) < 4$, pero antes vimos que $rango(A^*) \geq 3$, luego $rango(A^*) = 3 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) <$ número de incógnitas $= 4 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1^{\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 8 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_{21}^{-4} \\ \sim \\ F_{31}^{2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_{32}^{-3} \\ \sim \\ F_{42}^{-1} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{43}^{1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1^{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x + y - t & = & 2 \\ 3y + 2t & = & -1 \\ z + t & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$t = \alpha, z = 2 - \alpha, y = \frac{-1-2\alpha}{3}, x = \frac{7+5\alpha}{6}, \alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $a \neq 3$:

  $rango(A^*) = 4 \neq rango(A) = 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

■

Problema 2.2.11. *Determinar a y b para que el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-3y+az & = & 0 \\ x+y-3z & = & b \\ 3x-7y+bz & = & a \end{array}\right\}$$

sea compatible indeterminado.

Solución.

Procedemos del mismo modo que en los ejercicios anteriores.

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & a & 0 \\ 1 & 1 & -3 & b \\ 3 & -7 & b & a \end{array}\right).$

Para que sea sistema compatible indeterminado, $rango(A) = rango(A^*) <$ número de incógnitas $= 3$. El rango máximo de A es 3. Por ello, $|A|$ debe ser 0.

$|A| = -10a + 5b - 15 = 0 \Rightarrow a = -\frac{-b+3}{2}$.

Para que sea sistema compatible indeterminado, a debe ser $-\frac{-b+3}{2}$.

Con ello, A^* queda como

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -\frac{-b+3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & -3 & b \\ 3 & -7 & b & -\frac{-b+3}{2} \end{array}\right).$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 2$ independientemente de b.

Para que $rango(A^*) = 2$, la última posible ampliación (la otra era $|A|$) del menor principal anterior, debe ser 0.

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 3 & -7 & -\frac{-b+3}{2} \end{vmatrix} = \frac{15b-15}{2} = 0 \Rightarrow b = 1.$

Usando que $a = -\frac{-b+3}{2} \Rightarrow a = -1$.

Luego, $rango(A) = rango(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. ■

Problema 2.2.12. *Sea el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+3z & = & -4 \\ x-y+(a+2)z & = & -3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z & = & -3a^2-8 \end{array}\right\}.$$

(a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores de a.

(b) Resolver sl sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución.

Procedemos del mismo modo que en los ejercicios anteriores.

(a) En forma matricial,

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{array}\right).$$

$|A^*| = 9a^3 - 9a^2 = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1.$

- Si $a = 0$:

  $|A^*| = 0 \Rightarrow rango(A^*) < 4.$

  $$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 6 & -8 \end{array}\right).$$

  $rango(A^*) = 2 = rango(A) <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $a = 1$:

  $|A^*| = 0 \Longrightarrow rango(A^*) < 4$.

  $$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \\ 4 & 2 & 7 & -11 \end{array}\right).$$

  $rango(A^*) = 3 = rango(A) =$ número de incógnitas $= 3 \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$:

  $|A^*| \neq 0 \Longrightarrow rango(A^*) = 4$ pero el rango máximo de A es 3, luego es un sistema incompatible.

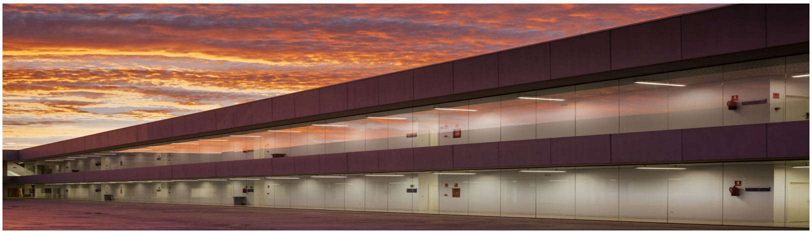
(b) Para $a = 1$ era sistema compatible determinado. Resolvemos con el método de Gauss (Cramer no porque el número de ecuaciones es distinto al número de incógnitas).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \\ 4 & 2 & 7 & -11 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-1}, F_{41}^{-4}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -9 \\ 0 & -6 & 3 & -15 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-2}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \overset{F_{43}^{-1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x + 2y + z & = & 1 \\ -3y + z & = & -6 \\ z & = & -3 \end{array}\right\} \Longrightarrow z = -3, y = 1, x = 2.$$

■



Capítulo 3

Espacios vectoriales

Índice

3.1 Definición de un espacio vectorial

Problema 3.1.1. *Sean las operaciones de* $\mathbb{R}^2$ *definidas por*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y' + 1),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Estudiar si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

Solución.
Para demostrarlo vamos a ver si el espacio vectorial con la operación suma es un grupo. Para que el espacio vectorial sea un grupo, la operación + tiene que verificar ser asociativa, tener elemento neutro y que todos sus elementos tengan elemento inverso.

- Asociativa:

  Sean $u = (a, b)$, $v = (c, d)$, $w = (e, f) \in \mathbb{R}^2$.

  $(u+v)+w = ((a, b)+(c, d))+(e, f) = (a+c, b+d+1)+(e, f) = (a+c+e, b+d+1+f+1) = (a+c+e, b+d+f+2)$.

  $u+(v+w) = (a, b)+((c, d)+(e, f)) = (a, b)+(c+e, d+f+1) = (a+c+e, b+d+f+1+1) = (a+c+e, b+d+f+2)$.

  Como $(u + v) + w = u + (v + w)$, se cumple la propiedad asociativa.

- Elemento neutro:

  Sean $u = (a, b)$, $e = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

  Debe cumplirse $u + e = e + u = u$.

  $u + e = (a, b) + (x, y) = (a + x, b + y + 1)$.

  $e+u = (x, y)+(a, b) = (x+a, y+b+1) = (a+x, b+y+1)$.

  Este último paso se puede realizar ya que la suma de números reales es conmutativa y $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

  Vemos cuánto debe valer (x, y).

  $u + e = u \Rightarrow (a + x, b + y + 1) = (a, b)$.

  Entonces, obtenemos las 2 siguientes ecuaciones:

  $a + x = a \Rightarrow x = 0$,

$b + y + 1 = b \Rightarrow y = -1.$

El elemento neutro es $e = (0, -1)$.

- Elemento inverso:

  Sean $u = (a, b)$, $e = (0, -1) \in V$.

  Hay que verificar que para todo $u \in \mathbb{R}^2$, existe u' tal que $u + u' = u' + u = e$.

  $u + u' = e \Rightarrow u' = e - u = e + (-a, -b) = (-a, -b)$.

  $u + u' = (a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b + 1) = (0, 1) \neq e = (0, -1)$.

  Por lo tanto, no tiene elemento inverso, por lo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ no es $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

■

Problema 3.1.2. *Sean las operaciones de $\mathbb{R}^2$ definidas por*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Estudiar si $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución.
Para demostrarlo vamos a ver si el espacio vectorial con la operación producto por escalar verifica ser distributiva respecto a la suma de vectores, distributiva respecto a la suma de escalares, asociativa con escalares y tener elemento unidad.

- Distributiva respecto a la suma de vectores:

  Sean $u = (a, b)$, $v = (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $\alpha(u + v) = \alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c + 1, b + d + 1) = (\alpha a + \alpha c + \alpha, \alpha b + \alpha d + \alpha)$.

  $\alpha u + \alpha v = \alpha(a, b) + \alpha(c, d) = (\alpha a, \alpha b) + (\alpha c + \alpha d) = (\alpha a + \alpha c + 1, \alpha b + \alpha d + 1)$.

  Como $\alpha(u + v) \neq \alpha u + \alpha v$, no se cumple la propiedad distributiva respecto a la suma de vectores.

  Por lo tanto, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ no es $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

■

3.2 Independencia lineal de vectores

Problema 3.2.1. *Sea* $V = \{(-1, 0, 2), (1, 1, 0), (-10, -17, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. *Estudiar si el vector* $(5, -2, 3)$ *pertenece a la variedad lineal generada por los vectores de* V.

Solución.

Para ver si $(5, -2, 3)$ pertenece a la variedad lineal, tenemos que ver si puede ser generado por los vectores de V, es decir, si podemos expresar el vector como combinación lineal de los vectores de V.

Vemos si existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tales que

$$(5, -2, 3) = \lambda_1(-1, 0, 2) + \lambda_2(1, 1, 0) + \lambda_3(-10, -17, 1).$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\lambda_1+\lambda_2-10\lambda_3 & = & 5 \\ \lambda_2-17\lambda_3 & = & -2 \\ 2\lambda_1+\lambda_3 & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & -17 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{31}^{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & -17 & -2 \\ 0 & 2 & -19 & 13 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{-2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -10 & 5 \\ 0 & 1 & -17 & -2 \\ 0 & 0 & 15 & 17 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -\lambda_1+\lambda_2-10\lambda_3 & = & 5 \\ \lambda_2-17\lambda_3 & = & -2 \\ 15\lambda_3 & = & 17 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_3 = \tfrac{17}{15}, \lambda_2 = \tfrac{259}{15}, \lambda_1 = \tfrac{14}{15}.$$

Vemos que existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, luego $(5, -2, 3)$ pertenece a la variedad lineal.
Para comprobarlo, también es suficiente con ver que el sistema es compatible, sin necesidad de calcular los valores de los λ.

■

Problema 3.2.2. *Calcular el valor de α para el cual los vectores de $\mathbb{R}^4$*

$$a = (\alpha, -1, 0, 1), \quad b = (0, \alpha, -1, 1), \quad c = (1, 0, -1, 2),$$

son linealmente dependientes.

Solución.
Son linealmente independientes si $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ si y solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Formamos el sistema
$\lambda_1(\alpha, -1, 0, 1)+\lambda_2(0, \alpha, -1, 1)+\lambda_3(1, 0, -1, 2) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$
$(\lambda_1\alpha, -\lambda_1, 0, \lambda_1)+(0, \lambda_2\alpha, -\lambda_2, \lambda_2)+(\lambda_3, 0, -\lambda_3, 2\lambda_3) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1\alpha+\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2\alpha & = & 0 \\ -\lambda_2-\lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, para que sean linealmente dependientes, el sistema debe ser compatible indeterminado, de forma que la solución trivial no es la única solución. Estudiamos el sistema en función de α. Recordamos que en un sistema homogéneo $rango(A) = rango(A^*)$.

$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A), rango(A^*) \geq 2.$

$\begin{vmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1.$

El otro posible determinante 3×3 es

$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1.$

Luego, si $\alpha = 1$, $rango(A) = rango(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
Por lo tanto, α debe ser 1.

■

Problema 3.2.3. *Sean los vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (-1, 0, 4, 1), \quad u_2 = (3, -2, 0, 2),$$

$$u_3 = (2, \alpha, -2, 0), \quad u_4 = (2, -3, -2, 3).$$

Calcular el valor de α para que u_4 sea combinación lineal de u_1, u_2, u_3.

Solución.

Para que u_4 sea combinación lineal, deben existir $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tal que $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.
$(2, -3, -2, 3) = (-\lambda_1, 0, 4\lambda_1, \lambda_1) + (3\lambda_2, -2\lambda_2, 0, 2\lambda_2) +$
$(2\lambda_3, \alpha\lambda_3, -2\lambda_3, 0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2 & = & -\lambda_1+3\lambda_2+2\lambda_3 \\ -3 & = & -2\lambda_2+\alpha\lambda_3 \\ -2 & = & 4\lambda_1-2\lambda_3 \\ 3 & = & \lambda_1+2\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & \alpha & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Para que existan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, el sistema debe ser compatible, es decir,
$rango(A) = rango(A^*)$.
Como el rango máximo de A^* es 4 y el de A es 3, $|A^*|$ debe ser 0.
Discutamos el sistema en función de α.
$|A^*| = 30\alpha + 18 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{5}$.
Si $\alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow |A^*| = 0 \Rightarrow rango(A^*) < 4$.
$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{5} & -3 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) =$
$3 =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.
No puede ocurrir que $\alpha \neq -\frac{3}{5}$ porque entonces $|A^*| \neq 0$ y $rango(A^*) = 4$, cuando el máximo rango de A es 3. Luego, sería un sistema incompatible.
Por lo tanto, $\alpha = -\frac{3}{5}$.

■

Problema 3.2.4. *Sea el espacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$.

(a) *Estudiar si los vectores*

$$u_1 = (1,3,5), \quad u_2 = (-1,0,2), \quad u_3 = (3,3,1)$$

son linealmente dependientes o independientes.

(b) *Sean los vectores $v = (1, 0, 1)$, $w = (1, 0, -1)$ y V la variedad lineal generada por ellos. Estudiar si los vectores $p = (1, 0, 5)$ y $q = (1, 1, 0)$ pertenecen a V.*

Solución.

(a) Son linealmente independientes si la igualdad $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ únicamente se verifica para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En caso contrario, son linealmente dependientes.

$\lambda_1(1, 3, 5) + \lambda_2(-1, 0, 2) + \lambda_3(3, 3, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$(\lambda_1, 3\lambda_1, 5\lambda_1) + (-\lambda_2, 0, 2\lambda_2) + (3\lambda_3, 3\lambda_3, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$(\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + 3\lambda_3, 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_3 & = & 0 \\ 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Debe ser sistema compatible determinado para que únicamente exista la solución trivial y sean linealmente independientes. En caso contrario, son linealmente dependientes. Recordamos que en un sistema homogéneo $rango(A) = rango(A^*)$.

$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) < 3$.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rango(A) = rango(A^*) = 2 <$ número de incógnitas $= 3 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Por lo tanto, la igualdad se verifica no solo para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$. Entonces, son linealmente dependientes.

También se podría haber hecho este apartado formando una matriz con los 3 vectores y si el rango es máximo (en este caso 3), los vectores son linealmente independientes. Sino, no.

(b) Para ver si pertenecen a V, vemos si se pueden generar por combinación lineal de los vectores de V.

- $p = (1, 0, 5)$:

Deben existir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : p = \lambda_1 v + \lambda_2 w$.

$(1,0,5) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,0,-1) \Rightarrow (1,0,5) = (\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_1 - \lambda_2) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & = & 0 \\ 5 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2.$$

Vemos que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, por lo que $p \in V$.

- $q = (1,1,0)$:

  Deben existir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : q = \lambda_1 v + \lambda_2 w$.

  $(1,1,0) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(1,0,-1) \Rightarrow (1,1,0) = (\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_1 - \lambda_2) \Rightarrow$

  $$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 & = & 0 \\ 0 & = & \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\}.$$

  Como la segunda ecuación no tiene sentido, no existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $q = \lambda_1 v + \lambda_2 w$, por lo que $q \notin V$.

■

Problema 3.2.5. *Sean los vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1,-2,1,3), \quad u_2 = (2,-4,0,2),$$

$$u_3 = (3,-6,1,5), \quad u_4 = (2,-4,-4,-6).$$

Calcular una base de la variedad lineal generada por ellos.

Solución.

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ forman un sistema generador de la variedad lineal
$Q =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$.
Para obtener la base, vemos cuáles de ellos son linealmente independientes. Para ello, formamos una matriz y los vectores asociados al menor principal son los linealmente independientes y, por lo tanto, la base de la variedad lineal Q.
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -6 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.
De las filas 1 y 2 obtenemos el determinante
$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow rango(A) \geq 2$.
No es posible encontrar un menor 3×3 de este que sea distinto de 0, luego, $rango(A) = 2$ y como son las filas 1 y 2 las asociadas a este menor principal, los vectores u_1 y u_2 son linealmente independientes.
Por lo tanto, la base de la variedad lineal Q es
$B_Q = \{u_1, u_2\} = \{(1, -2, 1, 3), (2, -4, 0, 2)\}$.

■

Problema 3.2.6. *Determinar, según los valores de α y β, si los vectores de $\mathbb{R}^4$*

$$\{(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, \beta), (4, 1, 2, \alpha)\}$$

son linealmente dependientes o independientes.

Solución.
Formamos la matriz A con los vectores y, en función de si A tiene rango máximo o no, vemos si son linealmente independientes o dependientes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & \beta \\ 4 & 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

$|A| = 4\alpha + 4\beta + 140 = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta - 35, \beta \in \mathbb{R}$.
Luego, si $\alpha = -\beta - 35$, $\beta \in \mathbb{R}$, $|A| = 0$, por lo que los vectores son linealmente dependientes. En cambio, si $\alpha \neq -\beta - 35, \beta \in \mathbb{R}$, $|A| \neq 0$, por lo que los vectores son linealmente independientes.

■

Problema 3.2.7. *Determinar a y b para que el conjunto*

$$B = \{(1, -1, -3, 1), (a, -1, 1, -1), (2, -b, 1, -2), (1, 1, -b, 1)\}$$

forme una base de $\mathbb{R}^4$.

Solución.
Para que formen una base, deben de ser sistema generador de $\mathbb{R}^4$ y linealmente independientes. Como en este caso tenemos 4 vectores y un espacio vectorial de dimensión 4, podemos usar el siguiente corolario:
Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces, dado un conjunto de exactamente n vectores, son equivalentes que sean linealmente independientes, sistema generador de V y base de V.
Por lo tanto, con hallar a y b para que sean linealmente independientes es suficiente. Para que sean linealmente independientes, el rango de la matriz que forman debe ser máximo, en este caso 4. Luego, el determinante de la matriz que forman debe ser distinto de 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ a & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -b & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -b & 1 \end{vmatrix} = -4a - ab^2 - b^2 + ab + 9b - 12 = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow}$$
$-4a - ab^2 - b^2 + ab + 9b - 12 - (-b^2 + 9b) = 0 - (-b^2 + 9b) \Rightarrow$
$-4a - ab^2 + ab - 12 = -(-b^2 + 9b) \Rightarrow$
$-4a - ab^2 + ab = b^2 - 9b + 12 \Rightarrow$
$a(-4 - b^2 + b) = b^2 - 9b + 12 \Rightarrow a = \frac{b^2-9b+12}{-4-b^2+b}, b \in \mathbb{R}.$
Por lo tanto, para que el determinante sea distinto de 0 y los vectores sean linealmente independientes y formen base se debe de cumplir $a \neq \frac{b^2-9b+12}{-4-b^2+b}, b \in \mathbb{R}$.
(*) Restamos en ambos miembros de la ecuación $(-b^2 + 9b)$.

■

Problema 3.2.8. *Se consideran los vectores de* $\mathbb{R}^3$

$$u = (-1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 0), \quad w = (-10, -7, 3).$$

(a) Determinar cuales de ellos son linealmente independientes.

(b) Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ *que contenga a los vectores que son linealmente independientes.*

Solución.
(a) Vemos el rango de la matriz que forman. Los linealmente independientes son aquellos asociados al menor principal.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -10 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$
$|A| = 0 \Rightarrow rango(A) < 3.$

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$
Luego, los vectores linealmente independientes son u y v.

(b) Para una base de $\mathbb{R}^3$ necesitamos 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ y, como en este caso, $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial de dimensión 3, sabemos por el corolario anterior que es equivalente que sean linealmente independientes a que sean sistema generador de V y base de V. Por lo tanto, con tener 3 vectores linealmente independientes es suficiente para afirmar que esos 3 vectores son base de $\mathbb{R}^3$. Tenemos 2 de ellos. Buscamos un tercero que haga que el determinante que forman sea distinto de 0.
Sea $q = (a, b, c)$ el tercer vector que buscamos.
$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a + b - c = 0 \Rightarrow b = \alpha, c = \beta, a = \alpha - \beta,$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Para que el determinante sea distinto de 0 y, por lo tanto, los 3 vectores sean linealmente independientes, basta con darle unos valores a a, b, c que no cumplan las soluciones calculadas. Por ejemplo, $b = 3, c = 4, a = 2$.
Por lo tanto, una base es $B = \{(-1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 3, 4)\}$.

■

3.3 Cambios de base y coordenadas

Problema 3.3.1. *Sean los conjuntos de vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$A = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 2, 1, 0), (1, 3, 3, 1)\},$$

$$B = \{(2, 0, 0, 0), (-2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

(a) *Demostrar que A y B forman bases de* $\mathbb{R}^4$.

(b) *Calcular las coordenadas de cada vector de una base respecto de la otra.*

(c) *Calcular las coordenadas del vector* $x = (-4, -4, 1, 2)$ *respecto de ambas bases.*

Solución.

(a) Como estamos en $\mathbb{R}^4$ y tenemos 4 vectores en A y 4 en B, por el corolario anterior, es equivalente que sean linealmente independientes a que sean sistema generador de $\mathbb{R}^4$ y base de $\mathbb{R}^4$.

Vemos entonces si son linealmente independientes y, si lo son, forman base de $\mathbb{R}^4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

luego $|A| = 1 \neq 0$, de donde $rango(A) = 4 = rango_{max}(A)$.

Los vectores de A son linealmente independientes, luego, por el corolario anterior, forman una base de $\mathbb{R}^4$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 2 \neq 0 \Rightarrow rango(B) = 4 = rango_{max}(B).$$

Los vectores de B son linealmente independientes, luego, por el corolario anterior, forman una base de $\mathbb{R}^4$.

Por lo tanto, los vectores de A y B forman 2 bases de $\mathbb{R}^4$.

(b) Para expresar un vector v respecto a una base B, expresamos v como combinación lineal de los vectores de B. Los coeficientes de v en la base B son las coordenadas de v en dicha base.

Calculamos las coordenadas de cada vector de A respecto de B.

$$(1,0,0,0) = \lambda_1(2,0,0,0) + \lambda_2(-2,1,0,0) + \lambda_3(1,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 & = & \lambda_2 \\ 0 & = & \lambda_3 \\ 0 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{1}{2}, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \text{ luego,}$$

$(1,0,0,0) = (\frac{1}{2},0,0,0)_B$.

$$(1,1,0,0) = \lambda_1(2,0,0,0) + \lambda_2(-2,1,0,0) + \lambda_3(1,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 & = & \lambda_2 \\ 0 & = & \lambda_3 \\ 0 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{3}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \text{ luego,}$$

$(1,1,0,0) = (\frac{3}{2},1,0,0)_B$.

$$(1,2,1,0) = \lambda_1(2,0,0,0) + \lambda_2(-2,1,0,0) + \lambda_3(1,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 2 & = & \lambda_2 \\ 1 & = & \lambda_3 \\ 0 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 =$$

0, luego, $(1,2,1,0) = (2,2,1,0)_B$.

$$(1,3,3,1) = \lambda_1(2,0,0,0) + \lambda_2(-2,1,0,0) + \lambda_3(1,0,1,0) + \lambda_4(0,0,0,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 3 & = & \lambda_2 \\ 3 & = & \lambda_3 \\ 1 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 1 \Rightarrow$$

$(1, 3, 3, 1) = (2, 3, 3, 1)_B$.
Las coordenadas de cada vector de A respecto de B son
$\{(\frac{1}{2}, 0, 0, 0), (\frac{3}{2}, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 0), (2, 3, 3, 1)\}$.

(c) Hacemos el mismo procedimiento que en el apartado anterior.

- Respecto de A:

$$(-4, -4, 1, 2) = \lambda_1(1, 0, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, 0, 0) + \lambda_3(1, 2, 1, 0) + \lambda_4(1, 3, 3, 1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -4 & = & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ -4 & = & \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 \\ 1 & = & \lambda_3 + 3\lambda_4 \\ 2 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 =$$

$-5, \lambda_4 = 2 \Rightarrow x = (-1, 0, -5, 2)_A$.

- Respecto de B:

$$(-4, -4, 1, 2) = \lambda_1(2, 0, 0, 0) + \lambda_2(-2, 1, 0, 0) + \lambda_3(1, 0, 1, 0) + \lambda_4(0, 0, 0, 1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} -4 & = & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -4 & = & \lambda_2 \\ 1 & = & \lambda_3 \\ 2 & = & \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{13}{2}, \lambda_2 = -4, \lambda_3 =$$

$1, \lambda_4 = 2 \Rightarrow x = (-\frac{13}{2}, -4, 1, 2)_B$.

■

Problema 3.3.2. *Se consideran los vectores de* $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1,0,-1,2), \quad u_2 = (0,1,1,2), \quad u_3 = (1,1,0,4),$$

$$u_4 = (2,-1,-1,6), \quad u_5 = (1,-1,-2,-4).$$

(a) Determinar cuales de ellos forman una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Calcular las coordenadas de los restantes vectores respecto a la base obtenida anteriormente.

Solución.
(a) $\mathbb{R}^4$ tiene dimensión 4 (ya que la base canónica $B_c\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ siempre es base y sabemos que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal), luego, la base solo puede estar formada por 4 vectores.
Basándonos en el corolario anterior, un espacio vectorial V de dimensión n, dado un conjunto de exactamente n vectores $S = \{v_1,\ldots,v_n\}$, son equivalentes: S son linealmente independientes; S es sistema generador de V; S es base de V; los vectores que son linealmente independientes son los que forman una base de $\mathbb{R}^4$.
Para ello, formamos una matriz con los vectores y, los asociados al menor principal de orden 4, son los linealmente independientes,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ es distinto de 0, luego, u_1, u_2, u_3, u_4 son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Calculamos u_5 respecto de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Lo hacemos del mismo modo que en el ejercicio anterior.
$(1, -1, -2, -4) = \lambda_1(1, 0, -1, 2) + \lambda_2(0, 1, 1, 2) + \lambda_3(1, 1, 0, 4)$ $+ \lambda_4(2, -1, -1, 6) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 1 & = & \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ -1 & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -2 & = & -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 \\ -4 & = & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 6\lambda_4 \end{array}\right\}.$$

Formamos la matriz y resolvemos.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & -4 \end{array}\right) \underset{F_{41}^{-2}}{\overset{F_{31}^{1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-2}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \overset{F_{43}^{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$rango(A) \neq rango(A^*) \Rightarrow$ Sistema incompatible.
Por lo tanto, no tiene solución y no podemos expresar u_5 respecto de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. ■

Problema 3.3.3. *Sea* $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *una base de* $\mathbb{R}^4$. *Se consideran las bases* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *y* $B_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$*,* *tales que*

$$\begin{array}{ll} v_1 = u_2 + 3u_4, & w_1 = 2u_1 - 2u_2 + u_4, \\ v_2 = -u_1 + u_2, & w_2 = u_1 + u_2 + u_3, \\ v_3 = -2u_1 - u_3 + 2u_4, & w_3 = 3u_1 + u_3 - u_4, \\ v_4 = -u_1 - u_2 - u_3 + u_4, & w_4 = -2u_2 - u_3 + u_4. \end{array}$$

(a) Demostrar que B_1 y B_2 son bases de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

(c) Determinar las coordenadas respecto de B_1 del vector cuyas coordenadas respecto de B_2 son $(2, 1, 0, -1)$.

Solución.
(a) En primer lugar, hallamos las coordenadas de los vectores de B_1 y B_2 que, como nos los dan como combinación lineal de B, los vectores de B_1 y B_2 están expresados respecto de B.
$B_1 = \{(0, 1, 0, 3), (-1, 1, 0, 0), (-2, 0, -1, 2), (-1, -1, -1, 1)\}$
$B_2 = \{(2, -2, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (3, 0, 1, -1), (0, -2, -1, 1)\}$
Para demostrar que son bases, como estamos en $\mathbb{R}^4$ y B_1, B_2 están formados por 4 vectores, usando el corolario mencionado en los ejercicios anteriores, vamos a demostrar que son linealmente independientes los vectores de cada conjunto y, con eso, demostramos también que son base de $\mathbb{R}^4$.

- B_1:

  $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B_1| \neq 0 \Rightarrow rango(B_1) =$ 4.

  Por lo tanto, son linealmente independientes y los vectores de B_1 forman una base de $\mathbb{R}^4$.

- B_2:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B_2| \neq 0 \Rightarrow rango(B_2) = 4.$$

Por lo tanto, son linealmente independientes y los vectores de B_2 forman una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) La matriz de cambio de base de B_1 a B_2 es escribir los vectores de B_1 en función de B_2 como columnas. Calculamos las coordenadas de los vectores de B_1 respecto a B_2.

- $(0,1,0,3) = \lambda_1(2,-2,0,1)+\lambda_2(1,1,1,0)+\lambda_3(3,0,1,-1) + \lambda_4(0,-2,-1,1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 0 & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 1 & = & -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 \\ 0 & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ 3 & = & \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{14}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{41}^{-2}}{\overset{F_{21}^{2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{F_{42}^{-1}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -13 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{43}^{-\frac{7}{3}}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{10}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 & = & 3 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 7 \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 & = & -7 \\ \frac{1}{3}\lambda_4 & = & \frac{10}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lambda_4 = 10, \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 9, \lambda_1 = -6 \Rightarrow$
$(0, 1, 0, 3) = (-6, 9, 1, 10)_{B_2}$.

- $(-1, 1, 0, 0) = \lambda_1(2, -2, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \lambda_3(3, 0, 1, -1) + \lambda_4(0, -2, -1, 1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} -1 & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 1 & = & -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 \\ 0 & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ 0 & = & \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{14}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{41}^{-2}}{\overset{F_{21}^{2}}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{-1}}{\underset{F_{42}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

$$\overset{F_{43}^{-\frac{7}{3}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 1 \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 & = & -1 \\ \frac{1}{3}\lambda_4 & = & \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\lambda_4 = 1, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_1 = -1 \Rightarrow$
$(-1, 1, 0, 0) = (-1, 1, 0, 1)_{B_2}$.

- $(-2, 0, -1, 2) = \lambda_1(2, -2, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \lambda_3(3, 0, 1, -1) + \lambda_4(0, -2, -1, 1) \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{rcr} -2 & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 0 & = & -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 \\ -1 & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ 2 & = & \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\overset{F_{14}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\underset{F_{41}^{-2}}{\overset{F_{21}^{2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-1}}{\overset{F_{32}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -8 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{43}^{-\frac{7}{3}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 & = & 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 4 \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 & = & -5 \\ \frac{1}{3}\lambda_4 & = & \frac{11}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lambda_4 = 11, \lambda_3 = 2, \lambda_2 = 8, \lambda_1 = -7 \Rightarrow$
$(-2, 0, -1, 2) = (-7, 8, 2, 11)_{B_2}$.

- $(-1, -1, -1, 1) = \lambda_1(2, -2, 0, 1) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \lambda_3(3, 0, 1, -1) + \lambda_4(0, -2, -1, 1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} -1 & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -1 & = & -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_4 \\ -1 & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ 1 & = & \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{14}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{41}^{-2}}{\underset{\sim}{F_{21}^{2}}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-1}}{\underset{\sim}{F_{32}^{-1}}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_{43}^{-\frac{7}{3}}}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 & = & 1 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 & = & 1 \\ 3\lambda_3 - \lambda_4 & = & -2 \\ \frac{1}{3}\lambda_4 & = & \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_4 = 2, \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_1 = -1 \Rightarrow$$
$$(-1, -1, -1, 1) = (-1, 1, 0, 2)_{B_2}.$$

Por lo tanto, la matriz de cambio de base es

$$M_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -7 & -1 \\ 9 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 10 & 1 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Para ello, como en el apartado anterior hemos hallado $M_{B_1 \to B_2}$, la $M_{B_2 \to B_1}$ es la inversa y hacemos uso de ella.

$$M_{B_2\to B_1} = (M_{B_1\to B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{7}{5} & -1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$M_{B_2\to B_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{18}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -\frac{7}{5} \end{pmatrix}_{B_1}.$$

Entonces, el vector respecto a B_1 es $(\frac{6}{5}, -\frac{18}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{7}{5})$.

■

Problema 3.3.4. *Sean $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Se considera un vector $x \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas respecto de B son $(1, -1, 2)$. Sabiendo que*

$$\begin{cases} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_1 - v_2 \\ u_3 &= v_1 - v_2 - v_3 \end{cases}$$

Calcular las coordenadas de x respecto de B'.

Solución.

Sabemos que $x = (1, -1, 2)_B$ y con el sistema, tenemos los vectores de B respecto a B' (ya que nos dan la expresión de los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B'), que es

$$B_{B'} = \{(1, 0, 0), (1, -1, 0), (1, -1, -1)\}_{B'}.$$

Con $B_{B'}$, podemos hallar la matriz de cambio de base $M_{B\to B'}$ y como tenemos x respecto a B, para hallarlo respecto a B' lo multiplicamos por $M_{B\to B'}$.

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$x_{B'} = M_{B\to B'} \cdot x_B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x_{B'} = (2, -1, -2)_{B'}$.

■

Problema 3.3.5. *Sean* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *y* $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$ *tales que*

$$\begin{cases} u_1 &=& v_1 + 5v_2 - v_3 \\ u_2 &=& \alpha v_1 - 2v_2 + 3v_3 \\ u_3 &=& -5v_1 + v_2 + v_3 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R}^3$ *tiene por coordenadas respecto de* B *y* B' $(-2, 1, 3)$, $(-9, -9, 8)$, *respectivamente. Calcular el valor de* α.

Solución.
Del enunciado extraemos que, a partir del sistema, nos dan las coordenadas de los vectores de B respecto a B' (ya que nos dan la expresión de los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B').
$B_{B'} = \{(1, 5, -1), (\alpha, -2, 3), (-5, 1, 1)\}_{B'}$.
También tenemos que
$x_B = (-2, 1, 3), x_{B'} = (-9, -9, 8)$.
Con $B_{B'}$ podemos hallar la matriz de cambio de base $M_{B\to B'}$. A partir de ella y $x_B, x_{B'}$, usamos la igualdad $M_{B\to B'} \cdot x_B = x_{B'}$ para calcular α.

$$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}_{B'} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha - 17 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Para que 2 matrices sean iguales, cada elemento tiene que ser igual a su correspondiente, luego, $\alpha - 17 = -9 \Rightarrow \alpha = 8$.

■

Problema 3.3.6. *Sean $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ tales que*

$$\begin{cases} u_1 &= 2v_1 + v_2 - v_3 \\ u_2 &= 5v_1 - v_2 + v_3 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R}^3$ tiene por coordenadas respecto de B y B' $(1, -1, 1)$, $(2, 3, 0)$, respectivamente. Determinar la matriz de cambio de base de B a B'.

Solución.

Del enunciado tenemos que, a partir del sistema, nos dan las coordenadas de 2 de los 3 vectores de B, respecto a B' (ya que nos dan la expresión de los vectores de B como combinación lineal de los vectores de B').

$B_{B'} = \{(2, 1, -1), (5, -1, 1), (a, b, c)\}_{B'}$.

También nos dan

$x_B = (1, -1, 1), \quad x_{B'} = (2, 3, 0)$.

Para hallar la matriz de cambio de base de B a B' ($M_{B\to B'}$), necesitamos los vectores de B respecto a B'. Tenemos 2 y nos falta u_3. Para calcularlo, usamos la igualdad $M_{B\to B'} \cdot x_B = x_{B'}$.

$M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-3 \\ b+2 \\ c-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para que 2 matrices sean iguales, cada elemento debe ser igual a su correspondiente.

$$\left.\begin{array}{rcl} a-3 & = & 2 \\ b+2 & = & 3 \\ c-2 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 5, b = 1, c = 2.$$

$$u_3 = (5, 1, 2)_{B'} \Rightarrow M_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

3.4 Ecuaciones paramétricas e implícitas de subespacios vectoriales

Problema 3.4.1. *Sea* $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$ *un subconjunto del espacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

(a) Demostrar que H *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar en H *tres vectores* u, v, w *linealmente independientes y probar que todo vector de* H *se puede expresar como combinación lineal de* u, v, w.

Solución.

(a) Para demostrar que es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, usamos la caracterización de un subespacio vectorial.

- $H \neq \emptyset$:

  $H \neq \emptyset$ ya que el vector $(0, 0, 0, 0) \in H$ (porque sus coordenadas cumplen que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

- Para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para todo $u, v \in H \Rightarrow \lambda u + \mu v \in H$:

  Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y sean $u, v \in H$.

  Entonces $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ satisface $u_1+u_2+u_3+u_4 = 0$ y $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ satisface $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

  $\lambda u+\mu v = \lambda(u_1, u_2, u_3, u_4)+\mu(v_1, v_2, v_3, v_4) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \lambda u_4)+ (\mu v_1, \mu v_2, \mu v_3, \mu v_4) = (\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2, \lambda u_3+\mu v_3, \lambda u_4+ \mu v_4)$.

  Para que $\lambda u + \mu v \in H$, se tiene que cumplir que la suma de sus coordenadas sea 0.

  $(\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2) + (\lambda u_3 + \mu v_3) + (\lambda u_4 + \mu v_4) = \lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \lambda u_4 + \mu v_1 + \mu v_2 + \mu v_3 + \mu v_4 = \lambda(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + \mu(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0$.

  Y eso es 0 ya que antes vimos que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ y que $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

Como cumple las 2 condiciones de la caracterización, H es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Al pedirnos vectores de H linealmente independientes y que todo vector de H se pueda expresar como combinación lineal de ellos (sistema generador), nos están pidiendo una base de H. Para hallar una base de H, primero hallamos un sistema generador de H y luego nos quedamos con los linealmente independientes.

Sea un vector $k = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in H$, entonces $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.
Los vectores que pertenecen a H son aquellos cuyas coordenadas son las soluciones de la ecuación $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$. Entonces, hallamos las soluciones a esa ecuación. Como tenemos una ecuación y 4 incógnitas, necesitamos 3 parámetros.

$$\left.\begin{array}{rcr} k_1 & = & \lambda_1 \\ k_2 & = & \lambda_2 \\ k_3 & = & \lambda_3 \\ k_4 & = & -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \end{array}\right\}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} k = (k_1, k_2, k_3, k_4) &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) \\ &= (\lambda_1, 0, 0, -\lambda_1) + (0, \lambda_2, 0, -\lambda_2) \\ &+ (0, 0, \lambda_3, -\lambda_3) \\ &= \lambda_1(1, 0, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) \\ &+ \lambda_3(0, 0, 1, -1). \end{aligned}$$

Como cualquier vector perteneciente a H (en este caso k es un vector cualquiera que pertenece a H), se puede expresar como combinación lineal de $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$, estos 3 vectores son sistema generador de H.
Para que formen una base, nos quedamos con los linealmente independientes.
Como $rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$, entonces los 3 vectores son linealmente independientes.
Por lo tanto, $B_H = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ ya que hemos visto que son 3 vectores linealmente independientes y que todo vector de H se puede expresar como combinación lineal de ellos.

■

Problema 3.4.2. *Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Se consideran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ generados por*

$$L_1 = L(v_1, v_2, v_3, v_4), \quad L_2 = (w_1, w_2, w_3, w_4),$$

donde

$$\begin{array}{ll} v_1 = 4u_1 - 5u_2 + 2u_3 + 6u_4 & w_1 = u_1 + 2u_2 - 6u_3 - 3u_4 \\ v_2 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 + 3u_4 & w_2 = -u_1 - 4u_3 + 5u_4 \\ v_3 = 6u_1 - 3u_2 + 3u_3 + 9u_4 & w_3 = 3u_1 + 4u_2 - 8u_3 - u_4 \\ v_4 = 4u_1 - u_2 + 5u_3 + 6u_4 & w_4 = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 6u_4 \end{array}$$

(a) Determinar una base y la dimensión de cada uno de los subespacios vectoriales.

(b) Expresar los restantes vectores que generan el subespacio como combinación lineal de la base obtenida.

Solución.
En el enunciado, nos dan los vectores de L_1 y L_2 expresados como combinación lineal de los vectores de B. Por lo tanto, nos están dando las coordenadas de L_1 y L_2 respecto a B.
$L_1 = \{(4, -5, 2, 6), (2, -2, 1, 3), (6, -3, 3, 9), (4, -1, 5, 6)\}$,
$L_2 = \{(1, 2, -6, -3), (-1, 0, -4, 5), (3, 4, -8, -1), (2, 1, 3, 6)\}$.

(a) Como son sistema generador de los subespacios que generan, basta con ver cuáles son linealmente independientes para hallar cuáles forman una base de su subespacio.

- $L_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

  $|L_1| = 0$.

  El menor principal distinto de 0 es $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$, luego, v_1, v_2, v_4 son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base del subespacio generado por L_1.

  $B_{L_1} = \{v_1, v_2, v_4\}$ y como son 3 vectores los que forman la base del subespacio, la dimensión del subespacio es 3.

- $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & -3 \\ -1 & 0 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & -8 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

  $|L_2| = 0$.

  El menor principal distinto de 0 es $\begin{vmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 4 & -8 & -1 \end{vmatrix}$, luego, w_1, w_2, w_3 son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base del subespacio generado por L_2.

  $B_{L_2} = \{w_1, w_2, w_3\}$ y como son 3 vectores los que forman la base del subespacio, la dimensión del subespacio es 3.

(b)

- En L_1, el vector restante es v_3. Lo expresamos como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_4,

$(6,-3,3,9) = \lambda_1(4,-5,2,6) + \lambda_2(2,-2,1,3)$
$+\lambda_3(4,-1,5,6) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 6 & = & 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -3 & = & -5\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 3 & = & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \\ 9 & = & 6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & 6 \\ -5 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_1^{\frac{1}{4}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ -5 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{31}^{-2}, F_{41}^{-6}}{\overset{F_{21}^{5}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_3 & = & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda_2 + 4\lambda_3 & = & \frac{9}{2} \\ 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lambda_3 = 0, \lambda_2 = 9, \lambda_1 = -3 \Rightarrow v_3 = -3v_1 + 9v_2 + 0v_4.$

- En L_2, el vector restante es w_4. Lo expresamos como combinación lineal de los vectores w_1, w_2, w_3,

  $(2,1,3,6) = \lambda_1(1,2,-6,-3) + \lambda_2(-1,0,-4,5)$
  $+\lambda_3(3,4,-8,-1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcr} 2 & = & \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 1 & = & 2\lambda_1 + 4\lambda_3 \\ 3 & = & -6\lambda_1 - 4\lambda_2 - 8\lambda_3 \\ 6 & = & -3\lambda_1 + 5\lambda_2 - \lambda_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ -6 & -4 & -8 & 3 \\ -3 & 5 & -1 & 6 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{6}, F_{41}^{3}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -10 & 10 & 15 \\ 0 & 2 & 8 & 12 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_{42}^{-1}}{\overset{F_{32}^{5}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcr} \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 & = & 2 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & -3 \\ 10\lambda_3 & = & 15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_3 = \tfrac{3}{2}, \lambda_2 = 0, \lambda_1 = -\tfrac{5}{2} \Rightarrow w_4 = -\tfrac{5}{2}w_1 + 0w_2 + \tfrac{3}{2}w_3.$$

■

Problema 3.4.3. *Sean U, V, W subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ definidos por*

$$U = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$$

Determinar las ecuaciones paramétricas y unas bases de U, V, W.

Solución.

Para las ecuaciones paramétricas, necesitamos la base de cada subespacio.

- U:

Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in U \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$. Entonces, los vectores de U son aquellos cuyas coordenadas son las soluciones de esa ecuación.

$$\left.\begin{array}{rcr} u_1 & = & \lambda_1 \\ u_2 & = & \lambda_2 \\ u_3 & = & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$u = (u_1, u_2, u_3) = (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1, 0, -\lambda_1) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, -1) \Rightarrow$
$\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ sistema generador de U.

Para la base, nos quedamos con los que son linealmente independientes.

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow B_U = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

A partir de la base, construimos las ecuaciones paramétricas.

Sean $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, -1) = (x_1, x_2, x_3).$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de U son

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_2 \\ x_3 & = & -\lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\}.$$

Observamos que las ecuaciones paramétricas corresponden con las soluciones de la ecuación implícita $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, que define en este caso al subespacio U.

- V:

Si $v = (v_1, v_2, v_3) \in V \Rightarrow v_1 = v_3$. Entonces, los vectores de V son aquellos cuyas coordenadas son las soluciones de esa ecuación. Las soluciones son

$$\left.\begin{array}{ccc} v_2 & = & \lambda_1 \\ v_3 & = & \lambda_2 \\ v_1 & = & \lambda_2 \end{array}\right\}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$v = (v_1, v_2, v_3) = (\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0, \lambda_1, 0) + (\lambda_2, 0, \lambda_2) = \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) \Rightarrow \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ sistema generador de V.

Para la base, nos quedamos con los que son linealmente independientes.

$rango \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow B_V = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

A partir de la base, construimos las ecuaciones paramétricas.

Sean $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3).$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de V son

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 & = & \lambda_2 \\ x_2 & = & \lambda_1 \\ x_3 & = & \lambda_2 \end{array}\right\}.$$

- W:

  Si $w = (w_1, w_2, w_3) \in W \Rightarrow w_1 = w_2 = 0$. Entonces, los vectores de W son aquellos cuyas coordenadas son las soluciones de esa ecuación.

  $$\left.\begin{array}{ccc} w_1 & = & 0 \\ w_2 & = & 0 \\ w_3 & = & \lambda \end{array}\right\}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

$w = (w_1, w_2, w_3) = (0, 0, \lambda) = \lambda(0, 0, 1) \Rightarrow \{(0, 0, 1)\}$ sistema generador de W.

Como es sistema generador ese vector, también es base (si hubiera más de un vector, son base los que son linealmente independientes, pero al haber 1 solo, no hay posibilidad de dependencia lineal). Luego, $B_W = \{(0, 0, 1)\}$.

A partir de la base, construimos las ecuaciones paramétricas.

Sean $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$, entonces,
$\lambda(0, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3)$.

Luego, las ecuaciones paramétricas de W son

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & \lambda \end{array}\right\}.$$

■

Problema 3.4.4. *Sea V subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por las ecuaciones implícitas*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Determinar las ecuaciones paramétricas, una base y su dimensión.

Solución.
Para las ecuaciones paramétricas necesitamos una base.

Sea $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1 - v_2 - v_3 & = & 0 \\ v_1 + 3v_2 + v_4 & = & 0 \\ 2v_1 - 6v_2 - 3v_3 - 4v_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Los vectores de V son aquellos cuyas coordenadas cumplen el sistema anterior (son las soluciones de ese sistema). Obtenemos las soluciones con el método de Gauss.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-2}}{\overset{F_{21}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{F_{32}^{1}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} v_1 - v_2 - v_3 & = & 0 \\ 4v_2 + v_3 + v_4 & = & 0 \\ -3v_4 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$v_4 = 0, v_3 = \lambda, v_2 = -\frac{\lambda}{4}, v_1 = \frac{3}{4}\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (\frac{3}{4}\lambda, -\frac{1}{4}\lambda, \lambda, 0) = \lambda(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$.

Luego, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$ es sistema generador de V y como solo está este vector, es base de V.

Entonces, $B_V = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$ y por lo tanto, $dim(V) = 1$.

Para trabajar más fácilmente con una base de V, se puede multiplicar el vector que la forma actualmente por 4 para quitar denominadores y tomar eso como base.

Ahora, a partir de la base, formamos las ecuaciones paramétricas. Sean $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Entonces, las ecuaciones paramétricas de V son

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 & = & \frac{3}{4}\lambda \\ x_2 & = & -\frac{1}{4}\lambda \\ x_3 & = & \lambda \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

■

Problema 3.4.5. *Sea V subespacio de $\mathbb{R}^4$ dado por*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) Determinar una base y la dimensión de V.

(b) Completar la base obtenida para hallar una base de $\mathbb{R}^4$.

Solución.

(a) Sea $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2v_1 - v_2 - 3v_3 & = & 0 \\ v_1 - 2v_2 + 6v_3 - 6v_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Los vectores de V son aquellos cuyas coordenadas cumplen el sistema anterior (son las soluciones de ese sistema).

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1 & = & \lambda_1 \\ v_3 & = & \lambda_2 \\ v_2 & = & 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ v_4 & = & \frac{\lambda_1 - 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_2}{6} = -\frac{1}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right\}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (\lambda_1, 2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_2, -\frac{1}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2) =$
$= \lambda_1(1, 2, 0, -\frac{1}{2}) + \lambda_2(0, -3, 1, 2)$.

Por lo tanto, $\{(1, 2, 0, -\frac{1}{2}), (0, -3, 1, 2)\}$ es sistema generador de V.

La base la forman los vectores linealmente independientes,

Como $rango \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$, los 2 vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, forman una base del subespacio.

Entonces, $B_V = \{(1, 2, 0, -\frac{1}{2}), (0, -3, 1, 2)\}$. Como está formada por 2 vectores, $dim(V) = 2$.

(b) Como estamos en $\mathbb{R}^4$, es suficiente con encontrar 4 vectores linealmente independientes y esos formarán una base.

Si a los vectores de B_V le añadimos los vectores $(1,0,0,0)$ y $(0,0,0,1)$, el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$
Luego, los vectores son linealmente independientes y forman una base de $\mathbb{R}^4$.
Entonces, $B = \{(1,2,0,-\frac{1}{2}), (0,-3,1,2), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}$.

■

3.5 Subespacio suma y subespacio intersección

Problema 3.5.1. *Sean los subespacios vectoriales* $F = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}$ *y* $G = \{(x,y,z) : x-y=0\}$ *de* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$. *Determinar el subespacio intersección entre ambos.*

Solución.
Nos han dado los subespacios F y G mediante sus ecuaciones cartesianas. Consideramos el sistema resultante de unir las ecuaciones cartesianas de ambos subespacios.

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y=0. \end{cases}$$

Montamos la matriz ampliada de ese sistema y la escalonamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{21}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2^{-\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

Así pues las ecuaciones cartesianas del subespacio vectorial $F \cap G$ son:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ y - \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

■

Problema 3.5.2. *Sean F y G subespacios del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cuyas bases son respectivamente $B_F = \{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$ y $B_G = \{(1,1,1),(0,0,1)\}$. Determinar el subespacio suma $F+G$.*

Solución.

Un sistema de generadores del subespacio $F+G$ se obtiene considerando las bases de ambos subespacios, es decir,

$$\{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1),(0,0,1)\}.$$

Necesitamos quedarnos con los vectores que sean linealmente independientes para formar la base del subespacio $F+G$. Para ello, construimos la matriz cuyas filas son los vectores del sistema de generadores y la escalonamos.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_1^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{31}^{-1}}{\underset{\sim}{F_{21}^{+1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{F_{32}^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{34}^{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, una base del subespacio $F+G$ es $B_{F+G} = \{(1,0,-1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ y $\dim(F+G) = 3$. Como $F, G \subset \mathbb{R}^3$ sabemos que $F+G \subseteq \mathbb{R}^3$. En este caso, la dimensión de $F+G$ y $\mathbb{R}^3$ coinciden, por lo que afirmamos que $F+G = \mathbb{R}^3$. ■

Problema 3.5.3. *En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^5$, se consideran los subespacios*

$$V = \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x_4 = \alpha, \\ x_5 = \beta, \end{cases}$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_5, x_2 = x_4\right\}.$$

a) *Calcular las bases y dimensiones de V y W.*

b) *Obtener una base del subespacio suma $V+W$ y su dimensión.*

c) *Determinar la dimensión del subespacio intersección $V \cap W$.*

Solución.

(a) Nos dan las ecuaciones paramétricas de V, así que podemos afirmar directamente que su sistema de generadores es

$$\{(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,0)\}.$$

Observamos que al montar una matriz en la que las filas son esos vectores, la matriz está escalonada, por lo que podemos afirmar directamente que los vectores del sistema de generadores son linealmente independientes y forman base.

$$B_V = \{(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,0)\}$$

y $\dim(V) = 3$.
El subespacio vectorial W nos lo expresan mediante sus ecuaciones implícitas, resolviendo el sistema formado por estas obtenemos las ecuaciones paramétricas de W.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_5, \\ x_2 = x_4, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \gamma, \\ x_4 = \beta, \\ x_5 = \alpha, \end{array}\right. \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Y siguiendo una argumentación análoga a la usada para el subespacio V, podemos afirmar que una base del subespacio W es

$$B_V = \{(1,0,0,0,1),(0,1,0,1,0),(0,0,1,0,0)\}$$

y $\dim(W) = 3$.

(b) Un sistema de generadores del subespacio suma $V + W$ se forma al unir las bases de los propios subespacios V y W. De esta forma, para obtener una base de $V + W$, simplemente tendremos que quedarnos con los vectores linealmente independientes de dicho sistema de generadores.
Formamos una matriz cuyas filas son los vectores del sistema de generadores y la escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{63}^{-1}}{\overset{F_{41}^{-1},F_{52}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{45}^{+1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$B_{V+W} = \{(1,0,0,1,0),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,-1)\}$

y $\dim(V+W) = 4$.

(c) Mediante la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(V+W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W),$$

determinamos directamente que $\dim(V \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$.

■

Problema 3.5.4. *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$, se consideran los* *subespacios*

$$V = \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, \\ x_3 = \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \\ x_4 = \alpha, \\ x_5 = \beta, \end{cases}$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 = x_5, x_2 = x_4\right\}.$$

a) *¿Pertenece el vector* $v = (1, 0, 2, 1, 0)$ *a alguno de estos subespacios? En caso afirmativo, calcular una base del subespacio correspondiente y las coordenadas de* v *en dicha base.*

b) *Determinar el subespacio* $V \cap W$.

c) *Calcular la dimensión de* $V + W$.

Solución.

(a) El vector $v \in V$, ya que basta tomar $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 2$ en las ecuaciones paramétricas de V para comprobar que el vector v verifica las mismas.

Como tenemos las ecuaciones paramétricas de V, podemos afirmar directamente que un sistema de generadores de V es

$$\{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0)\}.$$

Construyendo una matriz cuyas filas son los vectores del sistema de generadores, observamos que la matriz está escalonada, así que los vectores del sistema de generadores son linealmente independientes y forman base.

$$B_V = \{(1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0)\}.$$

Podemos expresar v como combinación lineal de los vectores de la base B_V,

$$v = (1,0,2,1,0) = 1\cdot(1,0,0,1,0)+0\cdot(0,1,0,0,1)+2\cdot(0,0,1,0,0).$$

Y, por lo tanto, las coordenadas del vector v respecto de B_V son

$$v = (1,0,2)_{B_V}.$$

Por otro lado, v no pertenece a W porque no verifica sus ecuaciones cartesianas,

$$x_1 = 1 \neq x_5 = 0,\ x_2 = 0 \neq x_4 = 1.$$

(b) Para determinar el subespacio $V \cap W$ tengo que resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones implícitas de ambos subespacios. Para W el enunciado me da las ecuaciones cartesianas pero tengo que calcular las ecuaciones cartesianas de V.
Mediante la fórmula

$$\text{nº de ecuaciones cartesianas de } V = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(V)$$

y como antes calculamos la base de V, afirmamos que $\dim(V) = 3$, deduciendo que

$$\text{nº de ecuaciones cartesianas de } V = \dim(\mathbb{R}^5)-\dim(V) = 5-3 = 2.$$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones paramétricas de V, considerando los parámetros como incógnitas, mediante el método de eliminación de Gauss sobre la matriz ampliada del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & x_5 \end{array}\right) \underset{F_{52}^{-1}}{\overset{F_{41}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 - x_2 \end{array}\right).$$

Las ecuaciones implícitas de V son

$$\begin{cases} x_4 - x_1 = 0, \\ x_5 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Ahora, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas tanto de V como de W.

$$\begin{cases} x_4 - x_1 = 0, \\ x_5 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Mediante Gauss-Jordan sobre la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{24}^{+1}}{\overset{F_{13}^{+1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{F_{41}^{+1}}{\overset{F_{21}^{+1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La solución de este sistema es

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = \beta, \text{ donde } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ x_4 = \alpha, \\ x_5 = \alpha, \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas del subespacio $V \cap W$.
(c) Primero hemos de calcular la dimensión de W por medio de la relación

$$\text{nº de ecuaciones implícitas de } W = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(W) \Rightarrow \\ 2 = 5 - \dim(W) \Rightarrow \dim(W) = 3.$$

Y sustituyendo en la fórmula de las dimensiones,

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W),$$

determinamos directamente que $\dim(V + W) = 3 + 3 - 2 = 4.$ ■

Problema 3.5.5. *Se consideran los subespacio vectoriales:*

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\right\},$$

$$T = \begin{cases} x = \alpha, \\ y = 2\alpha, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \\ y = \alpha - \beta, \end{cases}$$

a) Obtener una base de S.

b) Calcular las ecuaciones cartesianas de T.

c) Obtener una base del subespacio suma $S + T$.

d) Determinar la dimensión del subespacio intersección $S \cap T$.

Solución.
(a) Mediante la fórmula

$$\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de ecuaciones implícitas de } S = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(S) \Rightarrow$$
$$1 = 3 - \dim(S) \Rightarrow \dim(S) = 2,$$

luego sabemos que la base de S está formada por dos vectores. Resolvemos la ecuación cartesiana dada para S, obteniendo sus ecuaciones paramétricas,

$$x - 2y + z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha - \beta, \\ y = \alpha, \\ z = \beta, \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Directamente, afirmamos que un sistema de generadores de S es

$$\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

y, como coincide con su dimensión, es base de S.
(b) Para obtener las ecuaciones cartesianas de T, consideramos las ecuaciones paramétricas dadas como un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son α y β. Lo resolvemos mediante Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \underset{F_{31}^{-1}}{\overset{F_{21}^{-2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y - 2x \\ 0 & -1 & z - x \end{array}\right).$$

La única ecuación implícita de T es $y - 2x = 0$.
(c) Primero necesitamos la base de T. A partir de las ecuaciones paramétricas por las que viene T expresado en el enunciado, afirmamos que un sistema de generadores es

$$\{(1, 2, 1), (0, 0, -1)\}.$$

Observamos que, por ejemplo, el determinante de la submatriz

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

con lo que los vectores del sistema de generadores son linealmente independientes y forman base de T.
A continuación, para obtener la base de $S+T$, construimos una matriz cuyas filas son los vectores de la base de S y de T. Aplicamos transformaciones elementales por filas sobre la matriz y los vectores linealmente independientes de la misma forman la base de $S+T$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_{34}^{+1}}{\overset{F_{24}^{+1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_{32}^{+1}}{\overset{F_{4}^{-1},F_{12}^{+2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{2}^{-1}}{\overset{F_{31}^{-2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Afirmamos que

$$B_{S+T} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

y, por lo tanto, es $S+T=\mathbb{R}^3$.
(d) Usando la fórmula de las dimensiones,

$$\dim(S+T)+\dim(S\cap T)=\dim(S)+\dim(T),$$

determinamos directamente que $\dim(S\cap T)=2+2-3=1$. ■

Problema 3.5.6. *En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$, se consideran los subespacios*

$$H = \begin{cases} x_1 = \alpha + \gamma + 2\delta, \\ x_2 = 2\beta + \delta, & \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \\ x_3 = \alpha + 2\beta + 2\delta, \\ x_4 = \alpha + \gamma + 2\delta, \end{cases}$$

$$W = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

a) Obtener la base y dimensión de H.

b) ¿Pertenece el vector $v = (1, 2, -1, 1)$ a W? En caso afirmativo, calcular una base del subespacio W y las coordenadas de v en dicha base.

c) Determinar una base del subespacio suma $H+W$. ¿Quién es $H + W$?

d) Calcular la dimensión del subespacio intersección $H \cap W$.

Solución.
(a) Ya que nos dan las ecuaciones paramétricas de H, podemos obtener directamente su sistema de generadores:

$$\{(1, 0, 1, 1), (0, 2, 2, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 1, 2, 2)\}.$$

Para obtener la base de H, nos quedamos con los vectores linealmente independientes de su sistema de generadores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_{41}^{-2}}{\overset{F_2^{1/2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_{24}^{-1}}{\overset{F_{13}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{12}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$B_H = \{(0,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,0)\} \text{ y } \dim(H) = 3.$$

(b) Sabemos que $v \in W$ si y sólo si verifica sus ecuaciones implícitas, es decir, $x_3 + x_4 = 0$. En este caso, tenemos $-1 + 1 = 0$. Afirmamos que $v \in W$.
Mediante la siguiente relación obtenemos la dimensión de W,

$$\text{nº de ecuaciones implícitas de } W = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(W) \Rightarrow$$
$$1 = 4 - \dim(W) \Rightarrow \dim(W) = 3.$$

Pasamos de ecuaciones cartesianas a paramétricas resolviendo

$$x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = \beta, & \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}. \\ x_3 = -\gamma, \\ x_4 = \gamma, \end{cases}$$

Y como el número de vectores del sistema de generadores obtenido de las ecuaciones paramétricas coincide con $\dim(W) = 3$, afirmamos que forman base y es:

$$B_W = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,-1,1)\}.$$

Finalmente, las coordenadas de v en dicha base son $v = (1, 2, -1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0) + 2 \cdot (0, 1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 0, -1, 1) = (1, 2, 1)_B$.

(c) Para obtener la base de $H + W$, construimos el sistema de generadores de $H + W$ uniendo sus bases y nos quedamos con los vectores linealmente independientes.

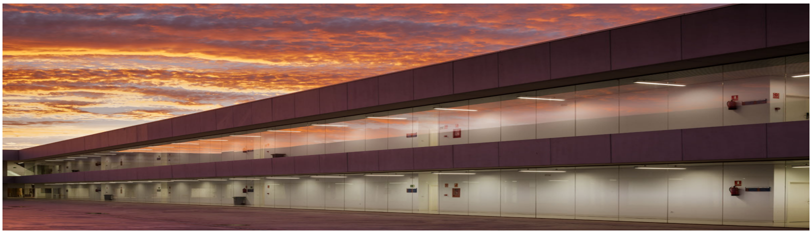
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_{35}^{-1}}{\overset{F_{61}^{+1}, F_{24}^{-1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_{26}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo que, una base de $H + W$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $H + W = \mathbb{R}^4$.

(d) Mediante la fórmula de las dimensiones:

$$\dim(H + W) + \dim(H \cap W) = \dim(H) + \dim(W),$$

determinamos directamente que $\dim(H \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$. ■



Capítulo 4

Espacio vectorial euclídeo

Índice

4.1 Matrices de producto escalar

Problema 4.1.1. *Calcular los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz*
$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ *es matriz de producto escalar.*

Solución.
Para que sea matriz de producto escalar, se deben cumplir 2 condiciones:

- A matriz simétrica.
- A matriz definida positiva (todos los menores principales de A son mayores que 0).

Simétrica:
$A = A^t$, luego A es simétrica.
Definida positiva:
$A_1 = \alpha > 0 \Rightarrow \alpha > 0$.
$A_2 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow -1 > \alpha > 1.$
$A_3 = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 3\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 1 \text{ o } \alpha > 1.$
$A_4 = |A| = \alpha^4 - 6\alpha^2 + 8\alpha - 3 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1 \text{ o } \alpha < -3.$
Luego, para que A sea definida positiva y, por lo tanto, matriz de producto escalar, $\alpha > 1$.

■

Problema 4.1.2. *Dados los vectores* $v = (-1, 1, 0, 0)$ *y* $w = (0, 1, 1, 0)$*, calcular sus módulos y el ángulo que forman respecto al producto escalar*

(a) Habitual.

(b) Definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución.

(a)

$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(-1,1,0,0)\cdot(-1,1,0,0)} = \sqrt{2}$.

$|w| = \sqrt{w \cdot w} = \sqrt{(0,1,1,0)\cdot(0,1,1,0)} = \sqrt{2}$.

$v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot \cos(v, w) \Rightarrow$

$\cos(v,w) = \frac{v \cdot w}{|v|\cdot|w|} = \frac{(-1,1,0,0)\cdot(0,1,1,0)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$< v, w >= \arccos(\frac{1}{2})$.

(b)

$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{1} = 1$.

$$v \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$|w| = \sqrt{w \cdot w} = \sqrt{5}$.

$$w \cdot w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5.$$

$\cos(v,w) = \frac{v \cdot w}{|v|\cdot|w|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$< v, w >= \arccos(\frac{1}{\sqrt{5}})$.

■

Problema 4.1.3. *Comprobar que* $x \cdot y = (2x_1 - x_2 + x_3)(2y_1 - y_2 + y_3) + (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ *define un producto escalar en* $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Es producto escalar si verifica las siguientes propiedades para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

a) $u \cdot v = v \cdot u$.

b) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$.

c) $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$.

d) $u \cdot u \geq 0$.

e) $u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Sean $u = x = (x_1, x_2, x_3)$, $v = y = (y_1, y_2, y_3)$.

a) $x \cdot y = (2x_1 - x_2 + x_3)(2y_1 - y_2 + y_3) + (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = (2y_1 - y_2 + y_3)(2x_1 - x_2 + x_3) + (y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3) = y \cdot x$.
Esto es posible porque $(2x_1 - x_2 + x_3)(2y_1 - y_2 + y_3) = (2y_1 - y_2 + y_3)(2x_1 - x_2 + x_3)$ al ser producto de números reales, por

lo que es conmutativo. También porque $(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) = (y_1x_1+y_2x_2+y_3x_3)$ al ser $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, por lo que el producto entre ellos es conmutativo.

b) $(x+y)\cdot z = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)\cdot(z_1,z_2,z_3) = (2x_1+2y_1-x_2-y_2+x_3+y_3)(2z_1-z_2+z_3)+[(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2+(x_3+y_3)z_3] = [(2x_1-x_2+x_3)+(2y_1-y_2+y_3)](2z_1-z_2+z_3)+[(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)] = [(2x_1-x_2+x_3)(2z_1-z_2+z_3)+(x_1z_1+x_2z_2+x_3z_3)]+[(2y_1-y_2+y_3)(2z_1-z_2+z_3)+(y_1z_1+y_2z_2+y_3z_3)] = xz+yz$.

c) $(\lambda x)y = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)(y_1,y_2,y_3) = (2\lambda x_1-\lambda x_2+\lambda x_3)(2y_1-y_2+y_3)+(\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2+\lambda x_3y_3) = \lambda(2x_1-x_2+x_3)(2y_1-y_2+y_3)+\lambda(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3) = \lambda[(2x_1-x_2+x_3)(2y_1-y_2+y_3)+(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)] = \lambda(x\cdot y)$.

d) $x\cdot x = (2x_1-x_2+x_3)(2x_1-x_2+x_3)+(x_1x_1+x_2x_2+x_3x_3) = (2x_1-x_2+x_3)^2+({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)$.
Como el primer sumando está elevado a 2, es mayor o igual que 0 y, como todos los elementos del segundo sumando están elevados a 2, también son mayores o iguales que 0, así que su suma es mayor o igual que 0, luego, $x\cdot x \geq 0$.

e) $x\cdot x = (2x_1-x_2+x_3)^2+({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)$.
Como son dos sumandos que son mayores o iguales que 0, su suma es 0 solo cuando ambos sean 0:
$2x_1-x_2+x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_1+x_3 = x_2$. Luego, incluye la solución $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x = 0$.
${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Ambos sumandos son 0 cuando $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, es decir, cuando $x = 0$.
Como cumple todas las propiedades, $x\cdot y$ define un producto escalar en $\mathbb{R}^3$. ■

Problema 4.1.4. *En $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar $\cdot$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que:*

$$v_1 \cdot v_1 = 4, v_2 \cdot v_2 = 1, v_3 \cdot v_3 = 4, v_1 \cdot v_2 = 0$$

$$(4v_2 - v_3) \perp v_1, \quad (4v_2 - v_3) \perp v_3$$

(a) Calcular la matriz del producto escalar en la base B.

(b) Calcular una base ortonormal $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a partir de B.

Solución.
(a) Recordamos que la matriz del producto escalar en la base B tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

Del enunciado del problema tenemos los elementos de la diagonal de la matriz, $v_1 \cdot v_1 = 4, v_2 \cdot v_2 = 1, v_3 \cdot v_3 = 4$. Además, conocemos el valor de $v_1 \cdot v_2 = 0$ y como el producto escalar es conmutativo, $v_2 \cdot v_1 = 0$, luego

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & v_1 \cdot v_3 \\ 0 & 1 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, de la condición $(4v_2 - v_3) \perp v_1$ se deduce que

$$\begin{aligned} (4v_2 - v_3) \cdot v_1 = 4v_2 \cdot v_1 - v_3 \cdot v_1 = 0, \text{ luego} \\ v_3 \cdot v_1 = 4v_2 \cdot v_1 = 0, \quad \text{es decir, } v_3 \cdot v_1 = 0. \end{aligned}$$

Análogamente, de la condición $(4v_2 - v_3) \perp v_3$,

$$\begin{aligned}(4v_2 - v_3) \cdot v_3 &= 4v_2 \cdot v_3 - v_3 \cdot v_3 = 0, \text{ luego} \\ v_3 \cdot v_3 &= 4v_2 \cdot v_3 = 4, \quad \text{de donde } v_2 \cdot v_3 = 1.\end{aligned}$$

Por conmutatividad, deducimos también que $v_1 \cdot v_3 = 0$ y $v_3 \cdot v_2 = 1$. Por lo tanto, la matriz del producto escalar en la base B es

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Para calcular una base ortonormal $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a partir de B, calculamos primero una base ortogonal $B'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

1. $w_1 = v_1$.

2. $w_2 = v_2 + \lambda w_1$, de forma que $w_1 \cdot w_2 = 0$, esto es

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= 0 \\ v_1 \cdot (v_2 + \lambda v_1) &= 0 \\ v_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot \lambda v_1 &= 0, \end{aligned}$$

   luego $\lambda = -\dfrac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} = 0$, es decir,

$$w_2 = v_2.$$

3. $w_3 = v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2$, de forma que $w_1 \cdot w_3 = 0$ y $w_2 \cdot w_3 = 0$.

- $w_1 \cdot w_3 = 0$:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot w_3 &= 0 \\ v_1 \cdot (v_3 + \alpha w_1 + \beta w_2) &= 0 \\ v_1 \cdot (v_3 + \alpha v_1 + \beta v_2) &= 0 \\ v_1 \cdot v_3 + v_1 \cdot \alpha v_1 + v_1 \cdot \beta v_2 &= 0 \\ 0 + 4\alpha + 0\beta &= 0, \end{aligned}$$

  de donde $\alpha = 0$, luego $w_3 = v_3 + \beta w_2$.

- $w_2 \cdot w_3 = 0$:

$$\begin{aligned} w_2 \cdot w_3 &= 0 \\ v_2 \cdot (v_3 + \beta w_2) &= 0 \\ v_2 \cdot (v_3 + \beta v_2) &= 0 \\ v_2 \cdot v_3 + v_2 \cdot \beta v_2 &= 0 \\ 1 + \beta &= 0, \end{aligned}$$

  de donde $\beta = -1$, luego $w_3 = v_3 - w_2$.

Por lo tanto,

$$w_3 = v_3 - v_2.$$

De esta forma hemos obtenido la base ortogonal

$$B'' = \{w_1, w_2, w_3\} = \{v_1, v_2, v_3 - v_2\}.$$

Calculamos ahora una base ortonormal $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_i = \frac{w_i}{|w_i|}$.

- $|w_1| = \sqrt{v_1 \cdot v_1} = \sqrt{4} = 2.$
- $|w_2| = \sqrt{v_2 \cdot v_2} = \sqrt{1} = 1.$

- $|w_3| = \sqrt{(v_3 - v_2) \cdot (v_3 - v_2)} =$
  $\sqrt{v_3 \cdot v_3 - 2v_2 \cdot v_3 + v_2 \cdot v_2}$
  $= \sqrt{4 - 2 + 1} = \sqrt{3}.$

Por lo tanto, una base ortonormal es

$$B' = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{v_1}{2}, v_2, \frac{v_3 - v_2}{\sqrt{3}} \right\}.$$

■

4.2 Subespacio ortogonal a otro dado

Problema 4.2.1. *En el espacio $\mathbb{R}^3$ se define*

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

siendo $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

(a) Determinar para qué valores de α es $\cdot$ un producto escalar.

(b) Para $\alpha = 1$, encuentra todos los vectores que son ortogonales al vector $x = (1, 2, 3)$.

Solución.
(a) Para que $\cdot$ sea un producto escalar, la matriz debe ser una matriz de producto escalar. Ya es simétrica y falta que sea definida positiva.
$|4| = 4 > 0.$

$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = 4\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0.$

$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\alpha - \alpha = 3\alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0.$

Por lo tanto, para todo $\alpha > 0$ se cumple que la matriz de producto escalar es definida positiva y, se concluye que $\cdot$ es un producto escalar.

(b) Sea V el conjunto formado por todos los vectores ortogonales a x. Si $u = (u_1, u_2, u_3) \in V$, entonces $u \cdot x = 0$.

$u \cdot x = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 4u_1 + u_3 & u_2 & u_1 + u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 7u_1 + 2u_2 + 4u_3 \Rightarrow$

$7u_1 + 2u_2 + 4u_3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & \alpha, \\ u_2 & = & \beta, \\ u_3 & = & \frac{-7\alpha - 2\beta}{4}. \end{array} \right.$

Los vectores que generan V son $\{(1, 0, -\frac{7}{4}), (0, 1, -\frac{1}{2})\}$.
Como son linealmente independientes,
$B_V = \{(1, 0, -\frac{7}{4}), (0, 1, -\frac{1}{2})\}$. La base de V genera todos los vectores ortogonales a x.

■

Problema 4.2.2. *Considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) Determinar para qué valores de α la matriz A define un producto escalar en $\mathbb{R}^4$.

(b) Para $\alpha = 2$, calcular el ángulo que forman los vectores $(6, 6, 0, 0)$ y $(0, 0, 6, 6)$ respecto al producto escalar definido por $x \cdot y = X^t \cdot A \cdot Y$.

(c) Para $\alpha = 2$, utilizar el producto escalar definido por $x \cdot y = X^t \cdot A \cdot Y$ para calcular todos los vectores que son ortogonales al conjunto $\{(-4, 4, 0, 0), (0, 0, -4, 4)\}$.

Solución.

(a) Para que defina un producto escalar debe ser simétrica y definida positiva. Ya es simétrica. Para que sea definida positiva:

$|\alpha| = \alpha > 0$.

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 1.$

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha > 0 \Leftrightarrow -1 < \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1.$

$|A| = \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha < -1 \text{ ó } -1 < \alpha < 1 \text{ o } \alpha > 1.$

Para que todos los menores principales sean mayores que 0, $\alpha > 1$.

Luego, para que A sea definida positiva y, por lo tanto, defina un producto escalar en $\mathbb{R}^4$, $\alpha > 1$.

(b) El ángulo se calcula:

$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x, y) \Rightarrow \cos(x, y) = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|} \Rightarrow$
$(x, y) = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|}\right).$

$$x \cdot y = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0.$$

$(x, y) = \arccos(\frac{0}{|x| \cdot |y|}) = \arccos(0)$.

(c) Sea V el conjunto formado por todos los vectores ortogonales al conjunto $\{(-4, 4, 0, 0), (0, 0, -4, 4)\}$ y sea $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in V$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4v_1 + 4v_2 \\ -4v_3 + 4v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4v_1 + 4v_2 & = & 0 \\ -4v_3 + 4v_4 & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} v_1 & = & \alpha, \\ v_2 & = & \alpha, \\ v_3 & = & \beta, \\ v_4 & = & \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

El sistema generador de V es $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$. Como son linealmente independientes,
$B_V = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, que genera todos los vectores ortogonales al conjunto dado.

■

Problema 4.2.3. *Calcular base, ecuaciones y dimensión del subespacio ortogonal al conjunto* $\mathcal{L}(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\})$ *respecto al producto escalar*

(a) Habitual.

(b) Definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución.

(a) Sea $\mathcal{L}^{\perp}$ el conjunto formado por los vectores ortogonales al conjunto $\mathcal{L}$ y sea $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathcal{L}^{\perp}$. Sabiendo además que el producto escalar habitual es como si la matriz de producto escalar fuera la matriz identidad, entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_3 + v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 + v_2 &= 0, \\ v_3 + v_4 &= 0. \end{cases}$$

Estas son las ecuaciones implícitas. Resolvemos el sistema que forman para determinar las ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} v_1 &= -\alpha, \\ v_2 &= \alpha, \\ v_3 &= -\beta, \\ v_4 &= \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Obtenemos que un sistema generador de $\mathcal{L}^{\perp}$ es

$$\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}.$$

Como los vectores son linealmente independientes, $B_{\mathcal{L}^{\perp}}=\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$. Por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{L}^{\perp}$ es 2.

(b) Sea $\mathcal{L}^{\perp}$ el conjunto formado por los vectores ortogonales al conjunto $\mathcal{L}$ y sea $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathcal{L}^{\perp}$. Entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2v_1+3v_2 \\ 3v_3+4v_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2v_1+3v_2 & = & 0, \\ 3v_3+4v_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

Estas son las ecuaciones implícitas. Resolvemos el sistema que forman para determinar las ecuaciones paramétricas.

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 & = & -\frac{3\alpha}{2}, \\ v_2 & = & \alpha, \\ v_3 & = & -\frac{4\beta}{3}, \\ v_4 & = & \beta, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Obtenemos que un sistema generador de $\mathcal{L}^{\perp}$ es

$$\{(-\frac{3}{2},1,0,0),(0,0,-\frac{4}{3},1)\}.$$

Como los vectores son linealmente independientes, $B_{\mathcal{L}^\perp} = \{(-\frac{3}{2}, 1, 0, 0), (0, 0, -\frac{4}{3}, 1)\}$. Por lo tanto, la dimensión de $\mathcal{L}^\perp$ es 2.

■

4.3 Bases ortonormales

Problema 4.3.1. *Calcular una base ortonormal respecto al producto escalar definido por la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *a partir de la base canónica de* $\mathbb{R}^4$.

Solución.
Mediante Gram-Schmidt y usando la base canónica de $\mathbb{R}^4$, calculamos una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$. Luego, cada vector de la base lo dividimos por su módulo para ortonormalizarla.
$B_{\text{canónica}} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.
Aplicamos Gram-Schmidt:
$w_1 = (1, 0, 0, 0)$.
$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{|w_1|^2} \cdot w_1 = (0, 1, 0, 0) - \frac{1}{1} \cdot (1, 0, 0, 0) = (-1, 1, 0, 0)$.

$$v_2 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$|w_1| = \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{1} = 1$.

$w_1 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$

$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{|w_1|^2} \cdot w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{|w_2|^2} \cdot w_2 = (0,0,1,0) - (0,0,0,0) - (0,0,0,0) = (0,0,1,0).$

$v_3 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

$v_3 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

$w_4 = v_4 - \frac{v_4 \cdot w_1}{|w_1|^2} \cdot w_1 - \frac{v_4 \cdot w_2}{|w_2|^2} \cdot w_2 - \frac{v_4 \cdot w_3}{|w_3|^2} \cdot w_3 = (0,0,0,1) - (0,0,0,0) - (0,0,0,0) - (0,0,0,0) = (0,0,0,1).$

$v_4 \cdot w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

$v_4 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

$v_4 \cdot w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$

$B_{ortogonal} = \{(1,0,0,0), (-1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$

Calculamos los módulos para conseguir una base ortonormal a partir de la ortogonal.
$B_{ortonormal} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, b_i = \frac{w_i}{|w_i|}$.

- Para b_1:
  $b_1 = \frac{(1,0,0,0)}{1} = (1, 0, 0, 0)$.
- Para b_2:
  $|w_2| = \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{1} = 1$.
  $$w_2 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$
  $b_2 = \frac{(-1,1,0,0)}{1} = (-1, 1, 0, 0)$.
- Para b_3:
  $|w_3| = \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{3}$.
  $$w_3 \cdot w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$
  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.$$
  $b_3 = \frac{(0,0,1,0)}{\sqrt{3}} = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

- Para b_4:

  $|w_4| = \sqrt{w_4 \cdot w_4} = \sqrt{4} = 2.$

  $$w_4 \cdot w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

  $b_4 = \frac{(0,0,0,1)}{2} = (0, 0, 0, \frac{1}{2}).$

$B_{ortonormal} = \{(1, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2})\}.$

■

Problema 4.3.2. *Sea la base* (u_1, u_2, u_3) *en el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *donde*

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (0, 1, 1).$$

(a) Calcular una base ortonormal a partir de dicha base.

(b) Comprobar que los vectores

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ *y que* $L(u_1, u_2) \neq L(v_1, v_2)$.

Solución.
(a) En primer lugar comprobamos si los vectores que nos dan ya son ortogonales dos a dos. Comprobamos que $u_1 \cdot u_2 \neq 0$, luego no son ortogonales, así que no nos vale directamente como base ortogonal.
Comprobado lo anterior, calculamos una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ mediante Gram-Schmidt usando la base dada. Luego, cada vector de la base lo dividimos por su módulo para ortonormalizarla.
$w_1 = (1,1,1)$.
$w_2 = (1,1,0) - \frac{(1,1,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} \cdot (1,1,1) = (1,1,0) - \frac{2}{3} \cdot (1,1,1) = (1,1,0) - (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.
$w_3 = u_3 - (\frac{u_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 + \frac{u_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \cdot w_2) = (0,1,1) - (\frac{(0,1,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} \cdot (1,1,1) + \frac{(0,1,1)\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})) = (0,1,1) - (\frac{2}{3} \cdot (1,1,1) + \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})) = (0,1,1) - ((\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3})) = (0,1,1) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.
Por lo tanto, $B_{ortogonal} = \{(1,1,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\}$.
Calculamos los módulos para conseguir una base ortonormal a partir de la base ortogonal.
$B_{ortonormal} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $b_i = \frac{w_i}{|w_i|}$.

- Para b_1:

  $|w_1| = \sqrt{w_1 \cdot w_1} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

  $b_1 = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

- Para b_2:

  $|w_2| = \sqrt{w_2 \cdot w_2} = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$b_2 = \frac{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$.

- Para b_3:

  $|w_3| = \sqrt{w_3 \cdot w_3} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  $b_3 = \frac{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Por lo tanto,
$B_{ortonormal} = \{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\}$.

(b) Para que formen una base ortonormal deben ser ortogonales dos a dos y tener módulo 1. Comprobamos si son ortogonales dos a dos.
$v_1 \cdot v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} - \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$.
$v_1 \cdot v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$.
$v_2 \cdot v_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 0 + \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$.
Luego, sí son ortogonales dos a dos.
Comprobamos ahora si tienen módulo 1.
$|v_1| = \sqrt{v_1 \cdot v_1} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$.
$|v_2| = \sqrt{v_2 \cdot v_2} = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{2}{\sqrt{6}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{6}})^2} = 1$.
$|v_3| = \sqrt{v_3 \cdot v_3} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$.
Todos tienen módulo 1. Luego, cumplen las 2 condiciones y $\{v_1, v_2, v_3\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
Comprobamos ahora que $L(u_1, u_2) \neq L(v_1, v_2)$ (el subespacio generado por (u_1, u_2) es distinto al subespacio generado por (v_1, v_2)).
En primer lugar, buscamos una base de $L(u_1, u_2)$ y de $L(v_1, v_2)$.
Empezamos por $B_{L(u_1,u_2)}$.

$rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$. Luego, u_1 y u_2 son linealmente independientes y forman una base de $L(u_1, u_2)$.
Para $B_{L(v_1,v_2)}$ tenemos que
$rango\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 2$. Luego, v_1 y v_2 son linealmente independientes y forman una base de $L(v_1, v_2)$.
Ahora cogemos un vector de una de las 2 bases y comprobamos si se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la otra base. En el caso de que no sea posible, ya son distintos los subespacios (con comprobar que 1 no sea posible, es suficiente).
Vemos si existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
$(1, 1, 1) = \lambda_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + \lambda_2(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} - \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + \lambda_2 \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} - \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right\}.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \end{array}\right).$$

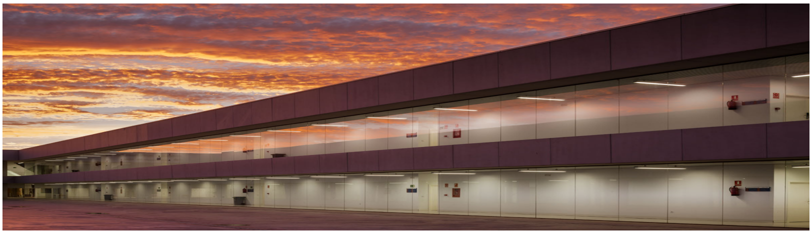
Vemos si es un sistema compatible o no. Como en este caso es compatible al ser sistema compatible determinado, se cumple que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
Veamos ahora si con u_2 no se puede.
Comprobamos si existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
$(1, 1, 0) = \lambda_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + \lambda_2(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} - \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + \lambda_2 \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & = & \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{3}} - \lambda_2 \frac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right\}.$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{array}\right).$$

En este caso tenemos un sistema incompatible, luego $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : u_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
Por lo tanto, u_2 no se puede expresar como combinación lineal de v_1 y v_2 y concluimos que $L(u_1, u_2) \neq L(v_1, v_2)$.

■



Capítulo 5

Aplicaciones lineales

Índice

5.1 Definición de una aplicación lineal

Problema 5.1.1. *Sean* $\mathbb{R}^2$ *y* $P_3(\mathbb{K})[x]$ *dos espacios vectoriales y* $f : \mathbb{R}^2 \to P_3(\mathbb{K})[x]$ *definida por* $f(a, b) = (a+b)x^3 + ax^2 + b$. *Comprobar si* f *es aplicación lineal.*

Solución.
La aplicación es lineal si verifica para todo $v, w \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ las siguientes propiedades:

- $f(v+w) = f(v) + f(w)$.
- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comprobamos que se cumplan ambas propiedades.
$f((a, b)+(c, d)) = f(a+c, b+d) = (a+c+b+d)x^3+(a+c)x^2+(b+d) = (a+b)x^3+(c+d)x^3+ax^2+cx^2+b+d = f(a, b)+f(c, d)$.
$f(\lambda(a, b)) = f(\lambda a, \lambda b) = (\lambda a + \lambda b)x^3 + \lambda ax^2 + \lambda b = \lambda((a+b)x^3 + ax^2 + b) = \lambda f(a, b)$.
Como se cumplen las dos propiedades, hemos demostrado que f es aplicación lineal.
También podríamos haber usado la siguiente proposición: Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \longrightarrow W$ es lineal si y solo si $f(\lambda v+\mu w) = \lambda f(v)+\mu f(w)$, para todo $v, w \in V$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

■

Problema 5.1.2. *Estudiar si las siguientes aplicaciones son aplicaciones lineales:*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x, y) = (x+1, y)$.

(b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por* $g(x, y) = (y, x^2)$.

Solución.
Para estudiarlo, verificaremos que $f(0) = 0$, ya que si tenemos dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W y $f : V \longrightarrow W$ es aplicación lineal, entonces $f(0) = 0$. Esto quiere decir que si se cumple

que $f(0) = 0$, f puede ser lineal, pero si no se cumple, f no es lineal.
Si comprobamos que $f(0) = 0$, podemos pasar a verificar que es lineal usando la siguiente proposición: Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una aplicación $f : V \to W$ es lineal si y solo si $f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$, para todo $v, w \in V$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
(a) $f(0,0) = (0+1,0) = (1,0) \neq (0,0)$. Por lo tanto, f no puede ser aplicación lineal.
(b) $g(0,0) = (0,0^2) = (0,0)$. Luego, g puede ser lineal. Usamos la segunda proposición para comprobarlo.
Sean $v = (a,b), w = (c,d) \in \mathbb{R}^2$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$g(\lambda v + \mu w) = g(\lambda(a,b) + \mu(c,d)) = g((\lambda a, \lambda b) + (\mu c, \mu d)) = g(\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d) = (\lambda b + \mu d, \lambda^2 a^2 + \mu^2 c^2 + 2\lambda a \mu c) = (\lambda b, \lambda^2 a^2) + (\mu d, \mu^2 c^2) + (0, 2\lambda a \mu c) = \lambda(b, \lambda a^2) + \mu(d, \mu c^2) + (0, 2\lambda a \mu c) \neq \lambda g(v) + \mu g(w)$.
Como $g(v) = (b, a^2)$ y $g(w) = (d, c^2)$, entonces g no es lineal.
■

5.2 Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Problema 5.2.1. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(1,0,0) = (1,1)$,
$f(0,1,0) = (2,2)$, $f(0,0,1) = (3,3)$. *Determinar una base del núcleo y de la imagen de* f.

Solución.

Para determinar una base del núcleo partimos de un elemento general del núcleo (pertenecerá a $\mathbb{R}^3$). Sea $(x, y, z) \in Ker(f) \Rightarrow f(x, y, z) = 0$.
Como no conocemos la expresión algebraica de $f(x, y, z)$, hallamos la expresión matricial de f y obtenemos la algebraica a partir de esta.
La ecuación matricial de f es $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
La expresión algebraica se obtiene multiplicando las matrices, luego, nos quedarían 2 expresiones iguales y nos quedamos con una de ellas, $x + 2y + 3z$. Por lo tanto, $f(x, y, z) = x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x + 2y + 3z = 0 \Rightarrow x = -2y - 3z \Rightarrow (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1)$.
Tenemos entonces que $\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ es sistema generador del núcleo de f. Como el rango de la matriz que forman es máximo, son linealmente independientes y forman una base del núcleo de f.
Pasamos ahora a determinar una base de la imagen.
Partimos de la siguiente proposición: Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ aplicación lineal. Si V está generado por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ entonces $f(V)$ (que coincide con la imagen de f), está generado por
$\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$.
Por el enunciado sabemos que la aplicación está definida por $f(1, 0, 0) = (1, 1)$, $f(0, 1, 0) = (2, 2)$, $f(0, 0, 1) = (3, 3)$. Sabemos que $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base y por lo tanto sistema generador de $\mathbb{R}^3$, aplicando la proposición, deducimos que $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ es sistema generador de la imagen de f.
Como el rango de la matriz que forman es 1, significa que una

base la forma solo uno de los vectores. Entonces, podemos decir que $\{(1,1)\}$ es una base de la imagen de f.

■

Problema 5.2.2. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(x,y,z) = (x+y-z, 2y+4z, -x+z)$.

(a) *Probar que* f *es aplicación lineal.*

(b) *Hallar la matriz asociada a* f.

(c) *Hallar el núcleo de* f*, una base y dimensión. Razonar si* f *es inyectiva.*

(d) *Hallar la imagen de* f*, una base y dimensión. Razonar si* f *es sobreyectiva.*

(e) *Comprobar el teorema de la dimensión.*

Solución.
(a) La aplicación f es lineal si y solo si para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Sean $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda u+\mu v) = f(\lambda(u_1,u_2,u_3)+\mu(v_1,v_2,v_3)) = f((\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)+(\mu v_1, \mu v_2, \mu v_3)) = f(\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2, \lambda u_3+\mu v_3) = (\lambda u_1 + \mu v_1 + \lambda u_2 + \mu v_2 - \lambda u_3 - \mu v_3, 2\lambda u_2 + 2\mu v_2 + 4\lambda u_3 + 4\mu v_3, -\lambda u_1 - \mu v_1 + \lambda u_3 + \mu v_3) = (\lambda u_1 + \lambda u_2 - \lambda u_3, 2\lambda u_2 + 4\lambda u_3, -\lambda u_1 + \lambda u_3) + (\mu v_1 + \mu v_2 - \mu v_3, 2\mu v_2 + 4\mu v_3, -\mu v_1 + \mu v_3) = \lambda(u_1 + u_2 - u_3, 2u_2 + 4u_3, -u_1 + u_3) + \mu(v_1 + v_2 - v_3, 2v_2 + 4v_3, -v_1 + v_3) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Por lo tanto, f es aplicación lineal.

(b) Para hallar la matriz asociada a f, tenemos que hallar una base de $\mathbb{R}^3$. Podemos usar la base canónica $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. La matriz está formada por las coordenadas resultantes de aplicar f a los vectores de B, como columnas. Hallamos esas coordenadas. $f(1,0,0) = (1,0,-1)$.
$f(0,1,0) = (1,2,0)$.
$f(0,0,1) = (-1,4,1)$.

Luego, la matriz asociada a f es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, 2y + 4z = 0, -x + z = 0\}$.

$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

$|A| = -4 \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A^*) =$ número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Como el sistema es homogéneo, la única solución es $x = 0, y = 0, z = 0$.
No obstante, una base no puede estar formada por el vector nulo. Luego, no podemos dar una base del núcleo y la dimensión del núcleo es 0.
Como hemos obtenido que $Ker(f) = \{0\}$, entonces f es inyectiva.

(d) Para dar una base de la imagen de f, calculamos las imágenes por f de una base del dominio, por ejemplo tomamos la base canónica
$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.
Ya antes calculamos que $f(1,0,0) = (1,0,-1)$, $f(0,1,0) = (1,2,0)$, $f(0,0,1) = (-1,4,1)$.
Estos vectores obtenidos, como surgen de aplicar f a un sistema generador del dominio (la base canónica), son también sistema

generador de la imagen. Para hallar una base de la imagen nos quedamos con los linealmente independientes, que en este caso son los tres. Por lo tanto,
$B_{Im(f)} = \{(1,0,-1),(1,2,0),(-1,4,1)\}$.
De esto se deduce que $dim(Im(f)) = 3$. Como $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$, entonces f es sobreyectiva.

(e) El teorema de la dimensión nos dice que para una aplicación lineal $f : V \to W$, se tiene que $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$. En nuestro caso, $V = \mathbb{R}^3$ y nos queda $dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 0 + 3$, luego queda comprobado.

■

Problema 5.2.3. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (x - y, x + y, x)$.*

(a) Probar que f es aplicación lineal.

(b) Hallar la matriz asociada a f.

(c) Hallar el núcleo de f, una base y dimensión. Razonar si f es inyectiva.

(d) Hallar la imagen de f, una base y dimensión. Razonar si f es sobreyectiva.

(e) Comprobar el teorema de la dimensión.

Solución.
(a) La aplicación f es lineal si y solo si para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(\lambda u+\mu v) = \lambda f(u)+\mu f(v)$.
Sean $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda u+\mu v) = f(\lambda(u_1,u_2)+\mu(v_1,v_2)) = f((\lambda u_1,\lambda u_2)+(\mu v_1,\mu v_2)) = f(\lambda u_1+\mu v_1, \lambda u_2+\mu v_2) = (\lambda u_1+\mu v_1-\lambda u_2-\mu v_2, \lambda u_1+\mu v_1+\lambda u_2+$

$\mu v_2, \lambda u_1 + \mu v_1) = (\lambda u_1 - \lambda u_2, \lambda u_1 + \lambda u_2, \lambda u_1) + (\mu v_1 - \mu v_2, \mu v_1 + \mu v_2, \mu v_1) = \lambda(u_1 - u_2, u_1 + u_2, u_1) + \mu(v_1 - v_2, v_1 + v_2, v_1) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Por lo tanto, f es aplicación lineal.

(b) Para hallar la matriz asociada a f, tenemos que hallar una base de $\mathbb{R}^2$. Podemos usar la base canónica $B = \{(1,0),(0,1)\}$. La matriz está formada por las coordenadas resultantes de aplicar f a los vectores de B, como columnas. Hallamos esas coordenadas.
$f(1,0) = (1,1,1)$. $f(0,1) = (-1,1,0)$.
Luego, la matriz asociada a f es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $Ker(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0, x + y = 0, x = 0\}$.
Sabiendo que $x = 0$, despejando, obtenemos que $y = 0$.
No obstante, una base no puede estar formada por el vector nulo. Luego, no podemos dar una base del núcleo y la dimensión del núcleo es 0.
Como hemos obtenido que $Ker(f) = \{0\}$, entonces f es inyectiva.

(d) Para dar una base de la imagen de f, calculamos las imágenes por f de una base del dominio, por ejemplo la base canónica $B = \{(1,0),(0,1)\}$.
Ya antes calculamos que $f(1,0) = (1,1,1)$, $f(0,1) = (-1,1,0)$.
Estos vectores obtenidos, como surgen de aplicar f a un sistema generador del dominio (la base canónica), son también sistema generador de la imagen. Para hallar una base de la imagen nos quedamos con los linealmente independientes, que en este caso son los dos. Por lo tanto, $B_{Im(f)} = \{(1,1,1),(-1,1,0)\}$.

Para ver si es sobreyectiva, comprobamos si $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$. No obstante, en este caso $dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq 2 = dim(Im(f))$. Luego, f no es sobreyectiva.

(e) Por el teorema de la dimensión, sabemos que para una aplicación lineal $f : V \to W$, se tiene que $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$. En nuestro caso, $V = \mathbb{R}^2$, y nos queda $dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 0 + 2$, luego queda comprobado.

■

Problema 5.2.4. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(1, -1) = (-1, -2, -3)$*,* $f(-3, 2) = (0, 5, 3)$*.*

(a) Dar la expresión algebraica de f.

(b) Hallar una base y dimensión del núcleo de f.

(c) Hallar una base y dimensión de la imagen de f.

(d) Razonar si f es biyectiva.

(e) Comprobar el teorema de la dimensión.

Solución.

(a) Nos centramos en obtener la ecuación matricial de f y a partir de ella, hallamos la expresión algebraica. Para la ecuación matricial, necesitamos la matriz A asociada a f, la cual obtenemos despejando en la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Por el enunciado, tomamos $(x, y) = (1, -1)$ y $(x', y', z') = (-1, -2, -3)$. Lo mismo hacemos con los otros dos vectores que nos dan. Entonces,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-b &= -1, \\ c-d &= -2, \\ e-g &= -3. \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3a+2b &= 0, \\ -3c+2d &= 5, \\ -3e+2g &= 3. \end{cases}$$

- $\begin{cases} a-b &= -1 \\ -3a+2b &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 3.$

- $\begin{cases} c-d &= -2 \\ -3c+2d &= 5 \end{cases} \Rightarrow c = -1, d = 1.$

- $\begin{cases} e-g &= -3 \\ -3e+2g &= 3 \end{cases} \Rightarrow e = 3, g = 6.$

Por lo tanto, la matriz A asociada a f es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Ahora sí podemos usar la ecuación matricial para obtener la expresión algebraica de f.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' &= 2x+3y \\ y' &= -x+y \\ z' &= 3x+6y \end{cases}.$$

$f(x, y) = (x', y', z') \Rightarrow f(x, y) = (2x + 3y, -x + y, 3x + 6y)$.

(b) $Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0, -x + y = 0, 3x + 6y = 0\}$.

Despejando, obtenemos que $x = y = 0$.

No obstante, una base no puede estar formada por el vector nulo. Luego, no podemos dar una base del núcleo y la dimensión del núcleo es 0.

(c) Para dar una base de la imagen de f, calculamos las imágenes por f de una base del dominio, por ejemplo tomamos la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
$f(1, 0) = (2, -1, 3)$. $f(0, 1) = (3, 1, 6)$.
Estos vectores obtenidos, como surgen de aplicar f a un sistema generador del dominio (la base canónica), son también sistema generador de la imagen. Para hallar una base de la imagen nos quedamos con los linealmente independientes, que en este caso son los dos. Por lo tanto, $B_{Im(f)} = \{(2, -1, 3), (3, 1, 6)\}$ y $dim(Im(f)) = 2$.

(d) Es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.
Es inyectiva porque $Ker(f) = \{0\}$.
Para ver si es sobreyectiva, debe cumplirse
$dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$. En este caso, $dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq 2 = dim(Im(f))$. Luego, no es sobreyectiva.
Como no es sobreyectiva, concluimos que f no es biyectiva.

(e) Por el teorema de la dimensión, para una aplicación lineal $f : V \to W$ se tiene que $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$. En nuestro caso, $V = \mathbb{R}^2$ y nos queda $dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 0+2$, luego queda comprobado.

∎

Problema 5.2.5. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2y, x + y, -x)$.*

(a) Comprobar si f es aplicación lineal y hallar la matriz asociada a f.

(b) Determinar una base y dimensión del núcleo de f.

(c) Determinar una base y dimensión de la imagen de f.

(d) Razonar si f es biyectiva.

(e) Comprobar el teorema de la dimensión.

Solución.
(a) La aplicación f es lineal si y solo si para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Sean $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ y $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$f(\lambda u + \mu v) = f(\lambda(u_1, u_2) + \mu(v_1, v_2)) =$
$f((\lambda u_1, \lambda u_2) + (\mu v_1, \mu v_2)) = f(\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2) = (2\lambda u_2 + 2\mu v_2, \lambda u_1 + \mu v_1 + \lambda u_2 + \mu v_2, -\lambda u_1 - \mu v_1) = (2\lambda u_2, \lambda u_1 + \lambda u_2, -\lambda u_1) + (2\mu v_2, \mu v_1 + \mu v_2, -\mu v_1) = \lambda(2u_2, u_1 + u_2, -u_1) + \mu(2v_2, v_1 + v_2, -v_1) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.
Por lo tanto, f es aplicación lineal.
Para hallar la matriz asociada a f, tenemos que hallar una base de $\mathbb{R}^2$. Podemos usar la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. La matriz está formada por las coordenadas resultantes de aplicar f a los vectores de B, como columnas. Hallamos esas coordenadas.
$f(1, 0) = (0, 1, -1)$. $f(0, 1) = (2, 1, 0)$.
Luego, la matriz asociada a f es $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $Ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y = 0, x + y = 0, -x = 0\}$.
Obtenemos que $x = y = 0$.
De este modo, $Ker(f) = \{(0, 0)\}$. Dado que el único vector que está en el núcleo es el nulo y este no puede estar en una base, no podemos dar una base del núcleo y $dim(Ker(f)) = 0$.

(c) Para dar una base de la imagen de f, calculamos las imágenes por f de una base del dominio, por ejemplo la base canónica $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Ya antes calculamos que $f(1,0) = (0,1,-1)$, $f(0,1) = (2,1,0)$. Estos vectores obtenidos, como surgen de aplicar f a un sistema generador del dominio (la base canónica), son también sistema generador de la imagen. Para hallar una base de la imagen nos quedamos con los linealmente independientes, que en este caso son los dos. Por lo tanto, $B_{Im(f)} = \{(0,1,-1),(2,1,0)\}$ y $dim(Im(f)) = 2$.

(d) Es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.
Es inyectiva porque $Ker(f) = \{0\}$.
Para ver si es sobreyectiva, debe cumplirse que $dim(Im(f)) = dim(\mathbb{R}^3)$. En este caso, $dim(\mathbb{R}^3) = 3 \neq 2 = dim(Im(f))$. Entonces, no es sobreyectiva.
Como no es sobreyectiva, concluimos que f no es biyectiva.

(e) El teorema de la dimensión nos dice que para una aplicación lineal $f : V \to W$ se tiene que $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$. En nuestro caso, $V = \mathbb{R}^2$ y nos queda $dim(\mathbb{R}^2) = 2 = 0 + 2$, luego queda comprobado.

■

Problema 5.2.6. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(0,0,1) = (0,0,1)$*,*
$f(1,-1,0) = (1,-1,0)$*,* $f(1,1,0) = (0,0,0)$*.*

(a) Hallar la matriz asociada a f*.*

(b) Determinar una base del núcleo y de la imagen de f*.*

(c) Razonar si f *es biyectiva.*

Solución.

(a) Para obtener la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{pmatrix}$ asociada a f, usamos la ecuación matricial de f.
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ siendo $\{(0,0,1),(1,-1,0),(1,1,0)\}$ los vectores que se sustituyen en la matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\{(0,0,1),(1,-1,0),(0,0,0)\}$ los que se sustituyen en $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & g \\ h & i & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ g \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & 0, \\ g & = & 0, \\ j & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} a-b & = & 1, \\ d-e & = & -1, \\ h-i & = & 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 0, \\ d+e & = & 0, \\ h+i & = & 0. \end{array} \right.$$

- $\left\{ \begin{array}{rcl} a-b & = & 1 \\ a+b & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, a = \frac{1}{2}.$

- $\left\{ \begin{array}{rcr} d-e & = & -1 \\ d+e & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow e = \frac{1}{2}, d = -\frac{1}{2}.$

- $\left\{ \begin{array}{rcl} h-i & = & 0 \\ h+i & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow i = 0, h = 0.$

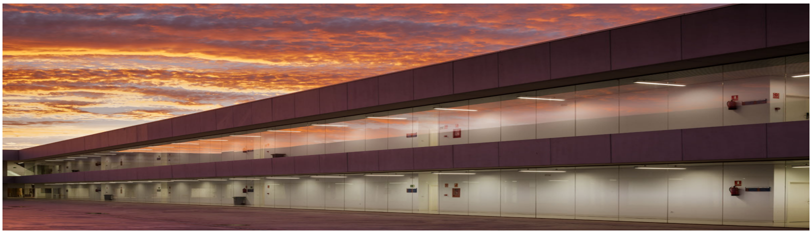
Por lo tanto, la matriz A asociada a f es $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Para determinar una base del núcleo, partimos de un elemento (x, y, z) general del núcleo (pertenece a $\mathbb{R}^3$).
Sea $(x, y, z) \in Ker(f) \Rightarrow f(x, y, z) = 0$.
Como no conocemos la expresión algebraica de f, que es $f(x, y, z)$, la hallamos a partir de su ecuación matricial.
La ecuación matricial de f es $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.
La expresión algebraica se obtiene multiplicando las matrices.
$\begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{-x+y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' &= \frac{x-y}{2}, \\ y' &= \frac{-x+y}{2}, \\ z' &= 0. \end{cases}$
Por lo tanto, $f(x, y, z) = (x', y', z') = (\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0)$.
Tenemos que $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow (\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0) = (0, 0, 0)$, entonces
$\begin{cases} \frac{x-y}{2} &= 0 \\ \frac{-x+y}{2} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = y, z = \alpha$ con $\alpha, y \in \mathbb{R}$.
$(x, y, z) = (y, y, \alpha) = y(1, 1, 0) + \alpha(0, 0, 1)$.
Tenemos entonces que $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es sistema generador del núcleo de f (porque generan (x, y, z), que es un vector cualquiera que pertenece al núcleo de f). Como el rango de la matriz que forman es máximo, son linealmente independientes, luego forman una base del núcleo de f.
Pasamos ahora a determinar una base de la imagen.
Por una proposición, sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \to W$ aplicación lineal. Si V está generado por $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$

entonces $f(V)$ (que es lo mismo que la imagen de f), está generado por $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$.
Usamos ahora la base canónica $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (nuestro V), que es también sistema generador de $\mathbb{R}^3$ y con ello tenemos que
$\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\} =$
$\{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0,0,0)\}$ es sistema generador de la imagen de f, según la proposición anterior.
Como el rango de la matriz que forman es 1, significa que una base la forma solo uno de los vectores. Podemos decir, por lo tanto, que $\{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)\}$ es una base de la imagen de f.

(c) Para que sea biyectiva, debe ser inyectiva y sobreyectiva.
No es inyectiva, ya que en el apartado anterior, hemos visto que $Ker(f) \neq \{0\}$.
De este modo, al no ser inyectiva, concluimos que f no es biyectiva.

■



Capítulo 6

Diagonalización de matrices

Índice

6.1 Autovalores y autovectores

Problema 6.1.1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & x \end{pmatrix}$.

(a) Estudiar para qué valores de x es diagonalizable y para cuáles no.

(b) Para $x = 4$, calcular A^n con $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

(a) Empezamos con el estudio de las raíces del polinomio característico.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left(-\lambda\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & x-\lambda \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (3-\lambda)(-\lambda[(1-\lambda)(x-\lambda)]) = (3-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(x-\lambda)$$

Si x es distinto de 3, 1 y 0, tendremos 4 autovalores distintos para una matriz de orden 4, por lo que es diagonalizable. Distinguimos el resto de casos:

- Si $x = 3$:

  Entonces $\lambda_1 = 3$ es autovalor con multiplicidad algebraica 2, $\lambda_2 = 0$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_3 = 1$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1.

  Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 3$.

  $$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\left\{\begin{array}{lcl} -3y & = & 0 \\ 2y-2z & = & 0 \\ -x+3y+z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = 0, z = 0, t = \alpha, x = 0, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V_1 =< (0,0,0,1) >.$$

La multiplicidad geométrica asociada al autovalor $\lambda_1 = 3$ es 1, que no coincide con su multiplicidad algebraica que es 2.

Entonces, para $x = 3$, la matriz no es diagonalizable.

- Si $x = 1$:

  Entonces $\lambda_2 = 1$ es autovalor con multiplicidad algebraica 2, $\lambda_1 = 3$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_3 = 0$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1.

  Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = 1$.

  $$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x & = & 0 \\ -y & = & 0 \\ 2y & = & 0 \\ -x + 3y + z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0, t = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V_2 =< (0, 0, 0, 1) >.$$

  La multiplicidad geométrica asociada al autovalor $\lambda_2 = 1$ es 1, que no coincide con su multiplicidad algebraica que es 2.

  Entonces, para $x = 1$, la matriz no es diagonalizable.

- Si $x = 0$:

  Entonces $\lambda_3 = 0$ es autovalor con multiplicidad algebraica 2, $\lambda_1 = 3$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 1$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1.

  Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_3 = 0$.

$$(A-\lambda_3 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\left\{\begin{array}{lcl} 3x & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \\ -x+3y+z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0, t = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V_3 =< (0,0,0,1) >.$

La multiplicidad geométrica asociada al autovalor $\lambda_3 = 0$ es 1, que no coincide con su multiplicidad algebraica que es 2.

Entonces, para $x = 0$, la matriz no es diagonalizable.

(b) Para calcular A^n, tenemos que hallar una matriz de paso y otra diagonal de forma que $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1}) = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}P^{-1}.$
Para poder aplicar esto, tenemos que diagonalizar A. Como es $x \neq 3, 1, 0$, ya vimos en el apartado anterior que en este caso A es diagonalizable.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$
Previamente calculamos los autovalores $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 4$.
Calculamos los autovectores asociados.

- Para $\lambda_1 = 3$:

$$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\left\{\begin{array}{lcl} -3y & = & 0 \\ 2y-2z & = & 0 \\ -x+3y+z+t & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = 0,\ z = 0, t = \alpha, x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

Luego, $B_{(\lambda_1=3)} = \{(1,0,0,1)\}$.

- Para $\lambda_2 = 0$:

$$(A-\lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\left\{\begin{array}{lcl} 3x & = & 0 \\ 2y+z & = & 0 \\ -x+3y+z+4t & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow x = 0, y = \alpha, z = -2\alpha, t = -\frac{1}{4}\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

Luego, $B_{(\lambda_2=0)} = \{(0,1,-2,-\frac{1}{4})\}$.

- Para $\lambda_3 = 1$:

$$(A-\lambda_3 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{cases} 2x &= 0 \\ -y &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x+3y+z+3t &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0, t = \alpha, z = -3\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

Luego, $B_{(\lambda_3=1)} = \{(0,0,-3,1)\}$.

- Para $\lambda_4 = 4$:

$$(A-\lambda_4 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\begin{cases} -x &= 0 \\ -4y &= 0 \\ 2y-3z &= 0 \\ -x+3y+z &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0, t = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

Luego, $B_{(\lambda_4=4)} = \{(0,0,0,1)\}$.

A partir de lo anterior podemos obtener la matriz diagonal D, la matriz de paso P y su inversa.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{11}{12} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que la potencia de una matriz diagonal (D) es elevar cada uno de sus miembros a dicha potencia, calculamos entonces A^n.

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{11}{12} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3^n & 0 & 1 & 2^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & \frac{11}{12} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2^{2n} + 3^n & \frac{11 \cdot 2^{2n} - 8}{12} & \frac{2^{2n}-1}{3} & 2^{2n} \end{pmatrix}.$$

■

Problema 6.1.2. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 0 \\ -6 & -8 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. *Hallar* A^k.

Solución.

Para hallar A^k lo más sencillo es diagonalizar A, ya que si A es diagonalizable, existen P, D tales que $A = PDP^{-1}$, siendo D diagonal y P invertible, de tal modo que $A^k = (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdot \ldots \cdot (PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$.

Primero comprobamos si A es diagonalizable. Para ello calculamos el polinomio característico para hallar los autovalores y luego sus autovectores asociados.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 12 & 0 \\ -6 & -8-\lambda & 0 \\ 4 & 8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda-16 =$$
$-(\lambda-4)(\lambda+2)(\lambda-2)$.

Los autovalores son las raíces del polinomio característico, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$. Como el polinomio característico de la matriz de orden 3 tiene 3 raíces distintas, podemos afirmar que A es diagonalizable.

Pasamos a calcular los autovectores asociados a cada autovalor.

- Para $\lambda_1 = 4$:

  $$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 12 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} -6x-12y & = & 0 \\ 4x+8y-2z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x=\alpha, y=-\tfrac{1}{2}\alpha, z=0, \alpha\in\mathbb{R}.$$

  Luego, $B_{V(\lambda_1=4)} = \{(1,-\frac{1}{2},0)\}$.

- Para $\lambda_2 = -2$:

  $$(A-\lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 12 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\left\{ \begin{array}{rcl} -6x-6y & = & 0 \\ 4x+8y+4z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x=\alpha, y=-\alpha, z=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}.$$

  Luego, $B_{V(\lambda_2=-2)} = \{(1,-1,1)\}$.

- Para $\lambda_3 = 2$:

  $$(A-\lambda_3 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 12 & 0 \\ -6 & -10 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8x+12y & = & 0 \\ -6x-10y & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow y=0, x=0, z=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}.$$

Luego, $B_{V(\lambda_3=2)} = \{(0,0,1)\}$.

A partir de lo anterior podemos obtener la matriz diagonal D y la matriz de paso P.

$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sabemos que la potencia de una matriz diagonal (D), es elevar cada uno de sus miembros a dicha potencia, calculamos entonces A^k.

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^k & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2k} & (-2)^k & 0 \\ \frac{(-2)^{2k}}{2} & 2^k & 0 \\ 0 & (-2)^k & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2^{2k}+2^k & 2\cdot 2^{2k}+2\cdot 2^k & 0 \\ (-2)^{2k}-2^k & (-2)^{2k}-2\cdot 2^k & 0 \\ 2\cdot 2^k & 4\cdot 2^k & 2^k \end{pmatrix}.$$

■

Problema 6.1.3. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. *Comprobar que A es diagonalizable.*

Solución.
Para comprobar si es diagonalizable, primero calculamos el polinomio característico.
$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.
Por lo tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.
Como la matriz es de orden 3 y la suma de las multiplicidades algebraicas es 3 también, se cumple la primera condición para que A sea diagonalizable. Para la segunda condición necesitamos calcular los autovectores asociados a cada autovalor.

- Para $\lambda_1 = 1$:
$$(A - \lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -10 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x - 10y & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = \alpha, x = \tfrac{5}{3}\alpha, z = \tfrac{1}{3}\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$$
Luego, $B_{V(\lambda_1=1)} = \{(\frac{5}{3}, 1, \frac{1}{3})\}$. La multiplicidad geométrica es 1, que es igual a la algebraica para $\lambda_1 = 1$.

- Para $\lambda_2 = 2$:
$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = \alpha, x = 2\alpha, z = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Luego, $B_{V(\lambda_2=2)} = \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. La multiplicidad geométrica es 2, que es igual a la algebraica para $\lambda_2 = 2$.

Como cada multiplicidad geométrica coincide con su respectiva algebraica para cada autovalor, la segunda condición para ser diagonalizable se cumple. Por lo tanto, A es diagonalizable.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 6.1.4. *Dada la matriz* $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *calcular el valor de* a *para que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sea un autovector asociado al autovalor* 2.

Solución.

Sea A la matriz dada. Para que $(1, 1, 1)$ sea autovector asociado al autovalor 2, se debe cumplir que $Av = \lambda v$, siendo $v = (1, 1, 1)$ y $\lambda = 2$. Con esta igualdad, podemos hallar a.

$$Av = \lambda v \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1.$$

■

Problema 6.1.5. *Calcular los autovalores y autovectores de las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución.
Empezamos por la matriz A calculando su polinomio característico. Sus raíces son los autovalores.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+9\lambda^2-15\lambda+7$$

$= -(\lambda-1)^2(\lambda-7)$.

Por lo tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 7$ con multiplicidad algebraica 1.
Calculamos ahora los autovectores asociados a cada autovalor.

- Para $\lambda_1 = 1$:

  $$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $\left\{ x+y+z = 0 \right. \Rightarrow y = \alpha, z = \beta, x = -\alpha-\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  Luego, los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$ son $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$.

- Para $\lambda_2 = 7$:

  $$(A-\lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $\left\{ \begin{array}{rcl} -5x+y+z & = & 0 \\ 2x-4y+2z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = \alpha, z = -9\alpha, y = 14\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

  Luego, el autovector asociado a $\lambda_2 = 7$ es $(1, 14, -9)$.

Ahora seguimos el mismo procedimiento que antes para la matriz B.

$$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2.$$

El polinomio característico no tiene raíces, ya que no hay valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ que haga que $(\lambda^2+1)^2 = 0$. No tiene autovalores y, por lo tanto, tampoco autovectores.

■

Problema 6.1.6. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$ *de la que se sabe que el vector* $(2,0,-1)$ *es autovector asociado al autovalor* $\lambda = -1$. *Calcular los restantes valores y vectores propios.*

Solución.

Si $v = (2,0,-1)$ es vector asociado al autovalor $\lambda = -1$, se debe cumplir que $Av = \lambda v$, entonces

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+6 \\ -b+6 \\ -c-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} -a+6 & = & -2 \\ -b+6 & = & 0 \\ -c-4 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 8, b = 6, c = -5.$$

Por lo tanto, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Para calcular los autovalores y autovectores, se hacen los mismos pasos que en los ejercicios anteriores.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1-\lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$$
$= -(\lambda+1)^3$.
Por lo tanto, el único autovalor es $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica 3.
$$(A-\lambda I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$\left\{ 4x + 8z = 0 \right. \Rightarrow y = \alpha, z = \beta, x = -2\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
Luego, $B_V = \{(-2,0,1),(0,1,0)\}$.
Los autovectores asociados son $(-2,0,1)$, $(0,1,0)$.
Podemos apreciar que si multiplicamos el primero por -1, resulta el autovector del enunciado.

■

Problema 6.1.7. *Hallar los autovalores de la matriz* $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ *sabiendo que admite como autovectores* $(1,1,0)$, $(-1,0,2)$, $(0,1,-1)$.

Solución.
Se debe cumplir que $Av = \lambda v$, siendo v un autovector y λ el autovalor al que está asociado.
$$\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 \\ b+2 \\ c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a+1 = \lambda_1 \\ b+2 = \lambda_1 \\ c-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a+1 = b+2, c = 1.$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ 1 & -1 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+2p \\ -b+2q \\ 2r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ 0 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2p & = & -\lambda_2 \\ -b+2q & = & 0 \\ 2r-1 & = & 2\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$a - 2p = \lambda_2, \frac{2r-1}{2} = \lambda_2, 2q = b.$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ 1 & -1 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -p+1 \\ -q+2 \\ -r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -p+1 & = & 0 \\ -q+2 & = & \lambda_3 \\ -r-1 & = & -\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$-q+2 = r+1, p = 1.$

Las ecuaciones que hemos obtenido son $\begin{cases} a+1 & = & b+2, \\ a-2p & = & \frac{2r-1}{2}, \\ -q+2 & = & r+1, \\ 2q = b, \\ c = 1, \\ p = 1. \end{cases}$

Sabemos que $p = 1$, luego la segunda ecuación pasa a ser $a-2 = \frac{2r-1}{2}$.

De la cuarta ecuación, obtenemos que $q = \frac{b}{2}$ y con esto podemos unir la tercera y la cuarta en una sola, $-\frac{b}{2} + 2 = r + 1$.

De la primera ecuación, sabiendo que $a = b+1$, podemos unirla con la segunda para obtener $b - 1 = \frac{2r-1}{2}$ y podemos formar un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas y resolverlo, siendo una de las ecuaciones esta última y la otra la de $-\frac{b}{2} + 2 = r + 1$.

Resolviendo el sistema, obtenemos que $r = \frac{1}{2}$ y que $b = 1$.

Con todos estos valores y las ecuaciones que tenemos, podemos obtener que $a = 2$ y $q = \frac{1}{2}$.

Habiendo hallado todos los valores de la matriz, podemos obtener los autovalores.
$a + 1 = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 3.$
$a - 2p = \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$
$-q + 2 = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{3}{2}.$

■

Problema 6.1.8. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Calcular los valores de a para los que A es diagonalizable.*

Solución.
Empezamos con el estudio de las raíces del polinomio característico.
$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ a & -2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda+2)^2(\lambda-2).$
Entonces, $\lambda_1 = -2$ es autovalor con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 2$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1.

- Para $\lambda_1 = -2$:
  $(A - \lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $\left\{\begin{array}{lcl} 3x + z & = & 0, \\ ax + 2z & = & 0, \\ 3x + z & = & 0. \end{array}\right.$
  La primera y la tercera ecuación son iguales independientemente de a. Si $a = 6$, la segunda ecuación es equivalente

a las otras (se obtiene multiplicando por 2), por lo que la única ecuación que tendríamos es $3x + z = 0$ y como solución $z = -3x$, $y = \alpha$, por lo que la base del subespacio propio asociado es $\{(1, 0, -3), (0, 1, 0)\}$, coincidiendo la multiplicidad algebraica con la geométrica.

Si $a \neq 6$, nos quedamos con la segunda ecuación y una de las otras dos, $\left\{ \begin{array}{rcl} ax + 2z & = & 0 \\ 3x + z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow z = 0, x = 0, y = \beta.$

El autovector asociado es $(0, 1, 0)$, por lo que no coincide la multiplicidad algebraica con la geométrica y A no es diagonalizable.

Luego, a debe ser 6.

Si $a = 6$, seguimos comprobando con el otro autovalor.

- Para $\lambda_2 = 2$:

  $(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
  $\left\{ \begin{array}{rcl} -x + y & = & 0 \\ 6x - 4y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = \alpha, x = y = \alpha, z = -\alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

  Se obtiene como autovector el $< (1, 1, -1) >$. Luego, la multiplicidad algebraica, que es 1, coincide con la geométrica.

Por lo tanto, para $a = 6$, A es diagonalizable.
Buscamos ahora otros posibles valores de a comenzando el mismo proceso pero con $\lambda_2 = 2$.
Para $\lambda_2 = 2$:

$$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x + z & = & 0 \\ ax - 2y + 2z & = & 0 \\ 3x - z & = & 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 0, x = 0.$$

No obstante, $(0, 0, 0)$ no puede ser base, luego la dimensión del subespacio es 0.
Como no obtenemos ningún valor de a nuevo comenzando por el otro autovalor, concluimos que A es diagonalizable solo para $a = 6$.

■

Problema 6.1.9. *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguar qué relación debe existir entre a, b, c para que para cada autovalor coincida la multiplicidad algebraica y geométrica.

Solución.
En otras palabras, tenemos que determinar la relación entre a, b, c para que las matrices sean diagonalizables.
Empezamos calculando el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 2-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

Entonces, $\lambda_1 = 1$ es autovalor con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 2$ es autovalor con multiplicidad algebraica 1.

- Para $\lambda_1 = 1$:

  $$(A - \lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\begin{cases} ay + bz & = & 0, \\ y + cz & = & 0. \end{cases}$$

  Si $c = \gamma, b = \sigma c, a = \sigma, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$, la primera ecuación es proporcional a la segunda. Luego, nos quedamos con una ecuación y como solución tenemos $x = \alpha, y = \beta, z = -\frac{\beta}{c}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siguiendo esto, tenemos como base del subespacio asociado $\{(1,0,0),(0,1,-\frac{1}{c})\}$, por lo que la multiplicidad geométrica es 2, que coincide con la algebraica. En este caso, continuamos comprobando para el otro autovalor, sustituyendo a, b, c por los valores anteriores.

- Para $\lambda_2 = 2$:

  $$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & \sigma & \sigma\gamma \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

  $$\begin{cases} -x + \sigma y + \sigma\gamma z & = & 0, \\ -z & = & 0. \end{cases}$$

  Nos quedamos con solo 2 ecuaciones ya que la fila 2 es proporcional a la fila 3 de la matriz y tenemos como solución $z = 0, y = \alpha, x = \sigma\alpha, \alpha, \sigma \in \mathbb{R}$. Entonces, el autovector asociado es el $(\sigma, 1, 0)$ y tenemos que la multiplicidad geométrica es 1, que coincide con la algebraica.

Para la relación $c = \gamma, b = \sigma\gamma, a = \sigma, \sigma, \gamma \in \mathbb{R}$, A es diagonalizable.

Ahora volvemos a hacer lo mismo, pero empezando por el otro autovalor para ver si obtenemos otros valores de a, b, c.

- Para $\lambda_2 = 2$:
  $$(A - \lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
  $$\begin{cases} -x + ay + bz &= 0, \\ -z &= 0. \end{cases}$$
  Nos quedamos con solo 2 ecuaciones ya que la fila 2 es proporcional a la fila 3 de la matriz y tenemos como solución $z = 0, y = \alpha, x = a\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Entonces, el autovector asociado es el $(a, 1, 0)$ y tenemos que la multiplicidad geométrica es 1, que coincide con la algebraica.

Como no hemos obtenido nuevo valor de a, b, c para λ_1, obtenemos los mismos que antes.
Concluimos que para $c = \gamma, b = \sigma\gamma, a = \sigma, \sigma, \gamma \in \mathbb{R}$, A es diagonalizable.

■

6.2 Cálculo de matriz de paso y matriz diagonal

Problema 6.2.1. *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & x \end{pmatrix}$. *Averiguar los valores de x para los que es diagonalizable.*

Solución.
Empezamos con el estudio de las raíces del polinomio característico.
$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & x-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + \lambda^2 x - 3\lambda x + 2x = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-x)$.
Para $x \neq 1$ y $x \neq 2$, tendríamos 3 autovalores con multiplicidad algebraica 1, es decir, 3 raíces distintas para el polinomio característico. Por lo tanto, para $x \neq 1$ y $x \neq 2$, A es diagonalizable.
Probamos ahora dando a x los valores 1 y 2, para ver si con ellos es también diagonalizable.

- Si $x = 1$:

  Tenemos 2 autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 1.

  - Para $\lambda_1 = 1$:
    $(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
    $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ 3x & = & 0 \\ -x & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 0 \\ y & = & \alpha \\ z & = & \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow$
    $V_1 =< (0,1,0), (0,0,1) >$.
    La multiplicidad geométrica es 2, que coincide con la algebraica.
  - Para $\lambda_2 = 2$:
    $(A-\lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 0 \\ -x-z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\alpha \\ y & = & -3\alpha \\ z & = & \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$V_2 =< (-1,-3,1) >$.

La multiplicidad geométrica es 1, que coincide con la algebraica.

Por lo tanto, para $x = 1$, A también es diagonalizable.

- Si $x = 2$:

  Tenemos 2 autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

  - Para $\lambda_1 = 1$:

    $$(A-\lambda_1 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

    $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 3x & = & 0 \\ -x+z & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \alpha \\ z & = & 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow$$

    $V_1 =< (0,1,0) >$.

    La multiplicidad geométrica es 1, que coincide con la algebraica.

  - Para $\lambda_2 = 2$:

    $$(A-\lambda_2 I)X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

    $$\left\{\begin{array}{rcl} 3x-y & = & 0 \\ -x & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 0 \\ z & = & \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow$$

    $V_2 =< (0,0,1) >$.

La multiplicidad geométrica es 1, que no coincide con la algebraica, que es 2.

Entonces, para $x = 2$, A no es diagonalizable.

Concluimos que, para $x \neq 2$, A es diagonalizable.

■

Problema 6.2.2. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Estudiar, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, cuando es diagonalizable la matriz A.

(b) Considerando el valor de α obtenido para que la matriz diagonalice, obtener la matriz de paso y matriz diagonal.

Solución.

(a) Calculamos el polinomio característico y sus raíces, que son los autovalores de la matriz A.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2-\alpha \\ 0 & -1-\lambda & \alpha \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(1-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0.$$

Por lo tanto, los autovalores y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 1 \text{ con } m_a(\lambda_1) = 2,$$
$$\lambda_2 = -1 \text{ con } m_a(\lambda_1) = 1.$$

La matriz A es diagonalizable cuando la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coinciden. La relación

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

nos lleva a deducir que para el autovalor $\lambda_2 = -1$ siempre coincide la multiplicidad algebraica y geométrica, ya que $1 \leq m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$.
Sin embargo, para el autovalor $\lambda_1 = 1$ no podemos afirmar si la multiplicidad geométrica es 1 o 2, al verificarse $1 \leq m_g(\lambda_1) \leq m_a(\lambda_1) = 2$.
Tenemos que estudiar la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor λ_1.

$$V(\lambda_1) = \left\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_1 I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A - I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2+\alpha \\ 0 & -2 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{F_{21}^{+2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4+3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Distinguimos casos:

- Si $\alpha \neq -\frac{4}{3}$:

  La solución del sistema de ecuaciones es $x = \beta$, $y = 0$, $z = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, con lo que una base del subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

  $$B_{V(\lambda_1)} = B_{V(1)} = \{(1,0,0)\}\,.$$

  Por lo tanto, la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden para el autovalor λ_1, $m_a(\lambda_1) = 2 \neq 1 = m_g(\lambda_1)$, y afirmamos que la matriz A no es diagonalizable.

- Si $\alpha = -\frac{4}{3}$:

  En este caso la solución del sistema de ecuaciones es $x = \beta$, $y = -\frac{2}{3}\gamma$, $z = \gamma$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Una base del subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ es

  $$B_{V(\lambda_1)} = B_{V(1)} = \{(1,0,0), (0,-2,3)\}\,.$$

  La multiplicidad algebraica y geométrica coinciden para el autovalor $\lambda_1 = 1$, $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, y para el autovalor $\lambda_2 = -1$ como vimos anteriormente, luego afirmamos que la matriz A es diagonalizable en este caso.

(b) Ahora consideramos $\alpha = -\frac{4}{3}$. Para construir la matriz de paso solo necesitamos obtener el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$.

$$V(\lambda_2) = \left\{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda_2 I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A + I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \overset{F_3^{\frac{1}{2}}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{23}^{\frac{4}{3}}}{\overset{F_{13}^{\frac{2}{3}}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{1}{2}\beta, y = \beta, z = 0$, con $\beta \in \mathbb{R}$. Una base del subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ es

$$B_{V(\lambda_2)} = B_{V(-1)} = \{(1, 2, 0)\}.$$

Finalmente, concluimos que diagonalización de A es

$$D = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos y ordenados, es

$$P = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

■

6.3 Forma canónica de Jordan

Problema 6.3.1. *Calcular la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de* *(a)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución.

(a) En primer lugar calculamos los autovalores de A mediante el polinomio característico.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(-\lambda)(-4-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 4\lambda + 4.$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 16}}{2} = -2.$$

Tenemos $\lambda = -2$ como único autovalor y $m_a(\lambda) = 2$. Calculamos la base del subespacio propio asociado a

$$V(\lambda) = \left\{\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (A - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A + 2I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{21}^{+2}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = -\frac{1}{2}\alpha, y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que es $B_{V(\lambda)} = \{(-1, 2)\}$. Por lo tanto, $m_g(\lambda) = 1$.

Como $m_a(\lambda) = 2 \neq 1 = m_g(\lambda)$, la matriz A no es diagonalizable. Construimos su forma canónica de Jordan y buscamos un autovector generalizado.
Llamamos $v_1 = (-1, 2)$ y buscamos un autovector generalizado v_2 que verifique

$$(A - \lambda I)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo por el método de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{array} \right) \underset{\sim}{F_{21}^{+2}} \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \underset{\sim}{F_{1}^{1/2}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Es $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$, $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que $v_2 = (-1, 1)$ es un autovector generalizado.
Por lo tanto, la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$ es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) En primer lugar calculamos los autovalores de B mediante el polinomio característico.

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2.$$

Tenemos $\lambda = 2$ como único autovalor y $m_a(\lambda) = 2$. Calculamos la base del subespacio propio asociado al autovalor.

$$V(\lambda) = \left\{\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (B - \lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A - 2I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es $x = 0$, $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que es $B_{V(\lambda)} = \{(0, 1)\}$. Por lo tanto, $m_g(\lambda) = 1$.
Como $m_a(\lambda) = 2 \neq 1 = m_g(\lambda)$, la matriz A no es diagonalizable. Construimos su forma canónica de Jordan y, para ello, buscamos un autovector generalizado.
Llamamos $v_1 = (0, 1)$ y buscamos un autovector generalizado v_2 que verifique

$$(A - \lambda I)\,v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

se deduce que $x = -1$, $y = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos considerar $v_2 = (-1, 0)$ un autovector generalizado.
Por tanto, la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso P tal que $J = P^{-1}AP$ es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 6.3.2. *Según corresponda, obtener la diagonalización o la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de*

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución.

(a) En primer lugar calculamos los autovalores.

$$\begin{aligned}
&|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(2-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(2-\lambda)\left((5-\lambda)(2-\lambda)+2\right) - \left((\lambda-2)-1\right) = \\
&(2-\lambda)\left(\lambda^2 - 7\lambda + 12\right) - \lambda + 3 = \\
&-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27.
\end{aligned}$$

Calculamos las raíces del polinomio aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|rrrr}
 & -1 & 9 & -27 & 27 \\
3 & & -3 & 18 & -27 \\
\hline
 & -1 & 6 & -9 & 0 \\
3 & & -3 & 9 & \\
\hline
 & -1 & 3 & 0 & \\
3 & & -3 & & \\
\hline
 & -1 & 0 & &
\end{array}$$

Obtenemos $\lambda = 3$ autovalor triple, $m_a(\lambda) = 3$. Calculamos el subespacio propio asociado al autovalor.

$$V(\lambda) = \left\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A - 3I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_{23}^{-2}}{\overset{F_{13}^{+1}}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F_{12}^{+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = 0, y = \alpha, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que hay un solo autovector $v_1 = (0, 1, 1)$, por lo que $m_g(\lambda) = 1$.
Como $m_a(\lambda) = 3 \neq 1 = m_g(\lambda)$, la matriz A no es diagonalizable. Construimos su forma canónica de Jordan y buscamos dos autovectores generalizados.

$$(A-3I)\,v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{23}^{-2}}{\overset{F_{13}^{+1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{12}^{+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Obtenemos $x = -1, y = 1 + \alpha, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones. El primer autovector generalizado es $v_2 = (-1, 1, 0)$. Calculamos el siguiente.

$$(A-3I)\,v_3 = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{23}^{-2}}{\overset{F_{13}^{+1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_{12}^{+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

La solución es $x = 1, y = \alpha, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, el segundo y último autovector generalizado es $v_3 = (1, 0, 0)$. Concluimos que la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos, es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos los autovalores.

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Luego, $\lambda = 1$ es el único autovalor de B con $m_a(\lambda) = 3$. Calculamos la base del subespacio propio asociado al autovalor.

$$V(\lambda) = \left\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (B - I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(B - I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, $x = 0, y = 0, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que hay un solo autovector $v_1 = (0, 0, 1)$, por lo que $m_g(\lambda) = 1$.

Como $m_a(\lambda) = 3 \neq 1 = m_g(\lambda)$, la matriz B no es diagonalizable. Entonces, construimos su forma canónica de Jordan y buscamos dos autovectores generalizados.
El primero de ellos, v_2, ha de verificar

$$(B-I)\,v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es $x = 0, y = 1, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones. El primer autovector generalizado es $v_2 = (0, 1, 0)$.
Calculamos el siguiente.

$$(B-I)\,v_3 = v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

La solución es $x = 1, y = -1, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, el segundo y último autovector generalizado es $v_3 = (1, -1, 0)$.
Concluimos que la forma canónica de Jordan de B es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos, es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculamos el polinomio característico y sus raíces, que son los autovalores de la matriz C.

$$\begin{aligned}
&|C - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(1-\lambda)\left((3-\lambda)(2-\lambda) - 2\right) = \\
&(1-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 4\right).
\end{aligned}$$

Calculamos las raíces del polinomio aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & -5 & 4 \\
1 & & 1 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 0 \\
4 & & 4 & \\
\hline
 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Por lo tanto, los autovalores y sus correspondientes multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 1 \text{ con } m_a(\lambda_1) = 2,$$
$$\lambda_2 = 4 \text{ con } m_a(\lambda_2) = 1.$$

La matriz C es diagonalizable cuando la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coinciden. La relación

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

nos lleva a deducir que para el autovalor $\lambda_2 = 4$ siempre coincide la multiplicidad algebraica y geométrica, ya que $1 \leq m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 1$.
Sin embargo, para el autovalor $\lambda_1 = 1$ no podemos afirmar si la multiplicidad geométrica es 1 o 2, al verificarse $1 \leq m_g(\lambda_1) \leq m_a(\lambda_1) = 2$.
Tenemos que estudiar la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor λ_1.

$$V(\lambda_1) = \left\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (C - \lambda_1 I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(C - I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{13}^{-2}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\sim}{F_{1}^{1/3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_{31}^{+1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = -\alpha, y = 0, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos afirmar que hay un único autovector $v_1 = (-1, 0, 1)$, por lo que $m_g(\lambda_1) = 1$.
Como $m_a(\lambda_1) = 2 \neq 1 = m_g(\lambda_1)$, la matriz C no es diagonalizable. Entonces, construimos su forma canónica de Jordan y buscamos un autovector generalizado.

El vector generalizado v_2 ha de verificar

$$(C-\lambda_1 I)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{13}^{-2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\overset{F_{1}^{1/3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{F_{31}^{+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Es $x = -\alpha, y = -1, z = -\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones. Podemos considerar como vector generalizado $v_2 = (0,-1,0)$.
También necesitamos calcular el autovector asociado al autovalor λ_2.

$$V(\lambda_2) = \left\{\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (C-\lambda_2 I)\, \vec{v} = \vec{0}\right\}.$$
$$(C-4I)\, \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_{2}^{-1/3}}{\overset{F_{13}^{+1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_{32}^{+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = 2\alpha$, $y = 0$, $z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y el único autovector es $v_3 = (2, 0, 1)$.
Concluimos que la forma canónica de Jordan de C es

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos ordenados correctamente, es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculamos el polinomio característico y sus raíces, que son los autovalores de la matriz D.

$$|D - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8.$$

Calculamos las raíces del polinomio aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -2 & 4 & 8 \\ 2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & -1 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & & 2 & 4 & \\ \hline & -1 & -2 & 0 & \\ -2 & & 2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

Por lo tanto, los autovalores y sus correspondientes multiplicidades algebraicas son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \text{ con } m_a(\lambda_1) = 1, \\ \lambda_2 &= -2 \text{ con } m_a(\lambda_2) = 2. \end{aligned}$$

La matriz D es diagonalizable cuando la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coinciden. La relación

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$$

nos lleva a deducir que para el autovalor $\lambda_1 = 2$ siempre coincide la multiplicidad algebraica y geométrica, ya que $1 \leq m_g(\lambda_1) \leq m_a(\lambda_1) = 1$.
Sin embargo, para el autovalor $\lambda_2 = -2$ no podemos afirmar de antemano si la multiplicidad geométrica es 1 o 2, al verificarse $1 \leq m_g(\lambda_2) \leq m_a(\lambda_2) = 2$.
Tenemos que estudiar la dimensión del subespacio propio asociado al autovalor λ_2.

$$V(\lambda_2) = \left\{ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (D - \lambda_2 I)\, \vec{v} = \vec{0} \right\}.$$

$$(D + 2I)\, \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \underset{F_{32}^{+1}}{\overset{F_{12}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$\underset{F_{2}^{1/2}}{\overset{F_{1}^{1/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \overset{F_{23}^{-12}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Es $x = \alpha, y = -\alpha, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones. Podemos considerar como vector propio $v_1 = (1, -1, 1)$, por lo que $m_g(\lambda_2) = 1$.
Como $m_a(\lambda_2) = 2 \neq 1 = m_g(\lambda_2)$, la matriz D no es diagonalizable. Entonces, construimos su forma canónica de Jordan y buscamos un autovector generalizado del autovalor $\lambda_2 = -2$.
El vector generalizado v_2 ha de verificar

$$(D - \lambda_2 I)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{32}^{+1}}{\overset{F_{12}^{-1}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2^{1/2}}{\overset{F_1^{1/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_{23}^{-1/2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = -1 + \alpha, y = 1 - \alpha, z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y podemos considerar como autovector generalizado $v_2 = (-1, 1, 0)$.
Para calcular la matriz P, también necesitamos calcular el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$V(\lambda_1) = \left\{ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (D - \lambda_1 I)\, \vec{v} = \vec{0} \right\}.$$

$$(D - 2I)\, \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_{32}^{+1}}{\overset{F_{12}^{+1}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right)$$
$$\underset{F_3^{-1/4}}{\overset{F_2^{1/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_{23}^{+3/2}}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, $x = -\alpha$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ es solución del sistema de ecuaciones y un autovector propio de λ_1 es $v_3 = (-1, -1, 1)$. Concluimos que la forma canónica de Jordan de D es

$$J = \left(\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos ordenados cuidadosamente, es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Problema 6.3.3. *Consideramos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Sabiendo que $\lambda = 3$ es el único autovalor admitido por la matriz A, determinar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.*

(b) *Considerando el valor de α obtenido en el apartado anterior, calcular la diagonalización o la forma canónica de Jordan y la matriz de paso de A.*

Solución.

(a) En primer lugar calculamos los autovalores de A:

$$\begin{aligned}
&|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\
&(\alpha-\lambda)\left((4-\lambda)(2-\lambda)+1\right) = 0 \Rightarrow \\
&(\alpha-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+9\right) = 0 \Rightarrow \\
&(\alpha-\lambda)\left(3-\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

Los autovalores son $\lambda = \alpha$ y $\lambda = 3$ pero, como el enunciado indica que $\lambda = 3$ es el único autovalor, tomamos $\alpha = 3$. De esta forma, tenemos $\lambda = 3$ con multiplicidad algebraica 3, es decir, $m_a(\lambda) = 3$.

(b) Para saber si la matriz es diagonalizable o no, debemos comenzar calculando una base del subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 3$.

$$V(\lambda) = \left\{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (A-\lambda I)\,\vec{v} = \vec{0}\right\}.$$

$$(A-3I)\,\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos resolver este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x = \alpha, y = \beta, z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y, por lo tanto, $V(3) =< (0,1,1), (1,0,0) >$ y $m_g(\lambda) = 2$.
Como $m_a(\lambda) = 3 \neq 2 = m_g(\lambda)$, la matriz A no es diagonalizable. Entonces, construimos su forma canónica de Jordan y matriz de paso. Llamamos $v_1 = (0,1,1)$ y $v_3 = (1,0,0)$ y buscamos un autovector generalizado v_2 tal que

$$(A - 3I)\, v_2 = v_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right).$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_{32}^{-1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 00 & \end{array}\right).$$

Es $x = \alpha, y = 1 - \beta, z = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ solución del sistema de ecuaciones. Considerando, por ejemplo, $\alpha = 0, \beta = 0$ tenemos $v_2 = (0,1,0)$ como autovector generalizado.
Concluimos que la forma canónica de Jordan de A es

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Y la matriz de paso, cuyas columnas son los autovectores obtenidos ordenados correctamente, es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Bibliografía

[AMS07] ARVESÚ, J. ; MARCELLÁN, F. ; SÁNCHEZ, J.: *Problemas resueltos de Álgebra Lineal*. Thomson, 2007

[BMMN15] BARBA, M. ; MARÍN, D. ; MORENO, M. A. ; NAVARRO, F. J.: *Más de 160 problemas resueltos de Álgebra Lineal*. Servicio de Publicaciones, Universidad de Cádiz, 2015

[Bol07] BOLOS, V.: *Álgebra lineal y Geometría*. Universidad de Extremadura, 2007

[Bur06] BURGOS, J. de: *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. McGraw-Hill, 2006

[DGV86] DIEGO, B. de ; GORDILLO, E. ; VALEIRAS, G.: *Problemas de Álgebra Lineal*. Deimos, 1986

[Gro07] GROSSMAN, S.: *Álgebra Lineal con aplicaciones*. McGraw-Hill, 2007

[IT91] IZQUIERDO, J. ; TORREGROSA, J. R.: *Álgebra y ecuaciones diferenciales*. Servicio de Publicaciones, Universidad Politécnica de Valencia, 1991

[Jef93] JEFFREY, A: *Linear algebra and ordinary differential equations*. CRC Press, 1993

[MS06] MERINO, L. ; SANTOS, E.: *Álgebra lineal con métodos elementales*. Thomson, 2006

[RM94] ROJO, J. ; MARTÍN, I.: *Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal*. McGraw-Hill, 1994

[RRR07] RUBIO, R. ; RÍDER, A. ; RAYA, A.: *Álgebra y Geometría lineal*. Reverte, 2007

[TJ87] TORREGROSA, J. R. ; JORDAN, C.: *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Schaum McGraw-Hill, 1987

[Val11] VALLE, J. C.: *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. McGraw-Hill, 2011

[Vil98] VILLA, A.: *Problemas de Álgebra con esquemas teóricos*. Clagsa, 1998

eBOOKS
ON MATHEMATICS & PHYSICS
APPLIED TO ENGINEERING

Problemas resueltos de Álgebra Lineal

En este libro de la colección *eBooks on Mathematics and Physics applied to Engineering* se resuelven más de cien problemas de Álgebra Lineal que pueden ser de utilidad para el estudio en distintos Grados Universitarios.

Almudena del Pilar Márquez Lozano
Tamara María Garrido Letrán
Práxedes Neira Gómez
Soledad Moreno Pulido

Editorial UCA
Universidad de Cádiz

Other numbers of the series:

1. **Cuestiones teóricas y ejercicios prácticos de Electrónica Analógica y Digital**
2. **Generalizations of classical properties of Measure Theory to effect algebras**
3. **Apache Common Maths: Estadística y Matemáticas con Java**
4. **Introducción a los conceptos de dependencia y a la teoría de cópulas**
5. **Problemas resueltos de Álgebra Lineal**