Apuntes incompletos de análisis funcional

A. Aizpuru

UCA Universidad de Cádiz
Servicio de Publicaciones

APUNTES INCOMPLETOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Antonio Aizpuru Tomás
Departamento de Matemáticas

APUNTES INCOMPLETOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

Antonio Aizpuru Tomás
Departamento de Matemáticas

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
C/ Dr. Marañón, 3
11002 Cádiz

http://www.uca.es/publicaciones

ISBN: 978-84-9828-242-9

Depósito Legal: CA 432-2009

Printed by Publigades

Índice

A las cosas importantes: Mara, mis hijos, los amigos, las papas aliñás, la cruzcampo, el Habana club, la república federal que necesitamos, la playa, el tabaco,...

Prólogo

El origen de estos apuntes está en atender parte de las necesidades de dos asignaturas cuatrimestrales de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Cádiz (UCA). La primera asignatura es Análisis Funcional I y es una asignatura troncal. La segunda asignatura es Análisis Funcional II que es optativa. Entre las dos asignaturas suman doce créditos (el equivalente a cuatro clases semanales durante un curso académico). En los futuros planes de estudio estas asignaturas pasarán a denominarse, respectivamente, Análisis Funcional y Teoría de Espacios Normados con seis créditos cada una.

El Análisis Funcional es una parte importante y amplia del área del Análisis Matemático. El número de textos en castellano sobre este tema es escaso. Por otra parte la mayoría de los textos que tratan sobre Análisis Funcional están dirigidos a un lector licenciado e interesado en la investigación. Hay que destacar que bajo el nombre de Análisis Funcional se acogen una gran cantidad de temas que no es posible recoger en un texto. Por tanto, se hace necesaria una selección de temas y esto, no cabe ninguna duda, entraña un riesgo.

En la Licenciatura de Matemáticas de la UCA existen otras dos asignaturas, optativas y cuatrimestrales, relacionadas con este tema como son Ecuaciones Funcionales I y Ecuaciones Funcionales II (los nuevos planes de estudio tienen sólo una asignatura de Ecuaciones Funcionales). Esto motiva el que pueda darse a la asignatura de Análisis Funcional I y Análisis Funcional II un contenido más teórico y alejado de las aplicaciones.

El marco de estudio que hemos escogido es el de los espacios normados. Tenemos un gran respeto por aquellos profesores que prefieren arrancar desde un marco más general como es el de los espacios vectoriales topológicos, pero pensamos que es más sencillo recorrer el camino desde lo concreto a lo general. Se ha dedicado un breve capítulo de introducción a los espacios vectoriales topológicos y avisamos que ciertos teoremas de este capítulo engloban como caso particular a otros que ya han sido estudiados con anterioridad para el caso de espacios normados.

Para el estudio de estos apuntes será de gran ayuda unos buenos conocimientos de topología de espacios métricos y topología general. Estas disciplinas junto con la teoría de la medida y el desarrollo histórico de los conceptos del análisis forman parte también de nuestras muy personales preferencias. Es muy recomendable el libro de J.M. Díaz "Topología de espacios métricos", ya que este libro termina situando eficazmente al lector dentro de los espacios normados.

La principal preocupación que se ha tenido a la hora de redactar estos apuntes es que sean adecuados para estudiantes que inician el segundo ciclo. Son pocos los libros que sobre estos temas se han escrito con esta intención. En nuestra opinión el libro de Jameson "Topology and Normed Spaces", es muy cuidadoso y expone con sencillez los temas que trata. Es este el motivo por el que hemos escogido este libro para que nos sirva de guía en la elaboración de los apuntes. Queremos reconocer que en los apuntes hay partes deliberadamente similares a algunos temas del libro de Jameson, en ocasiones hemos preferido sacrificar la originalidad en beneficio de la eficacia docente.

La sección 8.6 sobre la compactificación de Stone-Cech ha sido realizada por nuestro alumno Antonio Gutiérrez Dávila a partir de las notas que nos tomó de clase y algunas aportaciones personales, son también muy estimables las colaboraciones de mis alumnos Fernando Rambla y Óscar Aragón.

En la bibliografía se recogen espléndidos libros dedicados al Análisis Funcional. Recomendamos a nuestros alumnos a que se acostumbren a estudiar en cualquiera de estos libros ya que el provecho que sacarán será muy superior al que obtengan con la lectura de estos apuntes.

Intencionadamente no hemos incluido ningún tipo de relaciones de problemas pero con frecuencia se plantean ejemplos donde el alumno queda estimulado a hacer "pequeñas investigaciones".

Estos apuntes comienzan a cocerse en Septiembre de 1.996, es nuestro deseo ir perfeccionándolos constantemente (tal como están más que un deseo es una necesidad). Son todavía muchos los temas que quedan por elaborar y esperamos hacerlo en sucesivos cursos.

Agradezco especialmente la ayuda de J. L. Romero, su ánimo y su atención son de gran ayuda. Quiero destacar mi agradecimiento a J. Pérez por su constante disposición, su ayuda ha sido muy importante. A Quico siempre le estaré agradecido por su amistad y porque siempre está dispuesto a charlar de matemáticas. Hay muchos más compañeros con los que estoy en deuda por soportar mis continuas peticiones de ayuda: F. Martínez, J.M. Díaz, J. Ramírez, A. Gómez Parra,...

Entre mi casa (Cádiz) y la Facultad (Puerto Real):
de nuevo en el Puente de Carranza, Septiembre de 2000.

Las Matemáticas son importantes, sobre todo para las personas sensibles a la belleza. Es posible que algunas otras actividades humanas puedan ser más importantes: el arte, la poesía, la filosofía, ... Pero es seguro que para mí existen otras cosas más importantes.

A mi familia.

Tema 1

Introducción a la teoría de espacios normados

1.1 Espacios normados: propiedades elementales

Se supondrán conocidos los aspectos elementales de los espacios métricos y topológicos, también suponemos que son conocidos los aspectos básicos del Álgebra Lineal. Los espacios vectoriales que aquí trataremos serán siempre espacios sobre el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}$) o bien sobre el cuerpo de los complejos ($\mathbb{C}$).

DEFINICIÓN 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en X es una aplicación de X en $\mathbb{R}$ que denotamos por $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ y que para cada $x, y \in X$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ verifica las propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$;
2. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio vectorial X dotado de una norma se denomina **espacio normado**. Para cada $x \in X$ al número $\|x\|$ se le denomina norma de x. Si la condición 2 de norma es cambiada por

2.' si $x = 0$ *entonces* $\|x\| = 0$

diremos entonces que $\|\ \|$ es una **seminorma** en X. Un espacio vectorial X dotado de una seminorma se denomina **espacio seminormado**.

Sea X un espacio vectorial y $\|\ \|$ una norma en X, consideremos la aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = \|x - y\|$. Es sencillo comprobar que d es una métrica en X. A la métrica d se le denomina métrica inducida por la norma $\|\ \|$ y se define como topología inducida por la norma en X a la topología que induce la métrica d en X.

Si tenemos definida en un espacio vectorial X una métrica d nos podemos preguntar si ésta métrica puede estar inducida por alguna norma, el siguiente teorema resuelve esta cuestión.

TEOREMA 1.1.2 *Sea X un espacio vectorial y sea d una métrica en X entonces d está inducida por una norma en X si y sólo si para cada $x, y, z \in X$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:*

i- $d(x+z, y+z) = d(x,y)$;

ii- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que d está inducido por la norma $\| \ \|$, entonces si $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $d(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \| x-y \| = d(x,y)$, $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \|x-y\| = |\alpha| d(x,y)$.

Supongamos ahora que la métrica d verifica las condiciones i y ii del enunciado y definimos $\|x\| = d(x,0)$, para cada $x \in X$. Demostraremos que $\| \ \|$ es norma en X. Es claro que se verifica 1) y 2) de la definición de norma, si $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha x, \alpha 0) = |\alpha| d(x,0) = |\alpha| \|x\|$, $\|x+y\| = d(x+y, 0) = d(x, -y) \leq d(x,0) + d(0,-y) = \|x\| + \|y\|$. Si denotamos por d' a la métrica inducida por $\| \ \|$ tenemos que $d'(x,y) = \|x-y\| = d(x-y, 0) = d(x,y)$. ∎

Si X es un espacio vectorial y p es una seminorma en X entonces debe observarse que la aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = p(x-y)$, para $x, y \in X$, es una seudométrica. Se considera como topología inducida en X por la seminorma a la topología que induce la seudométrica d en X. Es sencillo comprobar que se puede enunciar un teorema análogo al anterior para el caso de una seudométrica.

Nuestro objetivo inmediato es el estudio de los espacios normados. Si X es un espacio normado usaremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{lll} B(x,r) = & \{y \in X : \ \|x-y\| \leq r\} & \text{Bola cerrada de centro } x \text{ y radio } r \\ U(x,r) = & \{y \in X : \ \|x-y\| < r\} & \text{Bola abierta de centro } x \text{ y radio } r \\ S(x,r) = & \{y \in X : \ \|x-y\| = r\} & \text{Esfera de centro } x \text{ y radio } r \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} B_X = & B(0,1) & \text{bola unidad de } X \\ U_X = & U(0,1) & \text{bola unidad abierta de } X \\ S_X = & S(0,1) & \text{esfera unidad de } X \end{array}$$

Las siguientes relaciones son evidentes:

$$\begin{array}{l} \operatorname{Int} B(x,r) = U(x,r), \\ \operatorname{cl}(U(x,r)) = B(x,r), \\ B(x,r) = U(x,r) \cup S(x,r), \end{array}$$

donde denotamos Int $\equiv$ interior y cl $\equiv$ clausura.

Si X es un espacio normado y $E \subset X$ es un subespacio vectorial de X es claro que la norma de X induce en E una norma, se dice entonces que E es un **subespacio normado** de X.

Si X es un espacio vectorial y $A \subset X$ denotaremos por $\mathcal{L}(A)$ al **subespacio vectorial generado por** A.

Sea X un espacio normado, es sencillo comprobar que para cada $x, y \in X$ se verifica que

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Es también fácil demostrar que la aplicación $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, es continua cuando se considera en $\mathbb{R}$ la topología usual. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X se verifica que $\lim x_n = x_0$ si y sólo si $\lim \|x_n - x_0\| = 0$ y en esta situación también se tiene que $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$.

Es sencillo comprobar que puede suceder que $\lim \|x_n\| = \|x_0\|$ y ser falso que $\lim x_n = x_0$. Finalmente, es sencillo probar por inducción que si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ se verifica que $\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$, para $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos que dado un espacio seudométrico (X, d) se define el **diámetro** de $A \subset X$ por

$$d(A) = sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

Se dirá que A es **acotado** si $d(A) < +\infty$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, se dice que la **sucesión** es **de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ si $p, q \geq n_0$. Esto es equivalente a afirmar que dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ si $n \geq m$. Toda sucesión convergente es de Cauchy y toda sucesión de Cauchy es acotada (su recorrido es acotado).

Se dice que (X, d) es **completo** si cada sucesión de Cauchy de X es convergente.

Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$, tenemos que

$$d(A) = sup\,\{\|x - y\| : x, y \in A\}.$$

Es sencillo comprobar que $A \subset X$ *es acotado si y sólo si* $\{\|a\| : a \in A\}$ *es un conjunto acotado en* $\mathbb{R}$.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares convergente a cero entonces se verifica que $\lim \alpha_n x_n = 0$. Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de escalares y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de X convergente a cero entonces también se verifica que $\lim \alpha_n x_n = 0$.

Finalmente, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a cero demostraremos que $\lim \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) = 0$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$0 \leq \|\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq \frac{\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|}{n}$$

y si aplicamos, por ejemplo, el criterio de Stolz deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|}{n} = \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1}\| = 0.$$

Sea X un espacio normado es evidente que X es **conexo por caminos**, pues si $a, b \in X$ y $g : [0,1] \to X$ está definida por $g(t) = ta + (1-t)b$, es claro que g es uniformemente continua ya que $\|g(t_1) - g(t_2)\| = |t_1 - t_2|\|a - b\|$. Al conjunto imagen de g se le denomina **segmento de extremos** a **y** b y se le denota por $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\}$. Finalmente es sencillo comprobar que si $dimX > 1$ (dimensión de X) y $x \in X$ entonces $X \setminus \{x\}$ sigue siendo conexo por caminos.

1.1.1 Algunas propiedades de los subconjuntos de un espacio normado

1.- Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$, se dice que A **positivo y homogéneo** si para cada $a \in A$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$ se tiene que $\alpha a \in A$. Es claro que cualquier subespacio vectorial de X constituye un ejemplo de conjunto positivo y homogéneo.

Vamos a demostrar que *si X es un espacio normado y $A \subset X$ es positivo homogéneo entonces si $A \cap B_X$ es cerrado se verifica que A es cerrado.* En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de A que converge a $x \in X$. Si $x = 0$ tenemos que $x \in A$ y si $x \neq 0$ (podemos suponer $x_n \neq 0$ si $n \in \mathbb{N}$) se verifica que $(\frac{1}{\|x_n\|} x_n)$ es una sucesión de $A \cap B_X$ que converge a $\frac{1}{\|x\|} x$. Por consiguiente, $\frac{1}{\|x\|} x \in A \cap B_X$ y como A es positivo y homogéneo deducimos que $x \in A$.

2.- Sea X un espacio normado entonces se verifican las siguientes propiedades.

1. *Si $A \subset X$ es abierto entonces para cada $B \subset X$ tenemos que $A + B$ es abierto.* En efecto, tenemos que $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$ y para cada $b \in X$ es $A + b$ abierto.

2. *Si $A \subset X$ y $B \subset X$ son compactos entonces $A + B$ es compacto.* En efecto, como la aplicación suma de $X \times X$ en X es continua y $A \times B$ es compacto en $X \times X$ deducimos que $A + B$ es compacto en X.

3. *Si $A \subset X$ es compacto y $B \subset X$ es cerrado entonces $A + B$ es cerrado.* En efecto, sea $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $A + B$ que es convergente a $z \in X$. Como A es compacto existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a un cierto $a \in A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $y_{n_k} = (x_{n_k} + y_{n_k}) - x_{n_k}$ y deducimos que $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $z - a$. Como B es cerrado será $z - a \in B$. Entonces $z = a + (z - a)$ es un elemento de $A + B$.

4. Consideremos ahora en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos cerrados $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = (-n, 0) \in A$ y $b_n = (n, \frac{1}{n}) \in B$, tenemos que $(a_n + b_n)$ es una sucesión de $A + B$ pero $\lim(a_n + b_n) = (0, 0)$ y $(0, 0) \notin A + B$. Así pues, *la suma de conjuntos cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado.*

5. Veamos otro ejemplo en la misma dirección pero con subespacios vectoriales. Consideremos en l_1 los subespacios

$$A = \{a \in l_1 : a(2n) = 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{b \in l_1 : b(2n) = \tfrac{1}{2^n} b(2n-1),$$

si $n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que A y B son cerrados y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $a_n = e_1 + e_3 + \cdots + e_{2n-1} \in A$ y $b_n = a_n + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2^2}e_4 + \cdots + \frac{1}{2^n}e_{2n} \in B$. Tenemos que $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $A + B$ que converge a $c \in l_1$ donde $c(2n-1) = 0$ y $c(2n) = \frac{1}{2^n}$ si $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $c \notin A + B$. En efecto, si fuese $c = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$ tendrá que ser $b(2n) = \frac{1}{2^n}$ si $n \in \mathbb{N}$. Entonces sería $b(2n-1) = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ y esto no es posible ya que $b \in l_1$.

6. Sea X un espacio normado y sean A, B dos subespacios vectoriales de X tales que $\mathrm{cl}(A) \cap B = \{0\}$ y $A + B$ es cerrado. Demostraremos que en esta situación se verifica que A es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A que es convergente a $x \in X$ como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de $A + B$ tenemos que $x \in A + B$ y será $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $(x_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de A que converge a $x - a = b$. Así pues, $b \in \mathrm{cl}(A) \cap B$ y será $b = 0$, por tanto $x = a \in A$.

3- Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$, demostraremos que

$$\mathrm{cl}(A + B_X) = \{x \in X : d(x, A) \leq 1\}.$$

En efecto, si $x \in A + B_X$ será $x = a + c$ con $a \in A$ y $c \in B_X$, entonces $d(x, A) \leq \|x - a\| = \|c\| \leq 1$. Si $x \in \mathrm{cl}(A + B_X)$ existirá una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $A + B_X$ tal que $\lim x_n = x$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $d(x_n, A) \leq 1$ es fácil deducir que $d(x, A) \leq 1$.

Supongamos ahora que $x \in X$ y $d(x, A) \leq 1$, si $x \in \mathrm{cl}(A)$ es claro que $x \in \mathrm{cl}(A + B_X)$. Supongamos que $x \notin \mathrm{cl}(A)$ (será $d(x, A) > 0$). Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ tal que

$$0 < d(x, A) \leq d(x, a_n) \leq d(x, A) + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Es sencillo comprobar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Consideremos la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ es $z_n = \frac{d(x,A)}{\|x-a_n\|}(x - a_n) + a_n$. Tenemos que

$$z_n = \frac{d(x, A)}{\|x - a_n\|} x + \left(1 - \frac{d(x, A)}{\|x - a_n\|}\right) a_n.$$

Así pues, es claro que $\lim z_n = x$ y que $x \in \mathrm{cl}(A + B_X)$.

Como consecuencia de este resultado vamos a demostrar que si $A \subset X$ entonces son equivalentes:

i) $A + B_X$ es cerrado,

ii) Si $x \in X$ y $d(x, A) = 1$ existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| = 1$.

En efecto, supongamos que $A + B_X$ es cerrado y que $d(x, A) = 1$. Entonces $x \in \text{cl}(A + B_X) = A + B_X$ y será $x = a + c$, con $a \in A$ y $c \in B_X$. Así pues $1 = d(x, A) \leq \|x - a\| = \|c\| \leq 1$ y por tanto $\|x - a\| = 1$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica ii) y que $x \in \text{cl}(A + B_X)$. Es claro que $d(x, A) \leq 1$. Si fuese $d(x, A) < 1$ existirá $a \in A$ tal que $\|x - a\| < 1$, entonces si $b = x - a$ es $b \in B_X$ y $x = a + b \in A + B_X$. Si $d(x, A) = 1$ tenemos, por hipótesis, que existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| = 1$, así pues si $b = x - a$ será $b \in B_X$ y $x = a + b \in A + B_X$.

1.2 Ejemplos

1.- Sea $R([0,1])$ el espacio vectorial de las funciones reales definidas en $[0,1]$ e integrables Riemann. Definimos $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$, para $f \in R([0,1])$. Se verifica que $\| \ \|$ es una seminorma en $R([0,1])$ que no es norma. Si consideramos $C([0,1])$, el espacio vectorial de las funciones reales definidas y continuas en $[0,1]$, se verifica que $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$ es una norma en $C([0,1])$, pero $C([0,1])$ no es completo para la topología definida por esa norma.

2.- Sea S un conjunto y sea $B(S) = \{f : S \to \mathbb{K} : f \text{ es acotada}\}$. Tenemos que $B(S)$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales: $f + g$ y αf, $(\alpha \in \mathbb{K})$. Definimos $\|f\| = \sup\{|f(t)| : t \in S\}$; es sencillo comprobar que $\| \ \|$ es una norma en $B(S)$ (llamada del supremo o de la **convergencia uniforme**). Observemos que si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f_0 será $\lim f_n(t) = f_0(t)$ para cada $t \in S$; es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f_0 puntualmente en S pero además esta convergencia es uniforme en $t \in S$ (dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(t) - f_0(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in S$ si $n \geq n_0$).

Observemos que *puede suceder que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converja puntualmente a f_0 en S pero ser falso que* $\lim \|f_n - f_0\| = 0$. Por ejemplo, si $S = (-1, 1)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f_n(t) = t^n$ si $t \in (-1, 1)$ se verifica que (f_n) converge puntualmente a $f_0 \equiv 0$ en S pero no lo hace uniformemente.

En el caso en que $S = \mathbb{N}$ tenemos que $B(\mathbb{N})$ es exactamente el espacio vectorial de las sucesiones acotadas de escalares y la correspondiente norma es

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = sup\{|a_n| \ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Este espacio normado suele ser denotado por l_∞. Es también usual denotar, para cada $n \in \mathbb{N}$, por e_n al elemento de l_∞ definido por

$$e_n(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Si $S = \{1, \ldots, n\}$ tenemos que el espacio normado $B(S)$ puede ser identificado con $\mathbb{K}^n$, con la norma

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \text{máx}\{|x_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

El espacio $B(S)$ suele ser denotado por $B(S,\mathbb{R})$ cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ y $B(S,\mathbb{C})$ cuando $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. En general si no se especifica el caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se entiende que la afirmación o el estudio que se haga es válido en ambos casos. Entenderemos también lo mismo en los casos de los espacios c_0, c, l_1, l_p que posteriormente definiremos. Si T es un espacio topológico entonces $BC(T)$ denotará el espacio de las funciones escalares acotadas definidas y continuas en T; usaremos la notación $BC(T,\mathbb{R})$ para el caso real y $BC(T,\mathbb{C})$ en el caso complejo.

3.- Denotamos

$$l_1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K} \text{ si } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Tenemos que l_1 es espacio vectorial con las operaciones usuales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\alpha \in \mathbb{K})$. Se verifica que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es una norma en l_1.

4.- Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $\{x_1,\dots,x_n\} \subset \mathbb{K}$, $\{y_1,\dots,y_n\} \subset \mathbb{K}$. Suponemos que son conocidas los siguientes casos particulares de las **desigualdades de Holder y de Minkowski**. Sea $p \in (1,+\infty)$ y sea $q \in (1,+\infty)$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{D. de Holder.}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{D. de Minkowski}$$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (1,\infty)$. En el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ se define $\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, se verifica que $\| \ \|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^n$. Si $p=2$ a $\| \ \|_2$ se le denomina norma euclídea.

5.- Sea c_0 el espacio vectorial de las sucesiones escalares convergentes a cero, definimos $\|(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|a_i| : i \in \mathbb{N}\}$. Se verifica que $\| \ \|$ es una norma en c_0. Es claro que c_0 es un subespacio (normado) de l_∞.

Denotamos por c el espacio vectorial de las sucesiones escalares que son convergentes. Es claro que $c \subset l_\infty$ y por tanto c, con la norma del supremo, es un espacio normado.

6.- Sea T un espacio topológico. Denotamos por $C(T)$ al espacio vectorial de las aplicaciones escalares definidas y continuas en T. Por $BC(T)$ se denota, como ya comentamos, el correspondiente subespacio vectorial de $C(T)$ formado por las aplicaciones que además son acotadas. Tenemos que $BC(T)$ es un subespacio de $B(T)$. Consideremos la norma del supremo y veamos que $BC(T)$ es un subespacio cerrado de $B(T)$. En efecto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $BC(T)$ que converge a $f_0 \in B(T)$. Demostraremos que f es continua en cada $t_0 \in T$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$; como f_m es continua en t_0 tenemos que existe U, entorno de t_0, tal que si $t \in U$ es $|f_m(t) - f_m(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$; entonces si $t \in U$ es

$$|f_0(t) - f_0(t_0)| \leq |f_0(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - f_m(t_0)| + |f_m(t_0) - f_0(t_0)| < \varepsilon.$$

Recordemos que si T es un espacio topológico compacto entonces $BC(T) = C(T)$.

7.- Sea M la bola unidad cerrada de l_1. Tenemos que $M \subset l_\infty$ y demostraremos que M es cerrado en l_∞. Sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty \backslash M$ es claro que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ o bien es $+\infty$ o bien es mayor que 1; así pues, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{N} |x_i| > 1$. Sea $\alpha = \sum_{i=1}^{N} |x_i| - 1$ y sea $y \in B\left(x, \frac{\alpha}{2N}\right)$; tenemos que

$$\sum_{i=1}^{N} |y_i| \geq \sum_{i=1}^{N} |x_i| - \sum_{i=1}^{N} |y_i - x_i| \geq 1 + \alpha - \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2} > 1.$$

Por tanto deducimos que $l_\infty \setminus M$ es abierto y que M es cerrado.

8.- En l_1 sea $A = \{x = (x_i) \in l_1 : \sum_{i=1}^{\infty} ix_i = 0\}$. Demostraremos que A no es cerrado. Tenemos que $e_1 \notin A$ y encontraremos una sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\lim_{n\to\infty} \|e_1 - x^n\|_1 = 0$.

Sea $x^n = \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{-1}{2n}, \frac{-1}{3n}, \ldots, \frac{-1}{n^2}, 0, \ldots\right)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|e_1 - x^n\|_1 &= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}, \ldots, \frac{1}{n^2}, 0, \ldots\right) \right\|_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0
\end{aligned}$$

9.- En l_1 sea

$$M = \{x \in B_{l_1} : x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \text{ es real, decreciente y } x(i) \geq 0 \text{ para } i \in \mathbb{N}\}.$$

Es evidente que $d(M) \leq 2$ y probaremos que $d(M) = 2$. Tenemos que $e_1 \in M$ y consideremos la siguiente sucesión de M. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$x^n = \left(\frac{2(n-1)}{n^2}, \frac{2(n-2)}{n^2}, \ldots, \frac{2}{n^2}, 0, \ldots\right),$$

donde $n>1$. Observemos que $\|x^n\|_1 = \frac{n^2-n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$. Para cada n se verifica que

$$\begin{aligned}
\|e_1 - x^n\|_1 &= \left(1 - \tfrac{2(n-1)}{n^2}\right) + \left(\tfrac{2(n-2)}{n^2} + \cdots + \tfrac{2}{n^2}\right) \\
&= 1 - \tfrac{2(n-1)}{n^2} + \tfrac{n^2-3n+2}{n^2}
\end{aligned}$$

Así pues, $\lim \|e_1 - x^n\|_1 = 2$ y esto prueba que $d(M) = 2$.

10.- Sea A un subconjunto acotado de l_∞ (caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Vamos a probar que *existe* $z \in l_\infty$ *tal que* $sup\{\|a - z\| : a \in A\} = \frac{1}{2}d(A)$. En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $M_i = \{a(i) : a \in A\}$; es claro que M_i es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Sean $\alpha_i = inf\ M_i$ y $\beta_i = sup\ M_i$, tenemos que $\beta_i - \alpha_i \leq d(A)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $z_i = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}$, tenemos que para cada $a \in A$ es $|z_i - a(i)| \leq \frac{d(A)}{2}$. Por tanto, si $z = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se verifica que para cada $a \in A$ se cumple $\|z - a\| \leq \frac{d(A)}{2}$. Si fuese $\sup\{\|z - a\| : a \in A\} < \alpha < \frac{d(A)}{2}$ tendremos que para cada $a, b \in A$ sería $\|a - b\| \leq \|a - z\| + \|z - b\| < 2\alpha < d(A)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $sup\{\|z - a\| : a \in A\} = \frac{1}{2}d(A)$.

Proponemos que, como ejercicio, se estudie esta propiedad para el caso complejo de l_∞ y para el caso, más general, del espacio $B(S)$.

Vamos a comprobar que c_0 carece de la propiedad que acabamos de ver que tiene l_∞. Sea $A = \{a \in B_{c_0} : a(i) \geq 0 \text{ si } i \in \mathbb{N}\}$, es sencillo comprobar que $d(A) = 1$. Sea $x \in c_0$; dado $\varepsilon > 0$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(m)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $b \in c_0$ tal que $b(n) = 0$ si $n \neq m$ y $b(m) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, tenemos que $b \in A$ y $\|b - x\| \geq 1 - \varepsilon$; así pues, $\sup\{\|x - a\| : a \in A\} \geq 1 = d(A)$.

11.- Consideremos el espacio c_0 y sea $x \in c_0$ tal que $x \neq 0$. Tenemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $|x(i)| > 0$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}|x(i)|$ existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > N$ es $|x(n)| < \varepsilon$, es pues evidente que $\|x\| = \text{máx}\{|x(1)|, \ldots, |x(N)|\}$ y por tanto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|x\| = |x(j)|$. Es sencillo comprobar que esta propiedad es falsa en el caso de c y de l_∞.

12.- Sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos convergente a cero. Consideremos en l_∞ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) el conjunto $A = \{a \in l_\infty : |a(i)| \leq \alpha_i$ si $i \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que A es cerrado y acotado, vamos a demostrar que A es compacto.

Comenzaremos recordando resultados importantes que se dan en el marco de los espacios seudométricos. Si X es un espacio seudométrico y $A \subset X$ entonces

i.- Si X es completo y A es cerrado se verifica que A es compacto si y sólo si A es precompacto (totalmente acotado);

ii.- $\text{cl}(A)$ es compacto si y sólo si A es precompacto y $\text{cl}(A)$ es completo;

iii.- Si A es precompacto entonces A es separable.

Mas adelante probaremos que l_∞ es completo; así pues, en nuestra situación, bastará probar que A es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$; tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \alpha_n < \varepsilon$ si $n > N$. Sea $\alpha = max\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$. Consideremos k números, $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, tales que $-\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k = \alpha$ y de manera que $\lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon$. Consideremos las k^N variaciones con repetición de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ tomadas de N en N. Si $a \in A$ tenemos que existe alguna variación $(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_N})$ de modo que si $i \in \{1, \ldots, N\}$ es $\lambda_{j_i} \leq a(i) \leq \lambda_{j_i} + 1$; es claro que si $x = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_N}, 0, \ldots)$ se verifica que $\|x - a\| < \varepsilon$.

13.- Sea X un espacio normado y sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos precompactos de X tales que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d(A_n) < \infty$ y $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ si $n \in \mathbb{N}$. Demostraremos que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es precompacto. En efecto, sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=m+1}^{\infty} d(A_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $x \in A_{m+1}$, si $y \in A_{m+p}$, con $p > 1$, consideremos $x_1 \in A_{m+1} \cap A_{m+2}, \dots, x_{p-1} \in A_{m+p-1} \cap A_{m+p}$ es claro que $\|x-y\| < \|x-x_1\| + \cdots + \|x_{p-1}-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y deducimos que $\displaystyle\bigcup_{i=m+1}^{\infty} A_i \subset U\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ sea R_i un recubrimiento finito de A_i con conjuntos de diámetro menor que ε. Tenemos que $R = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} R_i \cup \left\{U\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$ es un recubrimiento de $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ con conjuntos de diámetro menor que ε. Observemos que este resultado es válido en el marco de los espacios métricos pero no es cierto si cambiamos precompacto por compacto.

14.- Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un conjunto compacto. Demostraremos que existe un subconjunto finito $\{a_1, \dots, a_n\}$ de A tal que si $c \in A \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ con $\|a_i - c\| < d(A)$ y $\|a_i - a_j\| = d(A)$ si $i \neq j$.

En efecto, primero probaremos que existen $a, b \in A$ de modo que $\|a-b\| = d(A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n, b_n \in A$ tales que $d(A) - \frac{1}{n} \leq \|a_n - b_n\|$. Para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existen $M \subset \mathbb{N}$, infinito, y $a \in A$ tales que $\lim_{i\in M} a_i = a$. Para $(b_i)_{i\in M}$ existen $H \subset M$, infinito, y $b \in A$ tales que $\lim_{i\in H} b_i = b$. Es sencillo comprobar que $\|a-b\| = d(A)$. Denotaremos $a_1 = a$ y $a_2 = b$. Si para cada $c \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ es $\|a_1 - c\| < d(A)$ entonces o bien $\|a_2 - c\| < d(A)$, en cuyo caso habríamos concluido, o es que existe $c \in A \setminus \{a_1, a_2\}$ tal que $\|a_1 - c\| = d(A)$ y $\|a_2 - c\| = d(A)$. En este caso denotamos $a_3 = c$ y reiteramos el argumento anterior.

Si en un número finito de pasos hemos concluido es que tenemos un conjunto finito $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ tal que $\|a_i - a_j\| = d(A)$ si $i \neq j$ y para cada $c \in A - \{a_1, \dots, a_m\}$ se cumple $\|a_i - c\| < d(A)$, para algún $i \in \{1, \dots, m\}$. Así pues, habremos conseguido nuestro propósito. Si no se concluye en un número finito de pasos habremos obtenido una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tal que $\|a_i - a_j\| = d(A)$ si $i \neq j$ lo que contradice la compacidad de A.

15.- Demostraremos ahora que si A es un subconjunto compacto de un espacio normado X entonces existe $c \in X$ tal que $sup\{\|a-c\| : a \in A\} < d(A)$. En efecto, consideremos el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset A$ que hemos obtenido en el apartado anterior y sea $c = \frac{1}{n}a_1 + \cdots + \frac{1}{n}a_n$, para cada $a \in A$ existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\|a - a_i\| < d(A)$ así pues $\|c - a\| \leq \frac{1}{n}\|a_1 - a\| + \cdots + \frac{1}{n}\|a_n - a\| < d(A)$. Si fuese $sup\{\|c-a\| : a \in A\} = d(A)$ tenemos que existirá una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $d(A)-\frac{1}{n} \leq \|c-a_n\| \leq d(A)$ si $n\in\mathbb{N}$, pero $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendrá alguna subsucesión convergente a cierto $a\in A$ y sería $\|c-a\| = d(A)$ y esto es una contradicción.

1.3 Espacios $L^p(\mu)$

1.3.1 Los espacios $\mathcal{L}^p(\mu)$, $1\leq p\leq\infty$

Sea $\Omega,\Sigma,\mu)$ un espacio de medida arbitrario. Para $p\in[1,\infty[$ denotaremos por $\mathcal{L}^p(\mu)$ el conjunto de las funciones medibles $f:\Omega\to\mathbb{C}$ tales que $\int |f|^p d\mu < +\infty$. En este apartado pretendemos probar, entre otras cosas, que sobre $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p\in[1,\infty)$, las aplicaciones

$$f\mapsto N_p(f) = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

son seminormas.

Pasemos ahora a definir el espacio $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Sea $g:\Omega\to\mathbb{C}$ una función medible y sea

$$A=\{a\in\mathbb{R}:\mu(|g|^{-1}(]a,\infty[))=0\}=\{a\in\mathbb{R}:\mu(\{x\in\Omega:|g(x)|>a\})=0\}.$$

Definamos el número

$$N_\infty(g)=\begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad A=\emptyset, \\ \inf A, & \text{si} \quad A\neq\emptyset \end{cases}$$

Si $N_\infty(g)<+\infty$ entonces como

$$|g|^{-1}(]N_\infty(g),+\infty])=\bigcup_{k=1}^{\infty}|g|^{-1}(]N_\infty(g)+\frac{1}{k},\infty])$$

y cada conjunto del lado derecho tiene medida nula, por definición de $N_\infty(g)$, resulta que

$$\mu(|g|^{-1}(]N_\infty(g),+\infty[))=0,$$

por lo que $N_\infty(g)\in A$. El número $N_\infty(g)$ se denomina **supremo esencial** de g. Por ser $N_\infty(g)\in A$ se verifica:

$$\mu(\{x\in\Omega:|g(x)|>N_\infty(g)\})=0.$$

Es decir, *para casi todo $x\in\Omega$ se verifica que $|g(x)|\leq N_\infty(g)$.*

El conjunto de las funciones $g:\Omega\to\mathbb{C}$ medibles tales que $N_\infty(g)<+\infty$ será denotado por $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Es inmediato comprobar que $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial y que la aplicación $N_\infty:\mathcal{L}^\infty(\mu)\to\mathbb{R}$ que se acaba de definir es una seminorma sobre $\mathcal{L}^p(\mu)$. En efecto, si $f,g\in\mathcal{L}^\infty(\mu)$ y $\alpha\in\mathbb{C}$ entonces

- Si $\alpha=0$ es evidente que $|\alpha|N_\infty(f)=N\infty(\alpha f)=0$. Si $\alpha\neq0$ entonces se tiene $\mu(\{x\in\Omega:|f(x)|>a\})=0$ si y sólo si $\mu(\{x\in\Omega:|\alpha f(x)|>|\alpha|a\})=0$. Esto prueba que $N_\infty(\alpha f)=|\alpha|\cdot N_\infty(f)$.

- Claramente se cumple que

$$\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| > N_\infty(f) + N_\infty(g)\}$$
$$\subset \{x \in \Omega : |f(x)| > N_\infty(f)\} \cup \{x \in \Omega : |g(x)| > N_\infty(g)\}.$$

  Por consiguiente,

$$\mu(\{x \in \Omega : |f(x) + g(x)| > N_\infty(f) + N_\infty(g)\})$$
$$\leq \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > N_\infty(f)\}) + \mu(\{x \in \Omega : |g(x)| > N_\infty(g)\}) = 0.$$

  Esto prueba que $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$ y que $f + g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

A partir de ahora denotaremos $\|f\|_\infty = N_\infty(f)$. Se acaba de probar que la aplicación

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty(\mu) \to \mathbb{R},$$

es una seminorma.

Junto al espacio $L^\infty(\mu)$ que ha sido definido anteriormente, en la literatura matemática aparece otra definición del espacio $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Para distinguirlo del anterior nosotros denotaremos este otro espacio por $\mathcal{L}_l^\infty(\mu)$ y pasamos a definirlo a continuación. Un conjunto $A \in \Sigma$ será llamado **localmente μ-nulo** si $\mu(A \cap B) = 0$ para cada $B \in \Sigma$ tal que $\mu(B) < +\infty$. Supongamos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función medible. Denotemos por

$$S_f = \{a \in \mathbb{R} : |f|^{-1}(]a, \infty[\text{ es localmente } \mu - \text{nulo}\}.$$

- Si $S_f = \emptyset$ escribiremos $N_{\infty,l}(f) = +\infty$.
- Si $S_g \neq \emptyset$ escribiremos $N_{\infty,l}(f) = \inf S_f$.

El conjunto de las funciones medibles f tales que $\|f\|_{\infty,l} < +\infty$ será denotado por $\mathcal{L}_l^\infty$. Es inmediato, como antes, probar que la aplicación $N_{\infty,l}(f) : \mathcal{L}_{\infty,l}(\mu) \to \mathbb{R}$ es una seminorma.

Es importarte reseñar que si el espacio de medida (Ω, Σ, μ) es σ-finito entonces los espacios $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ y $\mathcal{L}_l^\infty(\mu)$ coinciden. Sin embargo, en general son diferentes. Por ejemplo, sea Ω un conjunto arbitrario y $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$ el σ-álgebra trivial. Definamos $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ como $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(\Omega) = +\infty$. Claramente Ω es localmente μ-nulo pues el único conjunto de Σ con medida finita es $\emptyset$ y $\mu(\Omega \cap \emptyset) = 0$. Sin embargo, Ω no es μ-nulo. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la función constante definida por $f(x) = 1$ para $x \in \Omega$. Claramente f es medible, de hecho las únicas funciones medibles son las funciones constantes, y para cada $a \in]0, 1[$ se tiene que $f^{-1}(]a, \infty]) = \Omega$ y este conjunto es localmente μ-nulo pues el único elemento de Σ con medida finita es $\emptyset$ y $\mu(f^{-1}(]a, \infty[) \cap \emptyset) = 0$. Esto prueba que $N_{\infty,l}(f) = 0$. Sin embargo, para $a > 1$ se tiene que $\mu(f^{-1}(]a, \infty[)) = \mu(\emptyset) = 0$ pero si $a \leq 1$ se tiene que $\mu(f^{-1}(]a, \infty[)) = \mu(\Omega) = +\infty$. Por tanto, $N_\infty(f) = 1$. Esto prueba que $\mathcal{L}^\infty(\mu) \neq \mathcal{L}_l^\infty(\mu)$.

1.3.2 Las desigualdades de Hölder y de Minkowski

Pretendemos ahora probar que, para $1 \leq p < \infty$, las aplicaciones $N_p : \mathcal{L}^p(\mu)$, anteriormente definidas, son seminormas.

Dado $p \in]1, \infty[$, se tiene que $0 < \frac{1}{p} < 1$, por tanto existe un número real $q \in]1, \infty[$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En este caso diremos que $q \in \mathbb{R}$ es el **exponente conjugado de** p.

La noción anterior puede extenderse para $p \in]0, 1]$ y $p = +\infty$. Diremos también que $q = +\infty$ es el exponente conjugado de $p = 1$ y que $q = 1$ es el exponente conjugado de $p = +\infty$. Si $0 < p < 1$ entonces el exponente conjugado de p, definido como antes, es negativo.

Es conveniente tener a mano algunas relaciones que son equivalentes, para $1 < p < +\infty$, a la relación $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{array}{ll} p + q = pq, & (p-1)(q-1) = 1, \\ p = \frac{q}{q-1}, & q = \frac{p}{p-1}. \end{array}$$

Lema 1.3.1 *Si $p \in]1, \infty[$ y $q \in \mathbb{R}$ es el exponente conjugado de p entonces para $x, y \in \mathbb{R}^+$ se verifica*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{1.3.1}$$

La desigualdad es estricta salvo que $x^p = y^q$.

Demostración Para $y > 0$ consideremos la función $\phi :]0, \infty[\to R$ definida por $\phi(x) = xy - \frac{x^p}{p}$. Se verifica que $\phi'(x) = y - x^{p-1}$. Por tanto $\phi'(x) = 0$ sólo para $x_0 = y^{1/(p-1)}$. Como $p > 1$, se verifica que $\phi''(x_0) < 0$ y, por tanto, ϕ tiene en x_0 un máximo. Como $\phi'(x) > 0$ para $0 \leq x < x_0$ y $\phi'(x) < 0$ para $x > x_0$, en x_0 la función ϕ alcanza un máximo absoluto. Es decir:

$$\begin{array}{ll} \sup_{x \in]0,\infty[} \phi(x) = \phi(y^{1/(p-1)}) & = y^{1+\frac{1}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} = y^{\frac{p}{p-1}} - \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} \\ & = y^q - \frac{y^q}{p} = y^q(1 - \frac{1}{p}) = \frac{y^q}{q} \end{array}.$$

Esto prueba la desigualdad. Además las igualdades anteriores prueban que se produce la igualdad en la desigualdad del enunciado si y sólo si $x = y^{1/(p-1)}$; es decir si y sólo si $y = x^{p-1}$ o, equivalentemente, $x^p = y^q$. ∎

Teorema 1.3.2 **[Desigualdad de Hölder]**

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $p \in [1, \infty]$. Sea q el exponente conjugado de p. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ entonces $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y además se verifica

$$\int |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}};$$

es decir $N_1(f \cdot g) \leq N_p(f) \cdot N_q(g)$.

La desigualdad del enunciado es estricta, salvo que existan dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ *no simultáneamente nulas tales que* $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$, *para casi todo* $x \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN

1. Si $p = 1$, en cuyo caso $q = +\infty$, entonces $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Sabemos que el conjunto $E = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es σ-finito y el conjunto $F = \{x \in \Omega : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo, es decir $\mu(F) = 0$. Claramente $E \cap F$ es μ-mulo y la desigualdad

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \|g\|_\infty \cdot |f(x)|$$

se verifica para casi todo $x \in \Omega$. Por tanto, $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y además

$$\int |f \cdot g| d\mu \leq \int \|g\|_\infty \cdot |f| d\mu = \|g\|_\infty \cdot N_1(f).$$

2. Si $p = +\infty$, en cuyo caso $q = +\infty$, el teorema se prueba como antes, intercambiando los papeles de f y g.

3. Si $p \in]1, \infty[$ entonces el lema anterior implica que

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

para $x \in \Omega$.

- Si $N_p(f) = 1$ y $N_q(g) = 1$ entonces integrando ambos miembros de la desigualdad anterior obtenemos

$$\int |f \cdot g| d\mu \leq \frac{1}{p} \int |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

con lo cual el teorema quedaría probado en este caso particular.

- Si $N_p(f) = 0$ entonces $f = 0$ en casi todo punto de Ω, lo mismo le ocurre a $f(x) \cdot g(x)$ y entonces ambos miembros de la desigualdad del enunciado serían nulos. La misma situación se presenta si $N_q(g) = 0$.

- Si $N_p(f) > 0$ y $N_q(g) > 0$ entonces las funciones $\bar{f} = \frac{f}{N_p(f)}$ y $\bar{g} = \frac{g}{N_q(g)}$ verifican $N_p(\bar{f}) = 1$ y $N_q(\bar{g}) = 1$. Según se probó anteriormente,

$$\int |\bar{f} \cdot \bar{g}| d\mu = \frac{1}{N_p(f) N_q(g)} \int |f \cdot g| d\mu \leq 1.$$

De aquí se sigue inmediatamente la desigualdad del enunciado

Analizaremos ahora cuándo se produce la igualdad en la desigualdad de Hölder. Según el lema anterior, en el caso $N_p(f) > 0$ y $N_q(g) > 0$ la igualdad se produce si y sólo si $|g(x)| = |\bar{f}(x)|^{p-1}$ en casi todo $x \in \Omega$. Elevando a q ambos miembros de esta igualdad, debería ser

$$|\bar{g}|^q = \frac{|g(x)|^q}{\int |g|^q d\mu} = |\bar{f}(x)|^{q(p-1)} = |\bar{f}(x)|^p = \frac{|f(x)|^p}{\int |f|^p d\mu}$$

en casi todo $x \in \Omega$. Esto ocurre si y sólo si $|f(x)|^p$ y $|g(x)|^q$ son proporcionales, con constante de proporcionalidad no nula, en casi todo punto $x \in \Omega$.

En el caso en que $N_p(f)$ o $N_q(g)$ se anulen, resulta que la desigualdad del enunciado es una igualdad si y sólo si existen dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ no simultáneamente nulas tales que $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$, para casi todo $x \in \Omega$. ▪

TEOREMA 1.3.3 **[Desigualdad de Minkowski]**

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $p \in [1, \infty]$. Si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ entonces

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Es decir, $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_q(g)$.

Para $p > 1$ la desigualdad es estricta si y sólo si existen dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ no simultáneamente nulas tales que $\alpha|f(x)| = \beta|g(x)|$, para casi todo $x \in \Omega$.

DEMOSTRACIÓN

1. Si $p = 1$ entonces la desigualdad del enunciado es consecuencia de integrar ambos miembros de la desigualdad $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$, que es válida para cada $x \in \Omega$.

2. Si $p = +\infty$ y denotamos $A_f = \{x \in \Omega : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$, $A_g = \{x \in \Omega : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$ resulta que los conjuntos A_f y A_g son μ-nulos (tienen medida nula) y se verifica

   $$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

   para $x \notin A_f \cup A_g$, siendo $\mu(A_f \cup A_g) \leq \mu(A_f) + \mu(A_g) = 0$. Por consiguiente, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

3. Si $p \in]1, \infty[$ y q es el exponente conjugado de p entonces se verifica que $q(p-1) = p$. Tengamos en cuenta que

   $$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &= (|f(x)+g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} \\ &\leq (|f(x)| + |g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder, vamos a acotar las integrales de los sumandos del último miembro de la desigualdad anterior:

$$\int |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu \leq \left(\int |f| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int |f+g|^{q(p-1)} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= N_p(f) \left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = N_p(f) N_p(f+g)^{\frac{2}{q}},$$

y análogamente

$$\int |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu \leq N_p(g) N_p(f+g)^{\frac{p}{q}}.$$

Si integramos el primer miembro y el último miembro de la desigualdad (1.3.2) y tenemos en cuenta las cotas anteriores tenemos

$$N_p(f+g)^p = N_p(f+g)^{\frac{p}{q}} (N_p(f) + N_p(g)).$$

Si $N_p(f+g) > 0$ entonces de la desigualdad anterior se deduce que

$$N_p(f+g)^{p-\frac{p}{q}} = N_p(f+g)^{p(1-\frac{1}{q})} = N_p(f+g)^{p\frac{1}{p}} = N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g).$$

Si fuese $N_p(f+g) = 0$ la desigualdad del enunciado es trivial.

En el caso $1 < p < +\infty$ hemos utilizado dos veces la desigualdad de Holder. Estas desigualdades son igualdades si y sólo existen dos números $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^+$ (resp. $\alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}^+$) no simultáneamente nulos tales que

$$\alpha_1 |f(x)|^p = \beta_1 |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}, \qquad (\text{resp. } \alpha_2 |g(x)|^p = \beta_2 |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}).$$

Por tanto, la desigualdad del enunciado es una igualdad si y sólo sí existen unas constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ no simultáneamente nulas tales que $\alpha |f(x)|^p = \beta |g(x)|^p$. ■

Como es evidente que $N_p(\alpha f) = |\alpha| \cdot N_p(f)$ si $\alpha \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, de la desigualdad de Minkowski resulta que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} N_p: & \mathcal{L}^p(\mu) & \to & \mathbb{R}, \\ & f & \mapsto & N_p(f). \end{array}$$

es una seminorma sobre $\mathcal{L}^p(\mu)$. A partir de ahora denotaremos $\|f\|_p = N_p(f)$ para $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, denotemos por $\mathcal{N}_p(\mu)$ el conjunto de las funciones tales que $\|f\|_p = 0$. Este conjunto es precisamente el conjunto de las funciones que son nulas en casi todo punto de Ω, y es el mismo para cada $1 \leq p \leq \infty$. Claramente $\mathcal{N}_p(\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^p(\mu)$. Denotemos por $L^p(\mu)$ el espacio cociente

$$L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}_p(\mu).$$

Claramente $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial cuyos elementos no son funciones sino clases de equivalencia de funciones. Si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ son tales que $[f] = [g]$ entonces $f(x) = g(x)$ en casi todo punto de Ω. Por tanto, $\|f\|_p = \|g\|_p$. Esto permite definir sin ambigüedad la aplicación $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ por medio de $\|[f]\|_p = \|f\|_p$. La aplicación así definida es una norma sobre $L^p(\mu)$, pues $\|\cdot\|_p$ es una seminorma sobre $\mathcal{L}^p$ y si $\|[f]\|_p = 0$ es porque $[f]$ es la clase de equivalencia nula.

De forma análoga a la expresada anteriormente, denotaremos por $\mathcal{N}_{\infty,l}(\mu)$ el subespacio de $\mathcal{L}_l^\infty(\mu)$ formado por las funciones tales que $\|f\|_{\infty,l} = N_{\infty,l}(f) = 0$, que está formado por las funciones que son nulas salvo en un conjunto localmente μ-nulo. El conjunto cociente $L_l^\infty(\mu) = \mathcal{L}_l^\infty(\mu)/\mathcal{N}_{\infty,l}(\mu)$ es un espacio vectorial y, como se hizo para el espacio $L^\infty(\mu)$, $\|f\|_{\infty,l}$ es una norma en este espacio, que dota a $L_l^\infty(\mu)$ de estructura de espacio normado.

Aunque los elementos de $L^p(\mu)$ sean clases de equivalencia de funciones, en los niveles de este curso y para cuestiones relativas a la integración de funciones, no supone problema alguno considerar a los elementos de $L^p(\mu)$ como si fuesen funciones. Con este convenio, algunos de los resultados sobre estos espacios se simplifican en su formulación.

1.4 Normas equivalentes

DEFINICIÓN 1.4.1 *Sea X un espacio vectorial y sean $\| \|$, $\| \|'$ dos normas en X, se dice que estas dos normas son equivalentes si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \geq \alpha > 0$ de modo que para cada $x \in X$ es $\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$.*

Si d y d' son las correspondientes métricas asociadas tenemos que $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$ y por tanto las métricas d y d' son equivalentes; así pues, d y d' inducen la misma topología (son topológicamente equivalentes). Es conocido que dos métricas pueden inducir la misma topología y no ser equivalentes. En el próximo teorema veremos que esto no sucede en el caso de los espacios normados.

TEOREMA 1.4.2 *Sea X un espacio vectorial. Si $\| \|$, $\| \|'$ son dos normas en X que inducen la misma topología entonces $\| \|$ y $\| \|'$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $\| \|$ y $\| \|'$ son dos normas en X que no son equivalentes. Podemos suponer que, por ejemplo, no es posible encontrar el número $\beta > 0$ tal que $\|x\|' \leq \beta\|x\|$ para cada $x \in X$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $\|x_n\|' > n\|x_n\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z_n = \frac{1}{\|x_n\|'}x_n$. Tenemos que $\|z_n\|' = 1$ y $\|z_n\| < \frac{1}{n}$. Como $\lim z_n = 0$ en $(X, \| \|)$ deducimos que $U = \{z \in X : \|z\|' < 1\}$ no es entorno de cero para $(X, \| \|)$; sin embargo, U sí que es entorno de cero para $(X, \| \|')$. Por tanto las topologías inducidas por estas normas no pueden coincidir. ∎

Consideremos en el espacio l_1 las normas $\| \|_1$ y $\| \|_\infty$, estas normas no son equivalentes ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|e_1 + \cdots + e_n\|_\infty = 1$ y $\|e_1 + \cdots + e_n\|_1 = n$.

En $\mathbb{K}^n$ consideremos las normas $\| \ \|_\infty$ y $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ donde $p \in [1, \infty)$. Se verifica que $\| \ \|_\infty$ y $\| \ \|_p$ son equivalentes y la topología que inducen en $\mathbb{K}^n$ es denominada topología usual.

Sea X un espacio vectorial y sea N la familia de todas las normas en X. Es inmediato comprobar que la equivalencia de normas es una relación de equivalencia en X.

Sean $(X, \| \ \|)$ y $(Y, \| \ \|')$ dos espacios normados. Es sencillo comprobar que las siguientes son normas equivalentes en el espacio vectorial $X \times Y$: $\|(x,y)\|_p = (\|x\|^p + \|y\|'^p)^{\frac{1}{p}}$ con $p \in [1, \infty)$, $\|(x,y)\|_\infty = max(\|x\|, \|y\|')$. Podemos también comprobar que la topología que inducen estas normas en $X \times Y$ es precisamente la topología producto de la inducida por $\| \ \|$ en X y la inducida por $\| \ \|'$ en Y. Es claro que estas afirmaciones son generalizables al caso de cualquier familia finita de espacios normados.

1.5 Concepto de espacio vectorial topológico

DEFINICIÓN 1.5.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea T una topología en X. Diremos que T es una topología vectorial en X, o bien que (X, T) es un espacio vectorial topológico, si son continuas las aplicaciones*

$$\begin{array}{lll} + : & X \times X \to X & , (x,y) \to x + y \\ \cdot : & \mathbb{K} \times X \to X & , (\alpha, x) \to \alpha x \end{array}$$

donde en $\mathbb{K}$ se considera la topología usual y en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$ las correspondientes topologías producto.

TEOREMA 1.5.2 *Si X es un espacio normado y T es la topología que induce la norma en X entonces (X, T) es un espacio vectorial topológico.*

DEMOSTRACIÓN Sea $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X \times X$ que es convergente a $(x, y) \in X \times X$, tenemos que $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$ y deducimos que $\lim(x_n + y_n) = x + y$.

Sea $((\alpha_n, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{K} \times X$ que converge a $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$, tenemos que $\lim \alpha_n = \alpha$ y $\lim x_n = x$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\|$ y podemos deducir que $\lim \alpha_n x_n = \alpha x$. ■

1.6 Sucesiones y series en espacios normados

El concepto de sucesión convergente tiene sentido tanto en el marco de los espacios métricos como en el marco de los espacios normados. Es evidente que el concepto de serie convergente, que veremos a continuación, no tiene sentido en el marco general de los espacios métricos.

DEFINICIÓN 1.6.1 *Sea X un espacio normado. Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se llama* ***serie de término general*** *x_n, y se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, a la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. A S_n se le denomina* ***suma parcial n-ésima*** *de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Si $\lim_{n\to\infty}(S_n) = x$ diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es* ***convergente*** *a x o bien que su suma es x y pondremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Si la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene límite se dirá que la serie es* ***divergente****.*

Diremos que una ***serie*** *es* ***de Cauchy*** *si la correspondiente sucesión de sumas parciales es de Cauchy.*

Si X es un espacio normado y $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie en X que es convergente entonces se verifica que la serie es de Cauchy y que $\lim x_n = 0$ pero el recíproco es, en general, falso.

Ejemplo 1.6.2 *Consideremos el espacio c_0 y sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, demostremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = x$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| = sup\{|x_j| : j \geq n\}$ y por tanto es claro que $\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right\| = 0$.*

DEFINICIÓN 1.6.3 *Se dice que un espacio normado X es de* ***Banach*** *si con respecto a la métrica asociada es completo, es decir si cada sucesión de Cauchy en X es convergente.*

En el siguiente teorema veremos que la completitud de un espacio normado se puede caracterizar a través de las propiedades de convergencia de sus series.

TEOREMA 1.6.4 *Sea X un espacio normado, entonces X es de Banach si y sólo si cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ converge hacia un elemento de X.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que X es de Banach y que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p > q \geq n_0$ es $\sum_{n=q+1}^{p} \|x_n\| < \varepsilon$; así pues, también será $\left\| \sum_{n=1}^{p} x_n - \sum_{n=1}^{q} x_n \right\| = \left\| \sum_{n=q+1}^{p} x_n \right\| \leq \sum_{n=q+1}^{p} \|x_n\| < \varepsilon$, por tanto como X es completo tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en X.

Recíprocamente, supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Tenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_1$ es $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2}$. Existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que si $p, q \geq n_2$ es $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^2}$. De esta manera, procediendo inductivamente, obtenemos una sucesión de naturales, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tal que si $k \in \mathbb{N}$ es $n_k < n_{k+1}$ y si $p, q \geq n_k$ es $\|x_p - x_q\| < \frac{1}{2^k}$. Tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\|$ es convergente y por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n_k} - x_{n_{k+1}})$ también será convergente, esto significa que existe $\lim_{k\to\infty} (x_{n_1} - x_{n_{k+1}}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}})$. Por tanto existe $x \in X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es sencillo deducir que $\lim x_n = x$. ∎

En la siguiente apartado incluiremos ejemplos destacados de espacios de Banach.

1.6.1 Ejemplos de espacios de Banach

1.- Si X es un espacio de Banach y $Z \subset X$ es un subespacio cerrado, tenemos que Z es también de Banach. En efecto, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Z tenemos que existe $\lim z_n = z \in X$ ya que X es completo pero también tenemos que $z \in Z$ ya que Z es cerrado. Si $Z \subset X$ es completo y X es normado es sencillo probar que Z es cerrado.

2.- *Si T es un conjunto no vacío entonces el espacio normado $B(T)$ es completo.* En efecto, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $B(T)$. Para cada $t \in T$ tenemos que $|f_p(t) - f_q(t)| \leq \|f_p - f_q\|$ y deducimos que $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Por tanto, converge a cierto elemento de $\mathbb{K}$ que denotamos por $f_0(t)$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ es $|f_p(t) - f_q(t)| < \varepsilon$ para cada $t \in T$. Dejando p fijo y haciendo $q \to \infty$ se deduce que $|f_p(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon$ para cada $t \in T$; así pues $\|f_p - f_0\| \leq \varepsilon$ si $p \geq n_0$ y será $f_p - f_0 \in B(T)$. Como $f_p \in B(T)$, deducimos que $f_0 \in B(T)$ y también que $\lim f_n = f_0$ en $B(T)$.

Observemos que, en particular, ha quedado probado que:

a.- l_∞ es completo;

b.- Si T es un espacio topológico sabemos que $BC(T)$ es un subespacio cerrado de $B(T)$ así pues $BC(T)$ es completo.

3.- c_0 *es completo.* En efecto, veamos que c_0 es un subespacio cerrado de l_∞. Sea $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de c_0 que converge a cierto $a^0 \in l_\infty$- Demostraremos que $a^0 \in c_0$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^m - a^0\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $a^m \in c_0$, existe i_0 tal que si $i \geq i_0$ es $|a^m(i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues, si $i \geq i_0$ es $|a^0(i)| \leq |a^0(i) - a^m(i)| + |a^m(i)| < \varepsilon$.

4.- De forma parecida a la demostración anterior, probaremos que c *es un subespacio cerrado de* l_∞ *y que por tanto es completo.* Sea $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de c que converge a $a^0 \in l_\infty$; probaremos que a^0 es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y que por tanto es convergente. Sea $\varepsilon > 0$, fijemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^m - a^0\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Como a^m es convergente será de Cauchy; así pues existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ entonces $|a^m(p) - a^m(q)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Por tanto, $|a^0(p) - a^0(q)| \leq |a^0(p) - a^m(p)| + |a^m(p) - a^m(q)| + |a^m(q) - a^0(q)| < \varepsilon$ si $p, q \geq n_0$.

La demostración anterior sugiere que si $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de c que converge a cierto $a^0 \in c$ y, para $n \geq 0$, $\lim\limits_i a^n(i) = x_n$. entonces se verifica que $\lim\limits_n x_n = x_0$. Esta conjetura es válida y el siguiente esquema servirá de ayuda para su demostración:

$$
\begin{array}{lllllll}
a^1 & : a^1(1) & a^1(2) & \dots & a^1(i) & \dots & \to x_1, \\
a^2 & : a^2(1) & a^2(2) & \dots & a^2(i) & \dots & \to x_2, \\
\vdots & & & & & & \\
a^n & : a^n(1) & a^n(2) & \dots & a^n(i) & \dots & \to x_n, \\
\vdots & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
a^0 & : a^0(1) & a^0(2) & \dots & a^0(i) & \dots & \to x_0
\end{array}
$$

Fijamos $\varepsilon > 0$; tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^n - a^0\| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $n \geq n_0$. Consideremos $n \geq n_0$. Para a^n existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^n(i) - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $i \geq i_1$. Análogamente, para a^0 existe $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|a^0(i) - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $i \geq i_2$. Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $j \geq i_0 = \text{máx}(i_1, i_2)$, tenemos que

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - a^n(j)| + |a^n(j) - a^0(j)| + |a^0(j) - x_0| < \varepsilon.$$

Así pues $\lim x_n = x_0$.

Por último nos planteamos la siguiente cuestión, supuesto que estamos en la situación anterior: ¿es uniforme, en $n \in \mathbb{N}$, la convergencia de $(a_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ a x_n? Es decir, dado $\varepsilon > 0$ pretendemos encontrar $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_i^n - x_n|$ sea menor que ε para cada $n \in \mathbb{N}$ si $i \geq i_0$. Probaremos que la respuesta es afirmativa. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^n - a^0\| < \frac{\varepsilon}{3}$ y $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$. Para a^0 existe j_0 tal que $|a^0(i) - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $i \geq j_0$; para a^1 existe j_1 tal que $|a^1(i) - x_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $i \geq j_1$. Así sucesivamente, para a^{m-1} existe j_{m-1} tal que $|a^{m-1}(i) - x_{m-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $i \geq j_{m-1}$. Sea $i_0 = \text{máx}(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$, si $j \geq i_0$ y $n \in \{1, \dots, m-1\}$. Es claro que $|a^n(i) - x_n| < \varepsilon$. Si $i \geq i_0$ y $n \geq m$ tenemos que $|a^n(i) - x_n| < |a^n(i) - a^0(i)| + |a^0(i) - x_0| + |x_0 - x_n| < \varepsilon$.

Finalmente supongamos que $(a_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente a x_n de manera uniforme en $n \in \mathbb{N}$ y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión convergente en $\mathbb{K}$. ¿Podemos afirmar que existe $a^0 \in c$ tal que $\lim a^n = a^0$?

5.- Denotemos

$$c_{00} = \{a \in c_0 : \text{ existe } i_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a(i) = 0, i \geq i_0\}.$$

Claramente, c_{00} es un subespacio vectorial de c_0, que es conocido como el **espacio de las sucesiones eventualmente nulas**, y c_{00} puede ser identificado con el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada. Demostraremos que c_{00} no es cerrado en c_0 y por tanto que c_{00} no es completo. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $a^n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} a^n = a^0$ en c_0, donde $a^0(i) = \frac{1}{i}$ si $i \in \mathbb{N}$. Sin embargo, pero $a^0 \notin c_{00}$.

Denotamos por $c_c = \{a \in c : \text{existen } i_0 \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha \in K \text{ tal que } a(i) = \alpha \text{ si } i \geq i_0\}$, c_c es un subespacio vectorial de c que no es cerrado y que es conocido como el **espacio de las sucesiones eventualmente constantes.**

6.- Sea $p \in [1, +\infty)$ y sea

$$l_p = \{a = (a(i))_{i\in\mathbb{N}} : a(i) \in \mathbb{K}, \text{ para } i \in \mathbb{N}, \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^p < \infty\}.$$

Si $a \in l_p$ denotamos $\|a\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Demostraremos que l_p con las operaciones usuales (de suma de sucesiones y producto de una sucesión por un escalar) es un espacio vectorial y que $\|\ \|_p$ es una norma en l_p. Sean $a, b \in l_p$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ deducimos de la desigualdad de Minkowski que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a(i) + b(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|a\|_p + \|b\|_p.$$

Así pues $\sum_{i=1}^{\infty} |a(i) + b(i)|^p$ es convergente y será $a + b \in l_p$; además $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$.

Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha a(i)|^p = |\alpha|^p \sum_{i=1}^{n} |a(i)|^p \leq |\alpha|^p \sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^p = |\alpha|^p \left(\|a\|_p\right)^p.$$

Así pues, $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha a(i)|^p$ es convergente y $\alpha a \in l_p$; además es claro que $\|\alpha a\|_p = |\alpha|\|a\|_p$.

Finalmente, observemos que si $a \in l_p$ entonces $\|a\|_p = 0$ si y sólo si $a(i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

Demostraremos ahora que el espacio normado $(l_p, \|\ \|_p)$ es completo. Sea $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en l_p. Sea $i \in \mathbb{N}$, tenemos que si $m, n \in \mathbb{N}$

es $|a^m(i) - a^n(i)| = (|a^m(i) - a^n(i)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|a^m - a^n\|_p$, así pues deducimos que $(a^n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y existe $a^0(i) = \lim_{n\to\infty} a^n(i)$. Denotemos $a^0 = (a^0(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Tenemos la intención de probar que $a^0 \in l_p$ y que $\lim a^n = a^0$ en l_p. Sea $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^n - a^m\| < \varepsilon$ si $n, m \geq n_0$. Fijamos $n \geq n_0$ y $N \in \mathbb{N}$, tenemos que $\sum_{i=1}^{N} |a^n(i) - a^m(i)|^p < (\varepsilon)^p$ para cada $m \geq n_0$. Así pues, tomando límite para $m \to \infty$ deducimos que $\sum_{i=1}^{N} |a^n(i) - a^0(i)|^p \leq (\varepsilon)^p$. Como esto es cierto para cada $N \in \mathbb{N}$, tenemos que, para $n \geq n_0$, $\sum_{i=1}^{\infty} |a^n(i) - a^0(i)|^p \leq (\varepsilon)^p$; es decir $(a^n(i) - a^0(i))_{i\in\mathbb{N}} \in l_p$ y $\|(a^n(i) - a^0(i))_{i\in\mathbb{N}}\|_p \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Por tanto, como $a^0 = (a^n(i))_{i\in\mathbb{N}} - (a^n(i) - a^0(i))_{i\in\mathbb{N}}$, deducimos que $a^0 \in l_p$ y además $\|a^n - a^0\|_p < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} a^n = a^0$.

Sean $p, q \in [1, +\infty)$. Demostraremos que si $p < q$ entonces $l_p \subset l_q$ y $l_p \neq l_q$. Sea $x \in l_p$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es $|x(n)| < 1$ y por tanto $|x(n)|^q \leq |x(n)|^p$ y podemos afirmar que $x \in l_q$. Observemos que $\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in l_q \backslash l_p$. Finalmente si $x \in l_p$ tenemos, para cada $m \in \mathbb{N}$, que $\|x - \sum_{i=1}^{m} x(i)e_i\|_p = \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} |x(i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, así pues podemos deducir que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x(i)e_i$ es convergente en l_p a x.

7.- La completitud de los espacios del tipo l_p, $1 \leq p \leq +\infty$, puede ser probada como consecuencia inmediata de la completitud de los espacios de Lebesque $L^p(\mu)$.

TEOREMA 1.6.5 **Completitud de los espàcios $L^p(\mu)$.**

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $1 \leq p \leq +\infty$. Se verifica que el espacio normado $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ una serie en $L^p(\mu)$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$ es convergente.

Supongamos en primer lugar que $p = +\infty$. Para $k \in \mathbb{N}$ sea $N_k = \{x \in \Omega : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$. Claramente $\mu(N_k) = 0$. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge para $x \notin \cup_{k=1}^{\infty} N_k$ y este último conjunto tiene medida nula. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ la aplicación definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & x \notin \cup_{k=1}^{\infty} N_k, \\ 0, & x \in \cup_{k=1}^{\infty} N_k. \end{cases}$$

La función f es medible y está esencialmente acotada por $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$. Además $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$ tiende a 0 para $n \to \infty$.

Supongamos ahora que $1 \leq p < +\infty$. Sea $g(x) = (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|)^p$. Por la desigualdad de Minkowski, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir:

$$\left(\int\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_p.$$

Por el teorema de la convergencia monótona,

$$\int g d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|\right)^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|_p\right)^p.$$

Por tanto, g es integrable, $g(x) < +\infty$ para casi todo $x \in \Omega$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es absolutamente convergente para casi todo $x \in \Omega$. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), & g(x) < +\infty \\ 0, & g(x) = +\infty. \end{cases}$$

La función f es claramente medible y verifica que $|f|^p \leq g$, por lo que $f \in L^p(\mu)$. Como en casi todo punto de $x \in \Omega$ se verifican las relaciones

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| = 0, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|^p \leq g(x),$$

el teorema de la convergencia dominada implica que $\lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=1}^{n} f_k - f\|_p = 0$. Con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Puede probarse, como en la demostración anterior, que el espacio $L_l^{\infty}(\mu)$ es también un espacio de Banach.

8.- Sea $I = [-1, 1]$ y consideremos el espacio vectorial $C(I)$ (consideramos funciones reales), en $C(I)$ definimos $\|f\| = \int_{-1}^{1}|f(t)|dt$. Es sencillo comprobar que $\|\ \|$ es una norma en $C(I)$ y demostraremos que $C(I)$ con esta norma no es completo.

Consideremos en $C(I)$ la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ nt & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Vamos a ver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C(I)$. Si $p > q$ tenemos que

$$(f_p - f_q)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ (p-q)t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{p} \\ 1 - qt & \text{si } \frac{1}{p} < t \leq \frac{1}{q} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{q} < t \leq 1 \end{cases}$$

y $\|f_p - f_q\| = \int_0^{\frac{1}{p}} (p-q)tdt + \int_{\frac{1}{p}}^{\frac{1}{q}} (1-qt)dt = \frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}$, así pues es claro que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Supongamos que existe $f_0 \in C(I)$ tal que $\lim \|f_n - f_0\| = 0$. Sea $k > 0$ tal que $|f_0(t)| < k$ si $t \in I$. Tenemos que

$$0 \le \int_{-1}^{0} |f_0(t)|dt \le \int_{-1}^{0} |f_n(t)|dt + \int_{-1}^{0} |f_n(t) - f_0(t)| \le \|f_n - f_0\|.$$

Por consiguiente, $\int_{-1}^{0} |f_0(t)|dt = 0$ y deducimos que $f_0(t) = 0$ si $t \in (-1, 0)$.

Por otra parte para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|f_n - f_0\| = \int_{-1}^{0} |f_0(t)|dt + \int_0^{\frac{1}{n}} |nt - f_0(t)|dt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - f_0(t)|dt,$$

pero $|nt - f_0(t)| \le 1 + k$ para $t \in [0, \frac{1}{n}]$, y deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} |nt - f_0(t)|dt = 0$. Por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - f_0(t)| = 0$. Supongamos que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $|1 - f_0(t_0)| = \alpha > 0$; existirán pues $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < t_1 < t_0 < t_2 < 1$ y $|1 - f_0(t)| > \frac{\alpha}{2}$ si $t \in (t_1, t_2)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$ es $\frac{1}{n} < t_1$ entonces

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - f_0(t)|dt \ge \int_{t_1}^{t_2} |1 - f_0(t)|dt > \frac{\alpha}{2}(t_2 - t_1).$$

si $n \ge n_0$. Esto es una contradicción. Por tanto, hemos demostrado que $f_0(t) = 0$ si $t \in (-1, 0)$ y $f_0(t) = 1$ si $t \in (0,1)$ pero esto no es posible ya que $f_0 \in C(I)$.

9.- Sean $(X, \| \|), (Y, \| \|')$ dos espacios normados. Si ambos espacios son completos probaremos que $X \times Y$ también es completo. En efecto, sea $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$ (es claro que esta sucesión será de Cauchy para cualquiera de las normas que inducen la topología producto). Si $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|a_p - a_q\| \le \|(a_p, b_p) - (a_q, b_q)\|_\infty$ y deducimos que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por tanto convergente a cierto $a \in X$. De manera similar se demuestra que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cierto $b \in X$. Por tanto $\lim(a_n, b_n) = (a, b)$ en $X \times Y$.

Recíprocamente, supongamos que $X \times Y$ es completo. Probaremos que también lo son X e Y. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X, fijamos $b \in Y$ y si $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|(a_p, b) - (a_q, b)\|_\infty \le \|a_p - a_q\|$, por tanto deducimos que (a_n, b) es de Cauchy en $X \times Y$ y será convergente a cierto $(x, y) \in X \times Y$, es claro que $b = y$ y que $\lim a_n = x$. De forma similar se ve que Y es completo.

El resultado que acabamos de probar es fácil de generalizar al caso de un número finito de espacios normados.

10.- Denotemos por $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathbb{C})$) el conjunto de las medidas signadas finitas (resp. medidas complejas) sobre el espacio medible (Ω, Σ). Es inmediato comprobar que estos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial respecto de la suma de medidas ($(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A)$) y el producto por un escalar ($(\lambda\nu)(A) = \lambda\nu(A)$), donde λ es un escalar real o complejo (según el caso) y donde ν, ν_1 y ν_2 son medidas signadas finitas o medidas complejas. Para tratar de estudiar simultáneamente ambos espacios, los escribiremos como $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathbb{K})$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Es fácil comprobar que la aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ definida por $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$ es una norma sobre el espacio $(\Omega, \Sigma, \mathbb{K})$. Esta norma se denomina **norma de la variación total**. No es tan sencillo probar que con esa norma el espacio $(\Omega, \Sigma, \mathbb{K})$ es un espacio completo.

Supongamos que $\{\nu_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma, \mathbb{K})$. La desigualdad

$$|\nu_m(A) - \nu_n(A)| = |(\nu_m - \nu_n)|(A) \leq \|\nu_m - \nu_n\|$$

prueba que, para $A \in \Sigma$, la sucesión numérica $\{\nu_k(A)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ es completo, esta sucesión numérica converge hacia un número que denotaremos por $\nu(A)$. Es decir $\nu(A) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(A)$. Trataremos de probar que ν define una medida signada finita o una medida compleja y que $\lim_{k\to\infty} \nu_k = \nu$ para la topología de la norma de la variación total; es decir, $\lim_{k\to\infty} \|\nu_k - \nu\| = 0$.

Es sencillo comprobar que $\nu(\emptyset) = 0$ y que ν es finitamente aditiva. Para probar que ν es numerablemente aditiva, comprobamos que la convergencia $\lim\limits_{k\to\infty} \nu_k(A) = \nu(A)$ es uniforme en $A \in \Sigma$. En efecto, por ser $\{\nu_k\}$ una sucesión de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > n_0$ entonces se verifica que $\|\nu_m - \nu_n\| = |\nu_m - \nu_n|(\Omega) < \epsilon$. Se verifica también que $|\nu_m(A) - \nu_n(A)| \leq |\nu_m - \nu_n|(\Omega) < \epsilon$ para cada $A \in \Sigma$, supuesto que $m, n > n_0$. De aquí resulta evidente que $\{\nu_k(A)\}$ converge a $\nu(A)$ uniformemente en $A \in \Sigma$.

Para probar la aditividad numerable de ν es suficiente probar que si $\{A_k\}$ es una sucesión decreciente en Σ tal que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ entonces $\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ se verifica que $|\nu(A) - \nu_n(A)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $A \in \Sigma$. Por ser ν_{n_1} numerablemente aditiva, existe un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq n_2$ se verifica $|\nu_{n_1}(A_k)| < \frac{\epsilon}{2}$. Combinando resultados, si $k \geq n_2$ se verifica que

$$|\nu(A_k)| \leq |\nu(A_k) - \nu_{n_1}(A_k)| + |\nu_{n_1}(A_k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = 0$ y por tanto ν es numerablemente aditiva.

Veamos ahora que $\lim_{k\to\infty} \|\nu_k - \nu\| = 0$. Sea, como antes, $\epsilon > 0$ y el correspondiente número natural n_0. Si $m, n > n_0$ entonces para cada partición finita $\{A_1, \cdots, A_n\}$ de Ω se verifica que $\sum_{k=1}^{n} |\nu_m(A_k) - \nu_n(A_k)| \leq \|\nu_m - \nu_n\| < \epsilon$. Tomando límites en esta expresión para $m \to \infty$ tenemos también que

$$\sum_{k=1}^{n} |\nu(A_k) - \nu_n(A_k)| \leq \epsilon.$$

Como el supremo, entre todas las posibles particiones de Ω, del primer miembro es precisamente $\|\nu - \nu_n\|$, resulta que si $n > n_0$ entonces $\|\nu - \nu_n\| \leq \epsilon$. Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} \|\nu - \nu_k\| = 0$, lo que prueba que $(\Omega, \Sigma, \mathbb{K})$ es un espacio completo.

1.7 Completitud y separabilidad en espacios normados

A continuación expondremos una serie de resultados sencillos sobre espacios normados.

TEOREMA 1.7.1 *Sea X un espacio normado entonces X es homeomorfo a U_X*

DEMOSTRACIÓN Sea $f : X \to U_X$ definida en cada $x \in X$ por $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$. Es claro que f es continua. Trataremos de estudiar si esta aplicación tiene inversa. Sea $y = \frac{x}{1+\|x\|}$, entonces $x = y(1 + \|x\|)$ y será $\|x\| = \|y\|(1 + \|x\|)$, por tanto $\|x\| = \frac{\|y\|}{1-\|y\|}$ y será $x = \frac{y}{1-\|y\|}$. Desde aquí se deduce que, si definimos $g : U_X \to X$ por $g(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$, se va a verificar que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$. Por tanto, f es biyectiva y claro está que también lo es g. Es evidente que g es continua. ∎

Proponemos estudiar si este resultado sería cierto si se cambiase U_X por B_X.

TEOREMA 1.7.2 *Sea X un espacio normado. Si $x, y \in X \setminus \{0\}$ entonces*

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

DEMOSTRACIÓN Basta observar que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \frac{1}{\|x\|\|y\|}\| \|y\|x - \|x\|y\| \\
&= \frac{1}{\|x\|\|y\|}\| \|y\|x - \|x\|y - \|y\|y + \|y\|y\| \\
&= \frac{1}{\|x\|\|y\|}\| \|y\|(x-y) - (\|x\| - \|y\|)y\| \\
&\leq \frac{1}{\|x\|}(\|x-y\| + |\|x\| - \|y\||) \\
&\leq \frac{2\|x-y\|}{\|x\|},
\end{aligned}$$

ya que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$. ∎

Si consideramos la aplicación $f : X \setminus \{0\} \to S_X$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ se deduce, del teorema anterior, que f es continua.

TEOREMA 1.7.3 *Sea X un espacio normado. Entonces X es completo si y sólo si B_X es completo.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que si X es completo entonces B_X es completo. Supongamos que B_X es completo y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X. Si existe alguna subsucesión $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en B_X tendremos que existe $x \in B_X$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_{n_k}) = x$. Es sencillo probar que entonces también es $\lim x_n = x$. En otro caso podemos considerar que los elementos de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de $X\backslash B_X$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left\| \frac{1}{\|x_p\|}x_p - \frac{1}{\|x_q\|}x_q \right\| \leq \frac{2}{\|x_p\|}\|x_p - x_q\| < 2\|x_p - x_q\|.$$

Así pues, $\left(\frac{1}{\|x_n\|}x_n\right)$ es de Cauchy en B_X y por tanto existe $z \in B_X$ tal que $\lim \frac{1}{\|x_n\|}x_n = z$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que $|\|x_p\| - \|x_q\|| \leq \|x_p - x_q\|$ y por tanto la sucesión $(\|x_n\|)$ es también de Cauchy y existirá $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim \|x_n\| = \alpha$. Entonces es sencillo probar que $\lim x_n = \alpha z$. ■

Proponemos que se demuestre que X es completo si y sólo si S_X es completo.

TEOREMA 1.7.4 *Sea X un espacio normado. Si $E \subset X$ es subespacio vectorial entonces $cl(E)$ es subespacio vectorial.*

DEMOSTRACIÓN Sean $x, y \in \mathrm{cl}(E)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Tenemos que existen en E dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Entonces $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de E tales que $\lim(x_n + y_n) = x + y$, $\lim \alpha x_n = \alpha x$. Por tanto $x + y \in \mathrm{cl}(E)$ y $\alpha x \in \mathrm{cl}(E)$. ■

TEOREMA 1.7.5 *Sean X un espacio normado y $E \subset X$ un subespacio vectorial propio ($E \neq X$). Entonces $Int(E) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $B(a, r) \subset E$, con $r > 0$. Sea $x \in X \setminus \{0\}$ y sea $\alpha > 0$ con $\alpha < \frac{r}{\|x\|}$ entonces $a + \alpha x \in B(a, r)$ y por tanto $\alpha x \in E$ y $x \in E$, deducimos que entonces $E = X$. ■

Recordemos que si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ entonces, para $x \in X$, se define la **distancia de x a A** por $d(x, A) = inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Suponemos conocidas las propiedades básicas de este concepto y que $d(x, A) = d(x, \mathrm{cl}(A))$. El siguiente teorema tendrá posteriormente diversas aplicaciones.

TEOREMA 1.7.6 **[Teorema de F. Riesz (1918)]**

Sea X un espacio normado y sea $E \subset X$ subespacio vectorial propio y cerrado. Entonces, para cada $\varepsilon \in (0, 1)$ existe $x \in S_X$ tal que $d(x, E) \geq 1 - \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN Sea $y \in X \setminus E$, como E es cerrado será $d(y, E) = \alpha > 0$. Es sencillo comprobar que $B(y, \frac{\alpha}{1-\varepsilon}) \cap E \neq \emptyset$ y consideremos $z \in B(y, \frac{\alpha}{1-\varepsilon}) \cap E$. Sea $x = \frac{1}{\|y-z\|}(y - z)$. Si $a \in E$ es $x - a = \frac{1}{\|y-z\|}(y - z - \|y - z\|a)$. Si $b = z + \|y - z\|a$ tenemos que $b \in E$ y por tanto $\|y - b\| \geq \alpha$. Deducimos pues que $\|x - a\| \geq \frac{\alpha}{\|y-z\|} \geq \alpha\frac{1-\varepsilon}{\alpha} = 1 - \varepsilon$. Por tanto $d(x, E) \geq 1 - \varepsilon$. Finalmente observemos que $d(x, E) \leq 1$ ya que $0 \in E$. ■

1.7.1 Otras propiedades de algunos subconjuntos de espacios normados

1.- Sea X un espacio normado. Si $E \subset X$ es subespacio vectorial que no es denso en X entonces para cada $\varepsilon \in (0,1)$ existe $x \in S_X$ tal que $d(x, E) \geq 1 - \varepsilon$.

2.- Sea X un espacio normado, sabemos que si $A \subset X$ es compacto entonces A es cerrado y acotado pero el recíproco es falso en general. Es conocido que un subconjunto de $\mathbb{K}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. En su momento probaremos que si X es un espacio normado n-dimensional entonces se verifica que $A \subset X$ es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado, en esta situación si $E \subset X$ es subespacio vectorial propio tenemos que se puede deducir de la compacidad de S_X, que existe $x \in S_X$ tal que $d(x, E) = 1$.

3.- Sea X un espacio normado, sean $a \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}(\alpha \neq 0)$. Es sencillo comprobar que la aplicación traslación $f_a : X \to X$, $f_a(x) = x + a$, y la aplicación homotecia $h_\alpha : X \to X$, $h_\alpha(x) = \alpha x$, son homeomorfismos. Si $A \subset X$ se define $a + A = f_a(A) = \{a + x : x \in A\}$, $\alpha A = h_\alpha(A) = \{\alpha x : x \in A\}$. Es claro que *si A es abierto o cerrado o compacto o acotado o precompacto entonces los conjuntos $a + A$ y αA tienen la correspondiente propiedad.* Si A y B son subconjuntos de X se define $A + B = \{a + b : a \in A; b \in B\}$.

4.- Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un subespacio vectorial cerrado. Sea $a \in X$, probaremos que $A + \mathcal{L}(a)$ es cerrado. Si $a \in A$ es $A + \mathcal{L}(a) = A$, por tanto vamos a suponer que $a \notin A$. Consideremos una sucesión $(a_n + \lambda_n a)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ ($a_n \in A, \lambda_n \in \mathbb{K}$ si $n \in \mathbb{N}$) de $A + \mathcal{L}(a)$ que sea convergente a cierto $x \in X$. Probaremos primero que la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, si $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es acotada existe alguna subsucesión, $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, tal que $\lim_k |\lambda_{n_k}| = \infty$. Entonces es claro que $\lim_k \frac{1}{\lambda_{n_k}}(a_{n_k} + \lambda_{n_k} a) = 0$ y por tanto $\lim_k \frac{1}{\lambda_{n_k}} a_{n_k} = -a$, como A es cerrado deducimos que $-a \in A$ lo que no es posible. Por tanto $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y existirá alguna subsucesión, $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, que será convergente a cierto $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos que $\lim_k (\lambda_{n_k} a) = \lambda a$ y como $a_{n_k} = a_{n_k} + \lambda_{n_k} a - \lambda_{n_k} a$ deducimos que $\lim_k a_{n_k} = x - \lambda a$, pero como A es cerrado será $\lim a_{n_k} = b \in A$ y por tanto $x = b + \lambda a \in A + \mathcal{L}(a)$. Partiendo de este resultado es sencillo probar, por inducción, las siguientes cuestiones:

i.- Si $A \subset X$ es subespacio vectorial cerrado y $B \subset X$ es subespacio finito dimensional entonces $A + B$ es cerrado.

ii.- Si $A \subset X$ es subespacio vectorial finito dimensional entonces A es cerrado.

1.7.2 Compacidad en espacios normados

TEOREMA 1.7.7 *Sea X un espacio normado, si B_X es precompacto entonces X es finito dimensional.*

DEMOSTRACIÓN Como B_X es precompacto existe $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset B_X$ tal que $B_X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \frac{1}{3})$. Sea $E = \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tenemos que E es subespacio vectorial cerrado de X tal que para cada $x \in S_X$ es $d(x, E) \leq \frac{1}{3}$. Por tanto, según el teorema anterior, E no puede ser subespacio vectorial propio y será $E = X$. ■

TEOREMA 1.7.8 *Sea X un espacio normado. Si existe $A \subset X$ que sea precompacto y con interior no vacío entonces X es finito dimensional.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que existe $B(a, r)(r > 0)$ tal que $B(a, r) \subset A$. Deducimos que $a + rB_X = B(a, r)$ es precompacto y por tanto también lo sería rB_X y B_X. Así pues X es finito dimensional. ■

TEOREMA 1.7.9 *Si X es un espacio de Banach infinito dimensional entonces las bases algebraicas de X tienen cardinal no numerable.*

DEMOSTRACIÓN Suponemos que es conocido que todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal (a las bases algebraicas se las denomina también como bases de Hamel). Supongamos que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ tenemos que E_n es cerrado de interior vacío. El teorema de Baire afirma que un espacio métrico completo no puede ser la unión numerable de conjuntos diseminados (conjuntos con el interior de la clausura vacía), pero con nuestra suposición obtenemos que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ lo que está en contradicción con el teorema de Baire. ■

NOTA 1.7.10 1.- Si X es un espacio vectorial infinito dimensional con base infinito numerable, como por ejemplo c_{00}, entonces no existe norma en X de modo que X sea completo.

2.- Sea X un espacio normado. Tenemos que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_X$ y si X es finito dimensional podemos afirmar que X es unión numerable de una familia de compactos.

Sabemos que c_{00} es infinito dimensional pero si para cada $n \in \mathbb{N}$ es $F_n = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ se verifica que $c_{00} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y deducimos que c_{00} es unión de una familia numerable de compactos. Supongamos que X es un espacio de Banach infinito dimensional demostraremos que X no se puede obtener como unión de una familia numerable de compactos. En efecto, si $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ es A_n compacto deducimos del teorema de Baire, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Int}(A_n) \neq \emptyset$, pero sabemos que esto no es posible en un espacio infinito dimensional.

TEOREMA 1.7.11 *Sea X un espacio normado, entonces X es separable si y sólo si existe $A \subset X$ numerable tal que $\mathcal{L}(A)$ es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $A \subset X$ es numerable y que $\mathcal{L}(A)$ es denso en X. Denotamos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el caso real es similar). Sea M el conjunto de los elementos de X que son de la forma $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$

donde $r \in \mathbb{N}$ y si $j \in \{1, \dots, r\}$ es $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ con $\alpha_j, \beta_j \in Q$. Es claro que M es numerable y demostraremos que M es denso en X. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{C}$ de modo que $\|x - (\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ con $\alpha_j, \beta_j \in Q$ y tal que $|\mu_j - \lambda_j| \leq \frac{\varepsilon}{2n\|a_j\|}$ si $a_j \neq 0$, entonces $\|(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) - x\| \leq \|(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) - (\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n)\| + \|(\mu_1 a_1 + \dots + \mu_n a_n) - x\| < \varepsilon$. ■

Obsérvese que si X es un espacio normado finito dimensional entonces X es separable.

Recordemos que en un espacio seudométrico las propiedades separable, Lindelöf y segundo axioma de numerabilidad son equivalentes. Por tanto en un espacio seudométrico las propiedades separable y Lindelöf son hereditarias y esto no es cierto en el marco general de los espacios topológicos.

Dado un espacio normado X y un subconjunto A de X denotaremos al conjunto $\mathrm{cl}\,\mathcal{L}(A)$ por $[A]$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de X denotaremos al conjunto $cl\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ por $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

TEOREMA 1.7.12 *Si X es un espacio normado tal que S_X es separable entonces X es separable.*

DEMOSTRACIÓN Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_X$ un conjunto denso en S_X. Demostraremos que $M = \{qa_n : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X y que por tanto que A es separable. En efecto, sea $x \in X \setminus S_X$ con $x \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$, para $\frac{x}{\|x\|}$ y $\frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\frac{x}{\|x\|} - a_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ entonces $\|x - \|x\|a_n\| = \|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|} - a_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Consideremos $q \in \mathbb{Q}$ tal que $|\|x\| - q| < \frac{\varepsilon}{2}$ entonces $\|x - qa_n\| \leq \|x - \|x\|a_n\| + \|\|x\|a_n - qa_n\| < \varepsilon$. ■

1.7.3 Otras propiedades de los espacios separables

1.- Si X es un espacio normado donde existe algún entorno de un punto que sea separable entonces X es separable. En efecto, se deduciría que existe $B(a, r) = a + rB_X$ que es separable y por tanto también sería separable B_X y S_X.

2.- Sea X un espacio normado de modo que existen $k \in (0, 1)$ y un conjunto numerable $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ tales que si $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $\|x - a_n\| < k$. Demostraremos que en esta situación X es separable.

En efecto, sea $E = cl(\mathcal{L}(A))$, si E es subespacio propio tenemos que existe $x \in S_X$ tal que $d(x, E) > k$ pero entonces sería $\|x - a_n\| > k$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así pues $E = X$ y X es separable.

3.- *Sea T un conjunto infinito demostraremos que entonces $B(T)$ no es separable.*

En efecto, tenemos que el conjunto $P(T)$, de los subconjuntos de T, no es numerable. Para cada $A \in P(T)$ sea χ_A la función característica de A ($\chi_A(t) = 0$ si $t \notin A, \chi_A(t) = 1$ si $t \in A$), es claro que si $A \neq B$ es $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$. Por tanto $\{U(\chi_A, \frac{1}{2}) : A \in P(T)\}$ es una familia no numerable de abiertos disjuntos dos a dos y esto implica que $B(T)$ sea no separable. Consideremos ahora $E = \{f \in B(T) : f$

toma un número finito de valores$\}$. Tenemos que E es un subespacio vectorial de $B(T)$ y demostraremos que E es denso en $B(T)$ (por tanto E no es cerrado). En efecto, sea $f \in B(T)$ y $\varepsilon > 0$, como $\operatorname{Im} f$ es precompacto en $\mathbb{K}$ existe $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ tal que $\operatorname{Im} f \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(f(t_i), \varepsilon)$. Consideremos la aplicación $g : T \to \mathbb{K}$ definida por $g(t) = f(t_i)$ si i es el primero de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $f(t) \in U(f(t_i), \varepsilon)$, es claro que $g \in E$ y $\|g - f\| < \varepsilon$. Es sencillo comprobar que este resultado no es cierto en general si T es un espacio topológico y consideramos $BC(T)$.

4.- Del apartado 3 deducimos que l_∞ *no es separable.*

Consideremos $M = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ tenemos que $\mathcal{L}(M) = c_{00}$ y es sencillo probar que c_{00} es denso en c_0.

También es sencillo probar que c_{00} es denso en l_p si $p \in [1, \infty)$.

Consideremos ahora el espacio c y sea e la sucesión constante 1, tenemos que $\mathcal{L}(M \cup \{e\}) = c_c$ y c_c es denso en c. En efecto, sea $a \in c$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $a_0 \in \mathbb{K}$ tal que $\lim_i a(i) = a_0$ y existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a(i) - a_0| < \varepsilon$ si $i \geq n_0$. Sea $b = (a(1) - a_0)e_1 + \cdots + (a(n_0) - a_0)e_{n_0} + a_0 e$, entonces $b \in c_c$ y $\|b - a\| < \varepsilon$. Por tanto ha quedado probado que los espacios c_0, c y l_p $(p \in [1, \infty))$ son separables pero que l_∞ no es separable.

5.- Sea X un espacio normado. *Si A y B son subconjuntos separables de X demostraremos que $A + B$ es separable.*

En efecto, sean $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $N = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ subconjuntos densos de A y B respectivamente. Consideremos $P = \{a_i + b_j : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$. Sean $a \in A$ y $b \in B$, sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $\|a - a_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|b - b_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$ así pues $\|(a + b) - (a_i + b_j)\| < \varepsilon$.

Si X, Y son dos espacios normados, es sencillo probar que $X \times Y$ *es separable si y sólo si X e Y son separables.*

6.- Consideremos l_∞ y sea

$$M = \{x \in l_\infty : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}[x(1) + \cdots + x(n)] = 0\}.$$

Demostraremos que M *es cerrado y no separable.*

Sea $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M que converge a x^0. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^0 - x^m\| < \frac{\varepsilon}{2}$, como $x^m \in M$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es $\frac{1}{n}|x^m(1) + \cdots + x^m(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea pues $n \geq n_0$, tenemos que $\frac{1}{n}|x^0(1) + \cdots + x^0(n)| \leq \frac{1}{n}|x^0(1) + \cdots + x^0(n)) - (x^m(1) + \cdots + x^m(n))| + \frac{1}{n}|x^m(1) + \cdots + x^m(n)| \leq \frac{1}{n}(\|x^0 - x^m\| + \overset{n)}{\cdots} + \|x^0 - x^m\|) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Para cada $A \in P(\mathbb{N})$ sea x_A la sucesión obtenida situando en los lugares de A el 1 y -1 de forma sucesiva y 0 en los demás, es claro que $\{x_A : A \in P(\mathbb{N})\} \subset M$ y es no numerable, además si $A \neq B$ es $\|x_A - x_B\| = 1$, por tanto M es no separable. Observemos que el conjunto M no es acotado.

1.8 El Teorema de Stone-Weierstrass

El clásico teorema de Weierstrass afirma que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua entonces existe una sucesión de funciones polinómicas $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |f(t) - P_n(t)| = 0$ uniformemente en $t \in [a,b]$. Este importante teorema ha conocido diversas demostraciones desde diversos puntos de vista. Aparte de la demostración original de Weierstrass, quizás la demostración más conocida sea la que se obtiene como consecuencia del teorema de Fejer sobre sumabilidad Cêsaro de series de Fourier. Ese teorema también ha tenido importantes generalizaciones. La más importante se éstas se debió a M. Stone y es expuesta a continuación.

DEFINICIÓN 1.8.1 *Sea T un conjunto y sea A un conjunto de aplicaciones de T en $\mathbb{K}$. Si para cada $f, g \in A$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica que $\{f+g, f\cdot g, \alpha f\} \subset A$ diremos que A es un* ***álgebra*** *de aplicaciones de T en $\mathbb{K}$ (subálgebra del álgebra de todas las aplicaciones de T en $\mathbb{K}$).* (Por abreviar, aquí diremos que A es un álgebra sin entrar en consideraciones sobre el concepto general de álgebra). *Diremos que A separa puntos de T si para cada $t_1, t_2 \in T$ con $t_1 \neq t_2$ existe $f \in A$ tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$.*

TEOREMA 1.8.2 ***Teorema de Dini***

Sea T un espacio topológico compacto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $C(T,\mathbb{R})$ que es decreciente (es decir $f_{n+1}(t) \leq f_n(t)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $t \in T$) y sea $f_0 \in C(T,\mathbb{R})$. Si para cada $t \in T$ se verifica que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f_0(t)$ entonces se verifica que $\lim f_n = f_0$ *en $C(T,\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $G_n = \{t \in T : f_n(t) - f_0(t) < \varepsilon\}$, tenemos que G_n es abierto y $G_n \subset G_{n+1}$. Si $t \in T$, como $\lim f_n(t) = f_0(t)$, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in G_n$. Por la compacidad de T existe $M \subset \mathbb{N}$ finito tal que $T = \bigcup_{i\in M} G_i$ y si $m \geq max\{i : i \in M\}$ tendremos que $T = G_m$, por tanto para cada $t \in T$ y cada $n \geq m$ es $T = G_n$, así pues $0 \leq f_n(t) - f_0(t) < \varepsilon$ si $n \geq m$ y $t \in T$. Por tanto $\|f_n - f_0\| < \varepsilon$ si $n \geq m$. ∎

NOTA 1.8.3 El teorema anterior también es cierto si cambiamos decreciente por creciente; pero en general no es cierto sin las hipótesis de monotonía. Como ejemplo, consideremos $T = [0,1]$ y, en $C(T,\mathbb{R})$, la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida para $n \in \mathbb{N}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \\ -2^{n+1}x + 2, & \text{si } \frac{1}{2^{n+1}} \leq x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 0, & \text{si } \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Sea f la función definida, para $x \in T$, por $f(x) = 0$. Tenemos que $\lim f_n(x) = f(x)$ para cada $x \in T$ pero es falso que $\lim f_n = f$ en $C(T,\mathbb{R})$ ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|f_n - f\| = 1$.

LEMA 1.8.4 *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la aplicación definida en cada $t \in [0,1]$ por $f(t) = \sqrt{t}$. Entonces existe una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{n\to\infty} |f(t) -$*

$P_n(t)| = 0$ *uniformemente en* $t \in [0,1]$ *y* $P_n(0) = 0$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *(observemos que se afirma que* $\lim P_n = f$ *en* $C([0,1],\mathbb{R})$*).*

DEMOSTRACIÓN Definimos, de manera recurrente, la siguiente sucesión de polinomios: $P_0(t) = 0, P_1(t) = P_0(t) + \frac{1}{2}[t - (P_0(t))^2] = \frac{1}{2}t, \ldots, P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}[t - (P_n(t))^2], \ldots$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $P_n(t)$ una función polinómica. Probaremos, por inducción, que $P_n(t) \leq \sqrt{t}$ si $t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. En efecto, dicho resultado es cierto para $n = 0$ y $n = 1$. Supongamos que $P_n(t) \leq \sqrt{t}$ si $t \in [0,1]$, tenemos que $\sqrt{t} - P_{n+1}(t) = [\sqrt{t} - P_n(t)][1 - \frac{1}{2}(P_n(t) + \sqrt{t})]$. Como $P_n(t) + \sqrt{t} \leq \sqrt{t} + \sqrt{t} \leq 2$ deducimos que $P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$.

Probaremos por inducción que $P_n(t) \geq 0$ si $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$. En efecto, eso es cierto si $n = 0$ y $n = 1$. Supongamos que $P_n(t) \geq 0$ si $t \in [0,1]$, entonces sería $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$ y deducimos que $(P_n(t))^2 \leq t$. Por tanto será $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}[t - (P_n(t))^2] \geq 0$ si $t \in [0,1]$.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$ es $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}$ deducimos que $(P_n(t))^2 \leq t$ y por tanto $P_{n+1}(t) \geq P_n(t)$ si $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,1]$. Para cada $t \in [0,1]$ tenemos que $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por $\sqrt{t}$. Existe, por tanto, $f(t) = \lim P_n(t)$. Como $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}[t - (P_n(t))^2]$, deducimos que $f(t) = f(t) + \frac{1}{2}[t - (f(t))^2]$ y por tanto será $f(t) = \sqrt{t}$ si $t \in [0,1]$. La convergencia uniforme de P_n a f se deduce del teorema de Dini. ∎

LEMA 1.8.5 *Sea A un álgebra de aplicaciones reales que están definidas sobre un conjunto T. Supongamos que A separa puntos de T y que en cada $t \in T$ no se anulan simultáneamente las aplicaciones de A. Sean $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$ y sean α_1, α_2 dos números reales. Entonces existe $f \in A$ tal que $f(t_1) = \alpha_1$ y $f(t_2) = \alpha_2$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que existe $\{f_1, f_2, f_3\} \subset A$ tal que $f_1(t_1) \neq f_1(t_2)$ $f_2(t_1) \neq 0$ y $f_3(t_2) \neq 0$. Sea $f_4(t) = f_1(t)f_3(t) - f_1(t_1)f_3(t)$ si $t \in T$, tenemos que $f_4(t_1) = 0$ y $f_4(t_2) \neq 0$. Sea $f_5(t) = f_1(t)f_2(t) - f_1(t_2)f_2(t)$, tenemos que $f_5(t_2) = 0$ y $f_5(t_1) \neq 0$. Consideremos $f(t) = \frac{\alpha_1}{f_5(t_1)}f_5(t) + \frac{\alpha_2}{f_4(t_2)}f_4(t)$ si $t \in T$. Se verifica que $f \in A$ y $f(t_1) = \alpha_1$, $f(t_2) = \alpha_2$. ∎

TEOREMA 1.8.6 ***Teorema de Stone-Weierstrass***

Sea T un espacio compacto y sea $A \subset C(T, \mathbb{R})$ un álgebra. Si A no se anula simultáneamente en cada $t \in A$ y A separa puntos de T se verifica que A es densa en $C(T, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN Consideremos $B = cl(A)$, es fácil comprobar que B sigue siendo álgebra y demostraremos que $B = C(T)$.

a) Sea $f \in B$ con $f \neq 0$. Sea $g = \frac{1}{\|f\|} f$, tenemos que g^2 toma valores en $[0,1]$. Sea $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios que converge en $C([0,1])$ a la aplicación $\sqrt{x}$ y con $P_n(0) = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $(P_n(g^2))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(T)$ que converge a $\sqrt{g^2} = |g|$. Como B es un álgebra tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $P_n(g^2) \in B$ y como B es cerrada será $|g| \in B$, por tanto también será $|f| \in B$. Es sencillo comprobar que si f, g son aplicaciones reales definidas en T entonces $\max(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$, $\min(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$, así pues si $f, g \in B$ tenemos que $\{\max(f,g), \min(f,g)\} \subset B$.

b) Sea $f \in C(T)$, veamos que $f \in B$. Sea $\varepsilon > 0$ y fijamos $a \in T$, para cada $t \in T$ existe $g^t \in A$ tal que $g^t(a) = f(a)$ y $g^t(t) = f(t)$. Consideremos $V_t = \{z \in T : g^t(z) > f(z) - \varepsilon\}$ que es entorno abierto de t. Por la compacidad de T deducimos que existe $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$ tal que $T = V_{t_1} \cup \cdots \cup V_{t_n}$. Sea $g_a = max(g^{t_1}, \ldots g^{t_n})$, tenemos que $g_a \in B$ y se verifica que $g_a(a) = f(a)$ y $f(z) - \varepsilon < g_a(z)$ si $z \in T$. Consideremos la familia $\{g_a : a \in T\}$, para cada $a \in T$ tenemos que $W_a = \{z \in T : g_a(z) < f(z) + \varepsilon\}$ en un entorno abierto de a, así pues existe $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset T$ tal que $T = W_{a_1} \cup \cdots \cup W_{a_m}$. Sea $g = min\{g_{a_1}, \ldots, g_{a_m}\}$. Tenemos que $g \in B$ y si $z \in T$ existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $z \in W_{a_i}$, con lo cual será $g_{a_i}(z) - \varepsilon < f(z)$ y por tanto $g(z) - \varepsilon < f(z)$. Por otra parte, es claro que también se verifica que $f(z) < g(z) + \varepsilon$. Como B es cerrado deducimos que $f \in B$.

■

Si en las condiciones del teorema anterior consideramos $C(T, \mathbb{C})$ y $M = \{p + iq : p, q \in A\}$ es claro que M es denso en $C(T, \mathbb{C})$, sin embargo para el caso complejo existe el siguiente teorema: *Sea T un espacio compacto y $A \subset C(T, \mathbb{C})$ un álgebra que separa puntos y que en cada $t \in T$ no se anula simultáneamente, supongamos que además si $f \in A$ también es $\overline{f} \in A$ ($\overline{f}(t) = \overline{f(t)}$ si $t \in T$), entonces A es denso en $C(T, \mathbb{C})$.*

Pasamos a demostrar este resultado. Sea $A' = \{f \in A : f(T) \subset \mathbb{R}\}$, veamos que A' está en las condiciones del teorema anterior. Si $f = Ref + \operatorname{Im} f$ es un elemento de A tenemos que $\overline{f} = Ref - i \operatorname{Im} f \in A$ y deducimos que $\{Ref, \operatorname{Im} g\} \subset A$ y $\{Ref, \operatorname{Im} f\} \subset A'$. Si $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in T$ y $f \in A$ es tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$ es claro que o bien $Ref(t_1) \neq Ref(t_2)$ o bien $\operatorname{Im} f(t_1) \neq \operatorname{Im} f(t_2)$. Además si $f(t_1) \neq 0$ o bien es $Ref(t_1) \neq 0$ o bien es $\operatorname{Im} f(t_1) \neq 0$. Así pues, si $f \in C(T, \mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que existen $p, q \in A'$ tal que $\|Ref - p\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|\operatorname{Im} f - q\| < \frac{\varepsilon}{2}$, es claro que $h = p + iq \in A$ y que $\|f - h\| < \varepsilon$.

Si tenemos un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ y consideramos el conjunto $C([a,b], \mathbb{R})$ tenemos que $A = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es polinómica}\} \subset C([a,b], \mathbb{R})$ es un álgebra que no se anula simultáneamente en $[a,b]$ y que separa puntos de $[a,b]$. Así pues, A es densa en $C([a,b], \mathbb{R})$ y por tanto queda probado el clásico teorema de Weierstrass.

Si consideramos el conjunto de funciones polinómicas $B = \{x^n : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ tenemos que B es numerable y que $\mathcal{L}(B) = A$, así pues $C([a,b],\mathbb{R})$ es separable. Es sencillo deducir que $C([a,b],\mathbb{C})$ es también separable.

Podíamos pensar que las funciones polinómicas son también densas en $C(T,\mathbb{C})$ donde $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Es conocido, en variable compleja, que el límite uniforme de funciones complejas que son diferenciables es también diferenciable, por tanto si $f : T \to \mathbb{C}$ es continua y no diferenciable no puede ser uniformemente aproximada por polinomios.

1.9 Conjuntos equicontinuos. Teoremas de Ascoli y Arzelá

DEFINICIÓN 1.9.1 *Sea T un espacio métrico compacto y consideremos el correspondiente espacio de Banach, $C(T)$, de las funciones escalares definidas y continuas en T. Si $S \subset C(T)$ se dice que S es* ***equicontinuo*** *en $t \in T$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(t,y) < \delta$ es $|f(t) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $f \in S$.*

TEOREMA 1.9.2 **[Teorema de Ascoli (1883)]**
Sea T un espacio métrico compacto. Si $S \subset C(T)$ es puntualmente acotado en T y equicontinuo en cada $t \in T$ entonces S es precompacto en $C(T)$ (por tanto S es uniformemente acotado en T).

DEMOSTRACIÓN Por el hecho de que S sea puntualmente acotada en T se entiende que para cada $t \in T$ se verifica que $\{|f(t)| : f \in S\}$ es un conjunto acotado. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in T$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $y \in B(t,\delta_t)$ es $|f(t) - f(y)| < \varepsilon$, para $f \in S$. Por la compacidad de T existirá $\{t_1,\dots,t_n\} \subset T$ tal que $T = \bigcup_{i=1}^{n} B(t_i,\delta_{t_i})$. Para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ existe $\alpha_i > 0$ tal que si $f \in S$ es $|f(t_i)| \leq \alpha_i$. Sea $\alpha = \max\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} + \varepsilon$. Si $y \in T$ y $f \in S$ existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $y \in B(t_j,\delta_{t_j})$, será $|f(y) - f(t_j)| < \varepsilon$ y por tanto $|f(y)| \leq |f(y) - f(t_j)| + |f(t_j)| \leq \alpha$. Así pues S será uniformemente acotada en T (es decir S es subconjunto acotado de $C(T)$).

Sea $M = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \alpha\}$, tenemos que $M^n = M \times \cdots \times M$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}^n$. En $\mathbb{K}^n$ consideraremos la norma $\| \|_1$. Para cada $f \in S$ denotamos $e(f) = (f(t_1),\dots,f(t_n)) \in M^n$. Existe un número finito de bolas abiertas, $V_1,\dots,V_m$, en $\mathbb{K}^n$ con radio menor que ε y de modo que $M^n \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$. Para cada $j \in \{1,\dots,m\}$ escogemos $f_j \in S$ tal que $e(f_j) \in V_j$ si es que $V_j \cap \{e(f) : f \in S\}$ es no vacío. Probaremos que $S \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(f_j, 4\varepsilon)$. Sea $f \in S$ entonces existe $j \in \{1,\dots,m\}$ tal que $e(f) \in V_j$ y será $|f(t_i) - f_j(t_i)| < 2\varepsilon$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Si $t \in T$ tenemos que existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tal que $t \in B(t_i,\delta_{t_i})$ pero entonces $|f(t) - f(t_i)| < \varepsilon$ y $|f_j(t) - f_j(t_i)| < \varepsilon$. Por tanto $|f(t) - f_j(t)| \leq |f(t) - f(t_i)| + |f(t_i) - f_j(t_i)| + |f_j(t_i) - f_j(t)| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$; de aquí deducimos que $\mathrm{cl}(S)$ es compacto. ∎

Teorema 1.9.3 **[Teorema de Arzela (1889)]**

Sea T un espacio métrico compacto y sea $S \subset C(T)$ es equicontinuo en cada $t \in T$ y es puntualmente acotado. Cada sucesión de S tiene alguna subsucesión que converge uniformemente en T a algún elemento de $C(T)$.

Demostración Es una sencilla consecuencia del teorema de Ascoli, ya que en la situación del teorema sería $\mathrm{cl}(S)$ compacto en $C(T)$. ∎

Tema 2

Aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados

2.1 Aplicaciones lineales y continuas

El estudio de las aplicaciones lineales entre espacios normados es una cuestión esencial tanto en el Análisis Funcional como en el estudio de sus aplicaciones. Aquí, cuando hablemos de una aplicación lineal entre dos espacios normados, estaremos suponiendo que ambos espacios tienen el mismo cuerpo de escalares.

TEOREMA 2.1.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) T es uniformemente continua en X;

2) T es continua en X;

3) T es continua en $0 \in X$;

4) Existe $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para cada $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN $\underline{3) \Rightarrow 4)}|$ Tenemos que $T(0) = 0$ así pues existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $\|x\| \leq \delta$ se verifica que $\|T(x)\| \leq 1$. Si $x \in X$ y $x \neq 0$ tenemos que $\left\|\frac{\delta}{\|x\|}x\right\| \leq \delta$ y por tanto $\left\|\frac{\delta}{\|x\|}T(x)\right\| \leq 1$ es decir $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$, así pues basta tomar $M = \frac{1}{\delta}$.

$\underline{4) \Rightarrow 1)}|$ Es evidente, ya que $\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Las restantes implicaciones son triviales. ∎

Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. En ocasiones, por comodidad, si $x \in X$ denotaremos a $T(x)$ por Tx. Es también usual denominar a las aplicaciones lineales con el término de **operador**.

Diremos que la **aplicación lineal** T es **acotada** si transforma conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y. Es sencillo deducir, del teorema anterior, que si T es lineal entonces T es continua si y sólo si T es acotada. Observemos que en el caso en que T sea lineal y continua se verifica que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es una serie en X que converge a x entonces $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es una serie en Y que converge a Tx.

Supongamos que $T : X \to Y$ es lineal de modo que además es continua en cierto $x \in X \setminus \{0\}$, demostraremos que entonces T es continua en $x = 0$ y por tanto que T es continua en X. En efecto, sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de X que converge a cero, tenemos que $\lim(x_n + x) = x$ y por tanto deducimos que $\lim(Tx_n + Tx) = Tx$, así pues $\lim Tx_n = 0$.

2.1.1 Espacios de aplicaciones lineales. Dual de un espacio normado

Sean X, Y dos espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de X en Y. Es sencillo comprobar que si $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ son continuas y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $T_1 + T_2$ y αT_1 son continuas. Denotaremos por $C\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Si $X = Y$ denotaremos $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,Y)$ y $C\mathcal{L}(X) = C\mathcal{L}(X,Y)$ (suponiendo, en este caso, que la norma que se considera en X como espacio inicial es la misma que la que se considera en X como espacio final).

Si $Y = \mathbb{K}$ denotaremos por X' a $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ que se denominará **dual algebraico** de X y por X^* a $C\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ que denominaremos **dual topológico** de X o bien simplemente "dual de X".

Sea $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$, sabemos que existe $M > 0, M \in \mathbb{R}$, tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ si $x \in X$, así pues el conjunto

$$\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \setminus \{0\} \right\} = \{\|Tx\| : x \in S_X\}$$

está acotado superiormente y a su supremo lo denotaremos por $\|T\|$. Es claro que $\|T\| \leq M$ sea cual sea el M escogido tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ si $x \in X$. También es claro que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ si $x \in X$. Es sencillo comprobar que $\|T\|$ es exactamente el ínfimo de los números $M > 0$ tales que $\|Tx\| \leq M\|x\|$ si $x \in X$.

Comprobaremos ahora que si $\alpha(T) = sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$ entonces $\alpha(T) = \|T\|$. En efecto, si $x \in B_X$ es $\|Tx\| \leq \|T\|$ así pues $\alpha(T) \leq \|T\|$ pero como $S_X \subset B_X$ es claro que $\|T\| \leq \alpha(T)$.

Vamos ahora a demostrar que con la definición de $\|T\|$ tenemos definida en $C\mathcal{L}(X,Y)$ una norma. En efecto:

- Es claro que $\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$.

- Si $\alpha \in \mathbb{K}$ para cada $x \in S_X$ tenemos que $\|(\alpha T)(x)\| = |\alpha|\|Tx\|$, así pues será $\|\alpha T\| = |\alpha|\|T\|$.
- Si $T_1, T_2 \in C\mathcal{L}(X,Y)$ para cada $x \in S_X$, es $\|(T_1+T_2)(x)\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\|$, por tanto $\|T_1+T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$.

Siempre asumiremos que $C\mathcal{L}(X,Y)$ (o bien X^*) está dotado de esta norma. Observemos que si $f \in X^*$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}\|f\| &= sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = sup\{f(x) : x \in B_X\} = sup\{|f(x)| : x \in S_X\}\\ &= sup\{f(x) : x \in S_X\}.\end{aligned}$$

Los elementos de X^* serán también denotados, en ocasiones, por x^* y es usual que se les denomine con el término de "funcionales" o formas lineales .

Sea X un espacio vectorial complejo, sabemos que X puede ser considerado como espacio vectorial real tomando como operación externa a αx con $\alpha \in \mathbb{R}$, en esta situación a este espacio vectorial lo denotamos por $X_{\mathbb{R}}$. Una aplicación de $X_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$ que sea lineal será denominada lineal real y si $f : X \to \mathbb{C}$ es lineal la denominaremos aquí, para evitar confusiones, como lineal compleja.

Consideremos $g : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definida por $g(z) = Re\, z$ (parte real de z) tenemos que g es lineal real. Si consideramos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Re\, z$, es claro que f no es lineal compleja, pues $f(1+i) = 1, f(i(1+i)) = -1, if(1+i) = i$.

Si $f : X \to \mathbb{C}$ es lineal compleja es claro que $g = Re\, f$ y $h = \text{Im}\ f$ (parte real y parte imaginaria de f) son aplicaciones lineales reales.

Es importante observar que *si g y h son lineales reales no tiene porque ser cierto que $f = g + ih$ sea lineal compleja; es preciso que se verifique cierta relación entre g y h para que podamos afirmar que f es lineal compleja.*

En efecto, si $f : X \to \mathbb{C}$ es lineal compleja y $f(x) = g(x) + ih(x)$ si $x \in X$ con $g = Re\, f$, $h = \text{Im}\ f$ y g,h formas lineales reales. Entonces, para cada $x \in X$, tenemos que $f(ix) = g(ix) + ih(ix) = if(x) = -h(x) + ig(x)$ así pues $h(x) = -g(ix)$ si $x \in X$. Por tanto *si g es lineal real la única posible aplicación lineal compleja f tal que $Ref = g$ es la que está definida por $f(x) = g(x) - ig(ix)$.* Vamos a demostrar que efectivamente la aplicación f definida de esta manera es lineal compleja. Sea $\alpha = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}f((\lambda+i\mu)x) &= g(\lambda x + i\mu x) - ig(-\mu x + i\lambda x)\\ &= \lambda g(x) + \mu g(ix) + i\mu g(x) - i\lambda g(ix)\\ &= (\lambda + i\mu)g(x) - i(\lambda + i\mu)g(ix) = (\lambda + i\mu)f(x).\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que *si X es normado y $f : X \to \mathbb{C}$ es lineal compleja y continua entonces*

$$\|f\| = sup\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}, x \in B_X\} = sup\{f(x) : f(x) \in \mathbb{R}, x \in S_X\}.$$

En efecto, basta observar que si $x \in X$ y $\theta = arg\, f(x)$ será $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ y por tanto si $z = e^{-i\theta}x$ es $\|z\| = \|x\|$ y $f(z) = |f(x)|$. Si $f : X \to \mathbb{C}$ es lineal compleja y es continua es claro que $g = Ref$ y $h = \text{Im}\, f$ son continuas.

Finalmente demostraremos que *si* $f : X \to \mathbb{C}$ *es lineal de modo que* $g = Ref$ *es continua entonces* f *es continua y* $\|f\| = \|g\|$. En efecto, si $x \in X$ y $f(x) \neq 0$ consideremos $\alpha = \frac{|f(x)|}{f(x)}$ entonces será $|f(x)| = f(\alpha x) = g(\alpha x) \leq \|g\|\|\alpha x\| = \|g\|\|x\|$, así pues f es continua. Por otra parte es claro que si $x \in X$ es $|g(x)| = |Ref(x)| \leq |f(x)|$. Por tanto deducimos que $\|f\| = \|g\|$.

Recordemos que si (X, d) e (Y, d') son dos espacios métricos entonces se dice que una aplicación T de X en Y es una isometría si para cada $x_1, x_2 \in X$ se verifica que $d'(T(x_1), T(x_2)) = d(x_1, x_2)$. Es claro que toda isometría es uniformemente continua.

Es sencillo comprobar que *si* X, Y *son dos espacios normados y* $T : X \to Y$ *es lineal entonces* T *es isometría si y sólo si* $\|Tx\| = \|x\|$ *para cada* $x \in X$. En esta situación es claro que $\|T\| = 1$. No obstante, observaremos más adelante que puede suceder que sea $\|T\| = 1$ y no ser T isometría; mas aún, incluso puede suceder que $\|T\| = 1$ y $\|Tx\| < 1$ si $x \in S_X$.

Si X, Y, Z son tres espacios normados y tenemos $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$, $S \in C\mathcal{L}(Y, Z)$ es claro que la correspondiente composición ST es un elemento de $C\mathcal{L}(X, Z)$, en esta situación para cada $x \in B_X$ tenemos que $\|STx\| \leq \|S\|\|Tx\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$ y por tanto $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Si X es un espacio vectorial y $T : X \to X$ es una aplicación lineal denotaremos, para $n \in \mathbb{N}$, por T^n a la aplicación obtenida al componer T con T n veces. Si X es un espacio normado y $T \in C\mathcal{L}(X)$ es claro que $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ si $n \in \mathbb{N}$.

Sean X, Y dos espacios normados y sea $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$, se dice que T **alcanza la norma** si y sólo si existe $x \in B_X$ tal que $\|Tx\| = \|T\|$. Observemos que en esta situación se verifica que $x \in S_X$ ya que si $\|x\| < 1$ tendríamos que $\|T\| = \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| < \|T\|$, lo que no es posible. Más adelante probaremos que si X es normado finito dimensional entonces B_X es compacto, así pues, en este caso, es sencillo comprobar que si Y es otro espacio normado y $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ tenemos que T alcanza la norma.

Finalmente observemos que si $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ $(T \neq 0)$ y $\alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces existe $x \in X$ tal que $\|Tx\| = \alpha$; en concreto, existirá un $x \in X$ tal que $\|Tx\| = \|T\|$, pero esto no significa que T alcance la norma.

2.2 Ejemplos de aplicaciones lineales y continuas

1.- Sea S un conjunto no vacío, para cada $t \in S$ definimos la aplicación $\varphi_t : B(S) \to \mathbb{K}, \varphi_t(f) = f(t)$. Esta aplicación es lineal y continua y puede ser denominada **aplicación evaluación** en t. Para cada $f \in B(S)$ tenemos que $|\varphi_t(f)| = |f(t)| \leq \|f\|$. Sea $e \in B(S)$ la aplicación constante 1, se verifica que $\varphi_t(e) = e(t) = 1$ y es ya fácil deducir que $\varphi_t(e) = \|\varphi_t\| = 1$; así pues, φ_t alcanza la norma.

2.- Consideremos $C([a, b])$ y la aplicación $\varphi : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$. Tenemos que φ es lineal y para cada $f \in C([a, b])$ es $|\varphi(f)| \leq \|f\|(b-a)$, así pues $\|\varphi\| \leq b - a$, pero si e es la aplicación constante 1 se verifica que $\varphi(e) = b - a$, por tanto $\varphi(e) = \|\varphi\|$.

3.- Consideremos c_{00} y sea $\varphi : c_{00} \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)$, tenemos que φ es lineal pero si para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x_n = e_1 + \cdots + e_n$ tenemos que $\|x_n\| = 1$ y $|\varphi(x_n)| = n$, así pues φ no es continua.

4.- Sea $S : l_\infty \to l_\infty$ la aplicación definida por $Sx = (0, x(1), x(2), \dots)$. Tenemos que S es una isometría lineal con $S(l_\infty) = \{y \in l_\infty : y(1) = 0\}$.

5.- Consideremos ala aplicación $T : l_\infty \to l_\infty$ definida por $Tx = (x(2), x(3), \dots)$. Es claro que $\|T\| \leq 1$. Como $\|Te_2\| = \|e_1\| = 1$, se cumple $\|T\| = 1$.

6.- En relación a los dos últimos ejemplos, observemos que $TS = I$ pero $ST \neq I$, donde I denota la aplicación identidad.

Sin embargo, sabemos que si X es un espacio vectorial finito dimensional y $S, T \in \mathcal{L}(X)$ son tales que $ST = I$ entonces $TS = I$. Hemos comprobado, por tanto, que este resultado no es cierto, en general, para el caso en que X sea de dimensión no finita.

5.- Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach Y. Sea $M = sup\{\|a_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. Si $x \in l_1$ tenemos que

$$\left\| \sum_{i=p+1}^{q} x(i)a_i \right\| \leq M \sum_{i=p+1}^{q} |x(i)|,$$

para $q > p$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Así pues, deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} x(i)a_i$ es convergente en Y. Podemos considerar la aplicación $T : l_1 \to Y$ definida por $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)a_i$. Es claro que T es lineal y $\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)a_i\| \leq M\|x\|$. Por tanto, $\|T\| \leq M$.

6.- Sea $f : c_0 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$. Tenemos que f es lineal y $|f(x)| \leq \|x\|$ si $x \in c_0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|e_1 + \cdots + e_n\| = 1$ y $f(e_1 + \cdots + e_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$, por lo que $\|f\| = 1$. Pero, para $x \in B_{c_0}$, tenemos que $|x(n)| \leq 1$ si $n \in \mathbb{N}$ y además existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ es $|x(n)| < \frac{1}{2}$; así pues, $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2} \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < 1$. Tenemos, por tanto, que f no alcanza la norma.

7.- Sean X, Y dos espacios normados. Fijados $f \in X^*$ y $a \in Y$ definimos $T : X \to Y$ en cada $x \in X$ por $T(x) = f(x)a$. Claramente T es lineal y si $x \in X$ es $\|Tx\| \leq \|f\|\|x\|\|a\|$. Por tanto, T es continua con $\|T\| \leq \|f\|\|a\|$. Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $x \in S_X$ tal que $\|f\| - \frac{\varepsilon}{\|a\|} < f(x)$ (suponemos $a \neq 0$). Entonces $\|T\| \geq \|Tx\| = |f(x)|\,\|a\| > \|f\|\,\|a\| - \varepsilon$ y deducimos que $\|T\| = \|f\|\,\|a\|$.

2.3 Isomorfismos entre espacios normados

DEFINICIÓN 2.3.1 *Sean X, Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, diremos que T es un* **isomorfismo topológico** *si T es biyectiva y se verifica que $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$y$T^{-1} \in C\mathcal{L}(Y, X)$, donde T^{-1} es la aplicación inversa de T.*

Un isomorfismo topológico es por tanto un isomorfismo algebraico que es también homeomorfismo, aquí abreviaremos denominándolo sólo por isomorfismo.

Si X, Y, Z son tres espacios normados y $T \in C\mathcal{L}(X, Y), S \in C\mathcal{L}(Y, Z)$ son isomorfismos entonces ST es isomorfismo y el isomorfismo inverso es $T^{-1}S^{-1}$.

Si existe algún isomorfismo entre dos espacios normados X e Y diremos que X e Y son isomorfos y pondremos $X \cong Y$. Es claro que si $X \cong Y$ e $Y \cong Z$ entonces $X \cong Z$.

TEOREMA 2.3.2 *Sean X, Y dos espacios normados y sea T una aplicación lineal y sobreyectiva de X en Y. Entonces T es isomorfismo si y sólo si existen $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN Si T es un isomorfismo tenemos para cada $x \in X$ que $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ y $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$. Basta tomar $\beta = \|T\|$ y $\alpha = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

Supongamos ahora que existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$. Si $Tx = 0$ será $\alpha\|x\| = 0$ y $x = 0$, por tanto T es biyectiva. Es claro que T es continua, veamos que también lo es T^{-1}. Sea $y \in Y$ y sea $x \in X$ tal que $Tx = y$ tenemos que $\|T^{-1}(y)\| = \|T^{-1}(Tx)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx\| = \frac{1}{\alpha}\|y\|$. ∎

Una isometría lineal sobreyectiva entre dos espacios normados es un caso particular de isomorfismo.

Si X, Y son dos espacios normados y $T : X \to Y$ es una aplicación lineal tal que para ciertos $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ se verifica que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ entonces T es un isomorfismo entre X y TX. Por tanto, los espacios normados X y TX serán isomórficos. Por otra parte, si T es isomorfismo de X en TX existirán $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$.

Ejemplo 2.3.3 *Vamos a probar que c es isomórfico a c_0. Primero estudiaremos la aplicación $l : c \to \mathbb{K}$ definida, para cada $x \in c$, por $l(x) = \lim x(n)$. Es claro que l es lineal y que $|l(x)| \leq \|x\|$ si $x \in c$. Si e es la sucesión constante 1 tenemos que $|l(e)| = 1$; así pues, $\|l\| = 1$.*

Definimos $T : c \to c_0$, para $x \in c$, de la siguiente forma: $(Tx)(1) = l(x)$, $(Tx)(n) = x(n-1) - l(x)$ si $n > 1$. Es claro que T es lineal y que $\|Tx\| \leq 2\|x\|$. Demostraremos que $\|Tx\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$. En efecto, si fuese $|l(x)| \geq \frac{1}{2}\|x\|$ entonces $\frac{1}{2}\|x\| \leq |l(x)| = |Tx(1)| \leq \|Tx\|$; en otro caso existirá $\delta > 0$ tal que $|l(x)| = \frac{1}{2}\|x\| - \delta$ y existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| > \|x\| - \delta$. Tenemos que $|(Tx)(n+1)| = |x(n) - l(x)| \geq |x(n)| - |l(x)| > \|x\| - \delta - \frac{1}{2}\|x\| + \delta = \frac{1}{2}\|x\|$.

Finalmente probaremos que T es sobreyectiva. Sea $y \in c_0$ y consideremos $x \in c$ donde $x(n) = y(1) + y(n+1)$, es evidente que $l(x) = y(1)$ y que $T(x) = y$.

Pudiéramos pensar que c_0 y c pueden ser linealmente isométricos; sin embargo, vamos a ver que esto no es posible.

Supongamos que la aplicación $T : c \to c_0$ es una isometría lineal sobreyectiva. Sea $Te = x$, tenemos que $x \in S_{c_0}$ y sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $|x(j)| < 1$. es sencillo comprobar que existen $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha_j \neq \beta_j, |\alpha_j| \leq 1, |\beta_j| \leq 1$ y $x(j) = \frac{1}{2}\alpha_j + \frac{1}{2}\beta_j$. Sean $y, z \in c_0$ definidos por $y(i) = z(i) = x(i)$ si $i \neq j$, $y(j) = \alpha_j$, $z(j) = \beta_j$. Tenemos que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $y, z \in S_{c_0}$. Sean $y', z' \in c$ tales que $Ty' = y$, $Tz' = z$, será $\|y'\| = \|z'\| = 1$. Como $T^{-1}x = \frac{1}{2}T^{-1}y + \frac{1}{2}T^{-1}z$ será $e = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z'$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se verifica que $1 = \frac{1}{2}y'(i) + \frac{1}{2}z'(i)$. Como $|y'(i)| \leq 1, |z'(i)| \leq 1$ es fácil deducir que $y'(i) = z'(i) = 1$ (incluso en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Así pues, $y' = z' = e$. Por tanto $y - z = T(y' - z') = 0$, en contradicción con que $y(j) \neq z(j)$.

Si X e Y son dos espacios normados y $T : X \to Y$ lineal entonces se verifica que el núcleo de T ($\ker T$) es el subespacio $T^{-1}(\{0\})$. Si además T es continua es claro que $\ker T$ es cerrado. Sin embargo, en el ejemplo que sigue se prueba que *puede ocurrir que sea* $\ker T$ *cerrado sin que T sea continua.*

Ejemplo 2.3.4 *Sea $X = C'([0,1])$ el espacio normado (norma del supremo) de las funciones reales definidas en $[0,1]$ y que tienen derivada continua en $[0,1]$. Sea $Y = C([0,1])$ y consideremos la aplicación $T : X \to Y$ definida en cada $f \in X$ por $T(f) = f'$ (función derivada). T es lineal pero no es continua ya que si para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f_n(t) = t^n$ tenemos que $\|f_n\| = 1$ y $\|Tf_n\| = n$. Observemos que el núcleo de T (*$\ker T$*) está formado por las funciones constantes y es claramente un subespacio cerrado de X.*

En el siguiente teorema (teorema 2.3.5) demostraremos que la situación del ejemplo anterior no es posible cuando $Y = \mathbb{K}$.

Vara probar ese resultado, vamos a ver en primer lugar que *si X es un espacio de Banach, Y es un espacio normado y T es un isomorfismo de X sobre Y entonces Y es completo.* En efecto, tenemos que existen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in X$ tal que $Tx_n = y_n$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ tenemos que $\alpha\|x_p - x_q\| \leq \|T(x_p - x_q)\| \leq \|y_p - y_q\|$ y deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X, así pues existe $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$, es claro que $\lim y_n = Tx$.

Observemos también que si X es un espacio vectorial y $f : X \to \mathbb{K}$ es una aplicación lineal no nula entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) \neq 0$. Consideremos $e = \frac{1}{f(z)}z$; tenemos que $f(e) = 1$ y para cada $x \in X$ se verifica que $x - f(x)e \in \ker f$. Es claro entonces que $\ker f + \mathcal{L}(e) = X$.

TEOREMA 2.3.5 *Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal, entonces f es continua si y sólo si* $\ker f$ *es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN Si f fuese no continua tenemos que existirán una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X y $\delta > 0$ de modo que $\lim x_n = 0$ y $|f(x_n)| > \delta$ si $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $e \in X$ tal que $f(e) = 1$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n = e - \frac{1}{f(x_n)}x_n$. Tenemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\ker f$ pero $\lim z_n = e$ y $e \notin \ker f$. ∎

TEOREMA 2.3.6 *Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Si $E = ker f$ entonces para cada $x \in X$ es $|f(x)| = \|f\| d(x, E)$.*

DEMOSTRACIÓN Si $f = 0$ el resultado es evidente. Supongamos que $f \neq 0$ y sea $x \in X$. Para cada $y \in E$ tenemos que $|f(x)| = |f(x-y)| \leq \|f\|\|x-y\|$ y deducimos que $d(x, E) \geq \frac{|f(x)|}{\|f\|}$. Sea $\alpha > 1$, tenemos que existe $z \in B_X$ tal que $|f(z)| > \frac{1}{\alpha}\|f\|$. Sea $e = \frac{1}{f(z)}z$, tenemos que $x - f(x)e \in E$ y $d(x, E) \leq \|x - (x - f(x)e)\| = \|f(x)e\| \leq \frac{|f(x)|}{|f(z)|} < \alpha\frac{|f(x)|}{\|f\|}$ y de aquí deducimos que $d(x, E) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|}$. ∎

En la siguiente nota trataremos algunas cuestiones algebraicas que mas adelante serán de gran utilidad. Así, las formas lineales que se consideran no son necesariamente continuas.

2.3.1 Algunas propiedades de las formas lineales.

1.- *Sea X un espacio vectorial. Sean $f, g : X \to \mathbb{K}$ dos aplicaciones lineales con el mismo núcleo. Demostraremos que existe $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, tal que $g = \alpha f$.*

En efecto, si $\ker f = ker g = X$ es claro que $f = g = 0$. En otro caso existe $e \in X$ tal que $f(e) = 1$, tenemos que $g(e) = \alpha \neq 0$. Si $x \in X$ será $x - f(x)e \in \ker f$ y por tanto $g(x - f(x)e) = 0$ es decir $g(x) = \alpha f(x)$, por tanto $g = \alpha f$.

2.- *Sea X un espacio vectorial, se dice que un subespacio vectorial E de X es **maximal** si E es propio ($E \neq X$) y si F es un subespacio vectorial de X tal que $E \subset F$ y $E \neq F$ entonces se verifica que $F = X$.*

Sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal no nula, demostraremos que $\ker f$ *es subespacio vectorial maximal de X.*

En efecto, sea E subespacio vectorial de X tal que $\ker f \subset E$ y $E \neq \ker f$. Sea $z \in E$ tal que $z \notin \ker f$. Consideremos $e = \frac{1}{f(z)}z$, si $x \in X$ tenemos que $\{x - f(x)e, e\} \subset E$ y deducimos que $x \in E$, así pues $E = X$.

Supongamos que $M \subset X$ es subespacio vectorial maximal de X, demostraremos que *existe una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{K}$, tal que* $\ker f = M$.

Sea $e \in X \setminus M$, entonces $M + \mathcal{L}(e) = X$ y cada $x \in X$ se puede expresar de forma única como $x = a + \alpha e$ con $a \in M$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Si definimos $f : X \to \mathbb{K}$, por $f(x) = \alpha$ es claro que f es lineal no nula y $\ker f = M$.

Es sencillo comprobar que M *será subespacio vectorial cerrado maximal de un espacio normado X si y sólo si existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, continua y no nula tal que $M = ker f$.*

3.- *Sea X un espacio vectorial y sean $f, g_1, \ldots, g_n$ aplicaciones lineales no nulas de X en $\mathbb{K}$ tales que* $\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i$ *entonces f es combinación lineal de $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN Para $n = 1$ sería $\ker f \supset \ker g_1$ y por tanto $\ker f = ker g_1$ y en 1 vimos que existe $\alpha_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $f = \alpha_1 g_1$. Supongamos que la afirmación es cierta para cualquier espacio vectorial y $k \leq n - 1, k \in \mathbb{N}$. Sean $f, g_1, \ldots, g_n$ aplicaciones lineales no nulas de X en $\mathbb{K}$ de modo que $\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n} \ker g_i$. Consideremos $E = ker g_n$ y las restricciones $f' = f|_E, g'_1 = g_1|_E, \dots, g'_{n-1} = g_{n-1}|_E$. Por la hipótesis de inducción, es claro que será $f' = \alpha_1 g'_1 + \dots + \alpha_{n-1} g'_{n-1}$ en E y tenemos que $f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$ se anula en $E = ker g_n$ es decir $\ker(f - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i g_i) \supset \ker g_n$.

Por tanto existe $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que $f - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i g_i = \alpha_n g_n$. ∎

4.- *Sea X un espacio vectorial y sea Y un subespacio vectorial de X' (dual algebraico de X) diremos que Y* ***separa puntos*** *en X si dado $x \in X \setminus \{0\}$ existe $f \in Y$ tal que $f(x) \neq 0$.*

Vamos a ver que si $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$ entonces existe $f \in Y$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observemos que si $x \in X \setminus \{0\}$ y $f \in Y$ es tal que $f(x) \neq 0$ entonces $g = \frac{1}{f(x)} f$ es un elemento de Y tal que $g(x) = 1$.

Supongamos que Y es un subespacio vectorial de X' que separa puntos de X, *vamos a demostrar que dado un sistema libre $\{x_1, \dots, x_n\}$ en X existe un sistema libre $\{f_1, \dots, f_n\}$ en Y tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ donde $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.*

Haremos la demostración por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ es claro ya que si $x_1 \in X$ y $x_1 \neq 0$ sabemos que existe $f_1 \in Y$ tal que $f_1(x_1) = 1$. Supongamos que la afirmación es cierta para $n \leq k - 1$ y sea $\{x_1, \dots, x_k\}$ un sistema libre en X. Por la hipótesis de inducción existe un sistema libre, $\{g_1, \dots, g_{k-1}\}$, en Y tal que $g_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Sea $z = x_k - (g_1(x_k)x_1 + g_2(x_k)x_2 + \dots + g_{k-1}(x_k)x_{k-1})$. Como $\{x_1, \dots, x_k\}$ es libre es claro que $z \neq 0$ y existirá $g \in Y$ tal que $g(z) = 1$. Sea $g_k = g - (g(x_1)g_1 + \dots + g(x_{k-1})g_{k-1})$, es sencillo comprobar que $g_k(x_1) = 0, g_k(x_2) = 0, \dots, g_k(x_{k-1}) = 0$, $g_k(x_k) = g(z) = 1$. Para concluir, consideremos $f_1 = g_1 - g_1(x_k)g_k$, $f_2 = g_2 - g_2(x_k)g_k, \dots, f_{k-1} = g_{k-1} - g_{k-1}(x_k)g_k, f_k = g_k$. Ahora ya es claro que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Si fuese $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i = 0$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, deducimos que $0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x_j) = \alpha_j$; así pues, $\{f_1, \dots, f_k\}$ es libre.

5.- Sea X un espacio vectorial, al dual algebraico del correspondiente dual algebraico X' se le denota por X'' y se le denomina **bidual algebraico** de X.

Sea $x \in X$ y definimos la aplicación $\hat{x} : X' \to \mathbb{K}$ por $\hat{x}(f) = f(x)$. Es claro que si $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$ entonces $\hat{X}$ es un subespacio vectorial de X'' que separa los puntos de X', ya que si $f \in X' \setminus \{0\}$ entonces existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$ pero entonces será $\hat{x}(f) \neq 0$. Por tanto, podemos deducir que si $\{f_1, \dots, f_n\}$ es un sistema libre en X' entonces existe un sistema libre, $\{x_1, \dots, x_n\}$, en X tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

6.- *Sea X un espacio vectorial. Si $dim X > n$ y $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X'$ entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \neq \{0\}$.*

En efecto, supongamos que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es libre (en otro caso consideraríamos el correspondiente subconjunto libre maximal), entonces existe $\{x_1, \ldots, x_n\}$, sistema libre en X, tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $dim X > n$ existe $a \in X - \{0\}$ tal que $a \notin \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$. Sea $x = a - \sum_{i=1}^{n} f_i(a)x_i$, tenemos que $x \neq 0$ y $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$.

TEOREMA 2.3.7 *Sea X un espacio normado. Si F y G son dos subespacios vectoriales maximales y cerrados de X entonces F y G son isomórficos.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que F y G son distintos y sean $f, g \in X^*$ tales que $F = ker f$ y $G = \ker g$. Tenemos que $\{f, g\}$ es libre en X^* y por tanto existe un sistema $\{x_1, x_2\}$, libre en X, tal que $f(x_1) = g(x_2) = 1$, $f(x_2) = g(x_1) = 0$. Sea $a = x_1 + x_2$, tenemos que $a \neq 0$ y $f(a) = g(a) = 1$. Consideremos la aplicación $p : X \longrightarrow F$ definida en cada $x \in X$ por $p(x) = x - f(x)a$. Es claro que p es lineal y continua y denotaremos por p' a la correspondiente restricción a G. Consideremos la aplicación $q : X \longrightarrow G$ definida en cada $x \in X$ por $q(x) = x - g(x)a$. Se tiene que q es lineal y continua; denotaremos por q' a la correspondiente restricción a F. Es sencillo comprobar que si $x \in G$ es $q'(p'(x)) = x$ y si $x \in F$ es $p'(q'(x)) = x$ y esto prueba que p' y q' son biyectivas siendo $q' = (p')^{-1}$ ∎

Vamos a ver ahora que *si X es un espacio normado y F, G son dos subespacios vectoriales cerrados maximales entonces F y G son isomórficos pero no son necesariamente isométricos.*

En efecto, consideremos el espacio c y las aplicaciones $f : c \longrightarrow K$, $f(x) = x(1)$; $g : c \longrightarrow \mathbb{K}$, $g(x) = \lim x(i)$. Tenemos que $F = \ker f$ y $G = \ker g = c_0$ son subespacios cerrados maximales de c que no son isométricos.

Proponemos estudiar esta cuestión en un espacio normado finito dimensional o bien en $\mathbb{K}^n$ con cualquiera de las normas usuales.

2.4 Aplicaciones lineales y espacios de dimensión finita

TEOREMA 2.4.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal tal que* $\ker T$ *es cerrado y $T(X)$ es finito dimensional entonces T es continua.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ una base de $T(X)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $x_i \in X$ tal que $Tx_i = y_i$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos $f_i : X \longrightarrow \mathbb{K}$ por $f_i(x) = i$-ésima coordenada de Tx respecto de $\{y_1, \ldots, y_n\}$, es claro que f_i es lineal y si $x \in X$ es $Tx = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)y_i$. Vamos a demostrar que las aplicaciones $f_1, \ldots, f_n$ son continuas. Por ejemplo, para f_1 veremos que $\ker f_1 = \ker T + \mathcal{L}(x_2, \ldots, x_n)$ y por tanto $\ker f_1$ es cerrado. Si $x = y + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ con $y \in \ker T$ tenemos que $f_1(y) = 0$ ya que $Ty = 0$ pero también es $f_1(x_j) = 0$ si $j \neq 1$ por tanto $x \in \ker f_1$.

Recíprocamente, si $x \in \ker f_1$ tenemos que será $Tx = f_2(x)y_2 + \cdots + f_n(x)y_n$. Sea $z = f_2(x)x_2 + \cdots + f_n(x)x_n$; tenemos que $Tz = Tx$ y, por tanto, $x - z \in \ker T$ y como $x = (x-z) + z$ tenemos que x será un elemento de $\ker T + \mathcal{L}(x_2, \ldots, x_n)$.

Finalmente demostraremos que T es continua. Sea $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión en X que converge a $z \in X$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\lim_{k\to\infty} f_j(z_k)y_j = f_j(z)y_j$ y por tanto

$$\lim_k T(z_k) = \lim_k (f_1(z_k)y_1 + \cdots + f_n(z_k)y_n) = f_1(z)y_1 + \cdots + f_n(z)y_n = Tz.$$

■

TEOREMA 2.4.2 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si X es finito dimensional entonces T es continua.*

DEMOSTRACIÓN Como $\ker T \subset X$ y X es finito dimensional tenemos que $\ker T$ es cerrado. Además $dimT(X) \leq dimX$; por tanto, T será continua. ■

El ejemplo que sigue muestra que el teorema anterior no es válido si X no tiene dimensión finita.

Ejemplo 2.4.3 *Existencia de aplicaciones lineales no continuas.*

Sean X e Y dos espacios normados. Demostraremos que si X es infinito dimensional entonces existe una aplicación lineal T de X en Y que no es continua.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión linealmente independiente tal que $\|x_n\| = 1$ si $n \in \mathbb{N}$. Sea B una base algebraica de X tal que $x_n \in B$ si $n \in \mathbb{N}$ y sea $y \in S_Y$. Definimos una aplicación T de B en Y de la siguiente forma: $T(b) = ny$ si $b = x_n$ y $T(b) = 0$ si $b \neq x_n$ para cada n. Podemos extender T por linealidad a todo X y es claro que T es una aplicación lineal de X en Y que no es continua.

TEOREMA 2.4.4 *Sean X, Y dos espacios normados finito dimensionales. Si $dimX = dimY$ entonces X e Y son isomórficos.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que existe una aplicación, $T : X \to Y$, que es lineal y biyectiva. Del teorema anterior deducimos que T y T^{-1} son continuas. ■

TEOREMA 2.4.5 *Sea X un espacio vectorial. Si X es finito dimensional entonces todas las normas en X son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en X. consideremos la aplicación $I : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|'), I(x) = x$ si $x \in X$, como I es lineal y continua existe $\alpha > 0$ tal que $\|I(x)\|' = \|x\|' \leq \alpha\|x\|$. Consideremos la aplicación $J : (X, \|\cdot\|') \to (X, \|\cdot\|)$, $J(x) = x$ si $x \in X$, como J es lineal y continua existe $\beta > 0$ tal que $\|j(x)\| = \|x\| \leq \beta\|x\|'$. Por tanto si $x \in X$ tenemos que $\frac{1}{\beta}\|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha\|x\|$. ■

Consideremos el espacio normado $\mathbb{K}^n$; sabemos que si $A \subset \mathbb{K}^n$ entonces A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado. Si X es un espacio normado con $dimX = n$ tenemos que X será isomórfico a $\mathbb{K}^n$ y por tanto también podemos afirmar que dado $A \subset X$ entonces A es compacto si y sólo si A es cerrado y acotado. Además como $\mathbb{K}^n$ es completo deducimos que X es completo. Vamos ahora a construir explícitamente un isomorfismo entre X y $\mathbb{K}^n$.

Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de X y definimos $T : \mathbb{K}^n \to X$ por $T(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Consideraremos en $\mathbb{K}^n$ la norma

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \text{máx}\{|a_i| : i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Es claro que T es lineal y biyectiva, por tanto T es isomorfismo, pero demostraremos esto último directamente. Sea $M = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$, tenemos que $\|T(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq |a_1|\|x_1\| + \cdots + |a_n|\|x_n\| \leq M\|(a_1, \ldots, a_n)\|$, así pues T es continua. Tenemos que $T(S_{\mathbb{K}^n})$ es compacto en X y como $0 \notin T(S_{\mathbb{K}^n})$ será $d(0, TS_{\mathbb{K}^n}) = \alpha > 0$. Por tanto, si $(a_1, \ldots, a_n) \in S_{\mathbb{K}^n}$ es $d(0, T(a_1, \ldots, a_n)) = \|T(a_1, \ldots, a_n\| \geq \alpha$. Así pues, $\|T(a_1, \ldots, a_n)\| \geq \alpha\|(a_1, \ldots, a_n)\|$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, de donde deducimos que T es un isomorfismo.

TEOREMA 2.4.6 *Sea X un espacio normado y sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un sistema libre en X. Existe $\delta > 0$ tal que si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ satisface $\|y_i - x_i\| < \delta$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces se verifica que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es libre.*

DEMOSTRACIÓN Sea $Z = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$. Consideremos $\mathbb{K}^n$ con la norma $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = |a_1| + \cdots + |a_n|$ y sea $T : Z \to \mathbb{K}^n$ la aplicación definida por $T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = (a_1, \ldots, a_n)$. Tenemos que T es lineal y como Z es finito dimensional tenemos que T es continua, por tanto existe $\beta > 0$ tal que si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ es $\|T(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)\| \leq \beta\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$; es decir $|a_1| + \cdots + |a_n| \leq \beta\|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\|$. Consideremos $\delta = \frac{1}{\beta}$ y sea $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ tal que $\|y_i - x_i\| < \delta$ si $i \in \{1, \ldots n\}$. Probaremos que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es libre. Por reducción al absurdo, supongamos que $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i = 0$ con algún $a_i \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$; tenemos que

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i - y_i)\| \leq |a_1|\|x_1 - y_1\| + \cdots + |a_n|\|x_n - y_n\| \\ &< \tfrac{1}{\beta}(|a_1| + \cdots + |a_n|). \end{aligned}$$

Esto es una contradicción. ∎

Sea X un espacio normado con $dim X = n, n \in \mathbb{N}$. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base de X con $\|a_i\| = 1$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ la aplicación j-ésima coordenada, $f_j : X \to \mathbb{K}, f_j(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) = \alpha_j$. Es claro que f_j es lineal y continua. Tenemos que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es libre en X^* y si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ es

$f_i(a_j) = \delta_{ij}$; así pues, $f_i(a_i) = 1$ y será $\|f_i\| \geq 1$ si $i \in \{1, \dots n\}$. Pero no podemos asegurar que sea $\|f_i\| = 1$ si $i \in \{1, \dots, n\}$. Vamos a demostrar que es posible encontrar una base, $\{b_1, \dots, b_n\}$, de X y $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ de modo para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sea $\|f_i\| = \|b_i\| = 1$ y $f_i(b_j) = \delta_{ij}$.

Sea $\{a_1, \dots, a_n\} \subset S_X$ una base de X. Consideremos la aplicación $T : X \to \mathbb{K}^n$ definida por $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Tenemos que T es un isomorfismo y definimos la aplicación $D : X^n \to \mathbb{K}$ por $D(x_1, \dots, x_n) = \text{determinante}(Tx_1, \dots, Tx_n)$ (matriz por columnas), claramente D es continua por ser suma de productos de funciones continuas. Como S_X es compacto tenemos que $(S_X)^n$ es compacto y por tanto $|D(x_1, \dots, x_n)|$ alcanza en $(S_X)^n$ el máximo valor en cierto $(b_1, \dots, b_n)$. Tenemos que $\alpha = |D(b_1, \dots, b_n)| \geq D(a_1, \dots, a_n) = 1$ y deducimos que $\{b_1, \dots, b_n\}$ es base de X. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $f_i : X \to \mathbb{K}$ por $f_i(x) = \frac{1}{\alpha} D(b_1, \dots, \overbrace{x}^{i}, \dots, b_n)$. Es claro que f_i es lineal. Si $x \in S_X$ tenemos que $|f_i(x)| \leq 1$ y como $|f_i(b_i)| = 1$ será $\|f_i\| = 1$; además si $j \in \{1, \dots, n\}$ es $|f_i(b_j)| = \delta_{ij}$.

Es sencillo comprobar que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es base de X'. Finalmente consideraremos, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, a $b'_j = e^{-i\theta} b_j$ con $\theta = arg\ (f_j(b_j))$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o bien $b'_j = \theta_j b_j$ con $\theta_j = sig\ (f_j(b_j))$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tenemos que $f_i(b'_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2.5 Aplicaciones lineales inversibles

Concluimos este capítulo viendo algunos resultados importantes sobre las aplicaciones lineales y continuas. Los dos próximos capítulos también estarán dedicados a esta cuestión.

TEOREMA 2.5.1 *Sea X un espacio de Banach. Si para $A \in \mathcal{CL}(X)$ resulta que $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|$ es convergente entonces $I - A$ es un isomorfismo de X en X.*

DEMOSTRACIÓN Entenderemos que $A^0 = I$. Sea $x \in X$, tenemos que $\|A^n x\| \leq \|A^n\| \|x\|$ si $n \in \mathbb{N}$, por tanto $\sum_{n \geq 0} \|A^n x\|$ es convergente y como X es de Banach deducimos que $\sum_{n \geq 0} A^n x$ converge a un elemento de X que denotamos por Bx. Tenemos que B es lineal y también es B continua ya que $\|Bx\| = \|\sum_{n \geq 0} A^n x\| \leq \|x\| (\sum_{n \geq 0} \|A^n\|)$. Finalmente, si $x \in X$ es $ABx = A(\sum_{n \geq 0} A^n x) = \sum_{n \geq 1} A^n x = Bx - x$ y también $BAx = Bx - x$, por tanto $Bx - ABx = x$ y $Bx - BAx = x$, es decir $(I - A)B = B(I - A) = I$.

Observemos que el isomorfismo inverso de $I - A$ es B y que en $\mathcal{CL}(X)$ se verifica que $B = \sum_{n \geq 0} A^n$. ∎

Sea X un espacio de Banach y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$, si $\|A\| < 1$ entonces como $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, si $n \in \mathbb{N}$. Deducimos, por tanto, que $\sum_{n \geq 0} \|A^n\|$ es convergente y que $I - A$ es un isomorfismo. Si $A \in C\mathcal{L}(X)$ es tal que $\|I - A\| < 1$ tenemos que A es un isomorfismo.

En $\mathbb{K}$ se verifica que si $|\lambda| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$, obsérvese que en $C\mathcal{L}(X)$ hemos demostrado que si $\sum_{n>0} \|A^n\|$ converge (lo que sucede cuando $\|A\| < 1$) entonces el inverso de $I - A$ es $\sum_{n \geq 0} A^n$.

Ejemplo 2.5.2 *Consideremos l_1 y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de l_1 tal que existe $p < 1$ de modo que $\|e_n - a_n\| < p$ si $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la aplicación $T : l_1 \to l_1$ definida en cada $x \in l_1$ por $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)a_n$. Observemos que, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en l_1, $\sum_{n=1}^{\infty} x(n)a_n$ es convergente en l_1 y por tanto T está bien definida. Sea $A : l_1 \to l_1$ definida por $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)(e_n - a_n)$. Observemos que si $x \in l_1$ es $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$, así pues $T = I - A$ y como $\|A\| \leq p$ tenemos que T es un isomorfismo.*

TEOREMA 2.5.3 *Sean X, Y dos espacios de Banach*

a) Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo y $T' \in C\mathcal{L}(X, Y)$ es tal que $\|T' - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ entonces T' es también un isomorfismo.

b) Si $I(X, Y)$ es el conjunto de los isomorfismos de X en Y se verifica que $I(X, Y)$ es un subconjunto abierto de $C\mathcal{L}(X, Y)$.

DEMOSTRACIÓN a) Tenemos que $T^{-1}T' \in C\mathcal{L}(X)$ y $T^{-1}T' - I = T^{-1}T' - T^{-1}T = T^{-1}(T' - T)$ y la correspondiente norma será menor o igual que $\|T^{-1}\|\|T' - T\| < 1$, así pues del teorema anterior deducimos que $T^{-1}T'$ es un isomorfismo y por tanto también lo será $T(T^{-1}T') = T'$.

b) Si T es un isomorfismo será $U(T; r) \subset I(X, Y)$ donde $r = \|T^{-1}\|^{-1}$. ∎

2.6 Extensión de aplicaciones lineales y continuas

TEOREMA 2.6.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Si E es subespacio vectorial denso en X entonces $\|T\| = \|T_E\|$.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que $\|T_E\| \leq \|T\|$ y supongamos que $T \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $x \in B_X$ tal que $\|Tx\| > \|T\| - \frac{\varepsilon}{2}$, como E es denso en X es fácil comprobar que $U_E = E \cap U_X$ es denso en B_X y por tanto existe $e \in U_E$ tal que $\|x - e\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}$, por tanto

$$\|T_E\| \geq \|Tx\| - \|T(e-x)\| > \|T\| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2\|T\|}\|T\| = \|T\| - \varepsilon.$$

Esto prueba que $\|T_E\| \geq \|T\|$. Así pues $\|T\| = \|T_E\|$. ∎

TEOREMA 2.6.2 *Sea X un espacio normado, sea Y un espacio de Banach y sea E un subespacio vectorial denso en X. Sea $T_0 : E \to Y$ una aplicación lineal y continua entonces existe una única aplicación continua $T : X \to Y$ tal que $T_E = T_0$, además T es lineal y $\|T\| = \|T_0\|$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $x \in X$, tenemos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E de modo que $\lim x_n = x$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ es $\|T_0x_p - T_0x_q\| \leq \|T_0\|\|x_p - x_q\|$ y deducimos que $(T_0x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y, por tanto existe $y \in Y$ tal que $\lim T_0x_n = y$. Definimos $Tx = y$. Veamos que Tx no depende de la sucesión de E que se escoja convergiendo a x. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E tal que $\lim z_n = x$, tenemos que $\lim(z_n - x_n) = 0$ y por tanto será $\lim T_0(z_n - x_n) = 0$; así pues $\lim T_0z_n = \lim T_0x_n$.

Consideremos la aplicación $T : X \to Y$, definida en cada $x \in X$ por $Tx = \lim T_0x_n$ donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E que converge a x. Veamos que T es continua en cada $x_0 \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $U = U(x_0, \frac{\varepsilon}{2\|T_0\|})$; sea $x \in U$. Sean $(y_n), (z_n)$ dos sucesiones de E tales que $\lim y_n = x_0$ y $\lim z_n = x$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es $y_n, z_n \in U$. Entonces si $p, q \geq n_0$ será $\|y_p - z_q\| < \frac{\varepsilon}{\|T_0\|}$ y $\|T_0y_p - T_0z_q\| < \varepsilon$. Fijando $p \geq n_0$ y haciendo tender q a ∞ deducimos que $\|T_0y_p - Tx\| \leq \varepsilon$ y como esto es cierto para cada $p \geq n_0$ deducimos que $\|Tx_0 - Tx\| \leq \varepsilon$.

Supongamos que $T' : X \to Y$ es una aplicación continua de modo que $T'_E = T_E = T_0$. Sea $x \in X$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E tal que $\lim x_n = x$, tenemos que $T'x = \lim T'x_n = \lim T_0x_n = Tx$, por tanto $T' = T$.

Finalmente demostraremos que T es lineal. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Sean $(x_n), (y_n)$ dos sucesiones de E de modo que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$, entonces $T(x+y) = \lim T_0(x_n+y_n) = \lim T_0x_n + \lim T_0y_n = Tx + Ty$, $T(\alpha x) = \lim T_0\alpha x_n = \alpha \lim T_0x_n = \alpha Tx$. Por tanto T es lineal y según el teorema anterior será $\|T\| = \|T_E\| = \|T_0\|$. ∎

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y que (Y, d') es un espacio métrico completo. Sea $A \subset X$ denso en X y sea $f_0 : A \to Y$ una aplicación uniformemente continua. Entonces existe, y es única, una aplicación $f : X \to Y$ tal que f es continua y $f_A = f_0$. Además se verifica que f es uniformemente continua. La demostración se puede hacer siguiendo, en parte, los pasos de la demostración anterior.

Mas adelante probaremos que el dual de un espacio normado es completo. Sea X un espacio normado y sea E un subespacio vectorial de X. Consideremos la aplicación $\varphi : X^* \to E^*$ definida por $\varphi(f) = f_E$. Tenemos que φ es lineal y $\|\varphi(f)\| = \|f_E\| \leq \|f\|$. Por tanto φ es continua con $\|\varphi\| \leq 1$. Pero si E es denso en X entonces $\|\varphi(f)\| = \|f_E\| = \|f\|$ y tendremos que φ será isometría, además según el teorema anterior φ será sobreyectiva.

2.7 El principio de la acotación uniforme

Sean X, Y dos espacios normados y consideremos una sucesión, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en el espacio $C\mathcal{L}(X, Y)$. Es claro que si (T_n) converge a T en $C\mathcal{L}(X, Y)$ entonces, como para cada $x \in X$ es $\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\|\|x\|$, tendremos que $\lim T_n x = Tx$ si $x \in X$. Veremos ahora que el recíproco es falso.

Consideremos en $C\mathcal{L}(c_0, \mathbb{K}) = c_0^*$ la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la aplicación f_n está definida por $f_n(x) = x(n)$ si $n \in \mathbb{N}$. Sea $f_0 \in c_0^*$ la aplicación constante 0. Para cada $x \in c_0$ tenemos que $\lim f_n(x) = f_0(x)$ pero es falso que $\lim f_n = f_0$ ya que $\|f_n\| = 1$ si $n \in \mathbb{N}$.

Definición 2.7.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $M \subset C\mathcal{L}(X, Y)$. Diremos que M es* ***acotado*** *(o* ***uniformemente acotado*** *en X) si M es acotado en el espacio normado $C\mathcal{L}(X, Y)$. Diremos que M* ***puntualmente acotado*** *en $A \subset X$ si para cada $x \in A$ se verifica que $\{Tx : T \in M\}$ es un conjunto acotado de Y.*

Teorema 2.7.2 *Sean X, Y dos espacios normados. Sea (T_n) una sucesión acotada de $C\mathcal{L}(X, Y)$ de modo que para cada $x \in X$ existe en Y el límite de la sucesión $T_n x$ ($(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es puntualmente convergente en X) entonces la aplicación $T : X \to Y$ definida en cada $x \in X$ por $Tx = \lim T_n x$ es lineal y continua.*

Demostración Para cada $x, y \in X$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $T(x + y) = \lim T_n(x + y) = \lim T_n x + \lim T_n y = Tx + Ty$, $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \alpha \lim T_n x = \alpha Tx$. Finalmente si $sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} = M$ entonces para cada $x \in X$ es $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M\|x\|$ y por tanto $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ (en concreto $\|T\| \leq M$). ∎

Teorema 2.7.3 *Sean X, Y dos espacios normados, si Y es completo entonces $C\mathcal{L}(X, Y)$ es completo.*

Demostración Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C\mathcal{L}(X, Y)$. Tenemos que (T_n) es acotada y si $x \in X$ tenemos, para $p, q \in \mathbb{N}$, que $\|T_p x - T_q x\| \leq \|T_p - T_q\|\|x\|$, por tanto deducimos que $(T_n(x))$ es una sucesión de Cauchy en Y. Por hipótesis, $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ tendrá un límite que denotamos por Tx. Según el teorema anterior tenemos que $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$. Veremos que $\lim T_n = T$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ es $\|T_p - T_q\| \leq \varepsilon$. Fijamos $p \geq n_0$ y para cada $x \in X$ y cada $q \geq n_0$ es $\|T_p x - T_q x\| \leq \varepsilon\|x\|$, haciendo tender q a ∞ deducimos que $\|T_p x - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|$ y como esto es cierto para cada $x \in X$ tenemos que $\|T_p - T\| \leq \varepsilon$ si $p \geq n_0$. ∎

Obsérvese que como $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son completos deducimos que si X es cualquier espacio normado se verifica que su dual X^* *es un espacio de Banach.*

TEOREMA 2.7.4 *Sean X, Y dos espacios normados. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de $C\mathcal{L}(X,Y)$ que converge puntualmente en X a una aplicación T de X en Y. Sea A un subconjunto precompacto de X, entonces $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a T en A. Es decir dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ y $a \in A$ es $\|T_n a - Ta\| \leq \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $M = sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$, sabemos que $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$ y que $\|T\| \leq M$. Sea $A \subset X$ un conjunto precompacto y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(a_i, \frac{\varepsilon}{4M})$. Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ es $\|T_n a_i - Ta_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $a \in A$ entonces existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $a \in U(a_i, \frac{\varepsilon}{4M})$ y será $\|T_n a - Ta\| \leq \|T_n a - T_n a_i\| + \|T_n a_i - Ta_i\| + \|Ta_i - Ta\| \leq M\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$ si $n \geq n_0$. ∎

Obsérvese que, en la situación del teorema anterior, si X es de dimensión finita podemos deducir que $\lim T_n = T$ en $C\mathcal{L}(X,Y)$.

TEOREMA 2.7.5 **(Principio de la Acotación Uniforme)**

Sean X, Y dos espacios normados y sea $F \subset C\mathcal{L}(X,Y)$ un conjunto puntualmente acotado en X. Si X es completo se verifica que F es acotado (es decir F es uniformemente acotado en X).

DEMOSTRACIÓN Sea $M = \{x \in X : \|Tx\| \leq 1 \text{ si } T \in F\}$, tenemos que M es cerrado ya que $M = \bigcap_{T\in F} T^{-1}(B_Y)$. Para cada $x \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|Tx\| \leq n$ si $T \in F$. Por tanto $\frac{1}{n}x \in M$ y $x \in nM$. Esto prueba que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nM = X$. Como X es completo, del teorema de Baire se deduce que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\text{Int}(mM) \neq \emptyset$. Por tanto existe alguna bola, $B(a,r)$, tal que $B(a,r) \subset mM$, será $B(\frac{1}{m}a, \frac{r}{m}) \subset M$. Denotamos $x_0 = \frac{1}{m}a$ y $t = \frac{r}{m}$, tenemos que $B(x_0, t) \subset M$ y si $x \in X$ es tal que $\|x\| \leq t$ será $x_0 + x \in M$ y $x_0 - x \in M$. Deducimos que para cada $T \in F$ es $\|2Tx\| = \|Tx + Tx_0 - (Tx_0 - Tx)\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|T(x - x_0)\| \leq 2$. Así pues, para cada $T \in F$ es $\|Tx\| \leq 1$ si $\|x\| \leq t$. Si $x \in B_X$ y $T \in F$ será $\|T(tx)\| \leq 1$ y por tanto $\|Tx\| \leq \frac{1}{t}$. Tenemos pues que $\|T\| \leq \frac{1}{t}$ para cada $T \in F$ ∎

TEOREMA 2.7.6 **[Teorema de Banach-Steinhaus]**

Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $C\mathcal{L}(X,Y)$ tal que para cada $x \in X$ existe $\lim T_n(x)$. Entonces, si T es la aplicación de X en Y definida en cada $x \in X$ por $Tx = \lim T_n x$, se verifica que $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$.

DEMOSTRACIÓN Es evidente que el conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ es puntualmente acotado en X por tanto será acotado en $C\mathcal{L}(X,Y)$ y podemos deducir que $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$. ∎

Ejemplo 2.7.7 *Consideremos en* c_{00}, *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *la aplicación lineal y continua* $f_n : c_{00} \to \mathbb{K}$, *definida en cada* $x \in c_{00}$ *por* $f_n(x) = x(1) + \cdots + x(n)$, *tenemos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es puntualmente acotada en* c_{00} *pero no es uniformemente acotado ya que* $\|f_n\| = n$ *si* $n \in \mathbb{N}$.

Pudiera ser que para un espacio normado X *se verificase el teorema de acotación uniforme. Más adelante se estudiarán este tipo de espacios normados.*

Tema 3

Introducción a la convexidad. Teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada.

3.1 Algunas propiedades de los conjuntos convexos

Con objeto de probar más adelante diversos resultados importantes sobre las aplicaciones lineales y continuas, necesitaremos algunas propiedades de los conjuntos convexos. Algunos de los teoremas que veremos pueden tener demostraciones más cortas pero hemos pensado que los caminos que aquí se siguen son interesantes por sí mismos, además de por sus consecuencias.

DEFINICIÓN 3.1.1 *Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$. Se dice que A es* ***convexo*** *si para cada $a, b \in A$ se verifica que $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0, 1]\}$ es un subconjunto de A.*

Veamos ahora algunas propiedades elementales de los conjuntos convexos. Sea X un espacio vectorial. Se verifica:

a.- Si $A \subset X$ es convexo y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces αA es convexo.

b.- Si A y B son subconjuntos convexos de X se verifica que $A + B$ es convexo.

c.- Si $A \subset X$ es convexo y X es un espacio normado tenemos que A será conexo por caminos (por tanto conexo) pero el recíproco es falso.

d.- Sea Y otro espacio vectorial y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal, si $A \subset X$ es convexo entonces $T(A)$ es un subconjunto convexo de Y. Si $B \subset Y$ es convexo entonces $T^{-1}(B)$ es subconjunto convexo de X.

Ejemplo 3.1.2 *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el conjunto $A := \{(x, y) : x^2 \leq y\}$, probaremos que A es convexo.*

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dos elementos de A y sea $t \in [0,1]$ entonces $ty_1 + (1-t)y_2 - [tx_1 + (1-t)x_2]^2 \geq tx_1^2 + (1-t)x_2^2 - [tx_1 + (1-t)x_2]^2 = t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ y esto prueba que $t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2)$ es un elemento de A.

Ejemplo 3.1.3 *Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $A_n = \{x \in B_{c_0} : x(i) = 1, i \leq n\}$, tenemos que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados acotados y convexos y se verifica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.*

Observemos que esto no hubiese sucedido si la sucesión hubiera sido de conjuntos compactos.

Algunas propiedades de los conjuntos convexos de un espacio vectorial X, en relación a la unión e intersección de conjuntos, son las siguientes:

a.- La intersección de cualquier familia de subconjuntos convexos de X es un conjunto convexo.

b.- Si $A \subset X$, tenemos que la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A es un conjunto convexo y es precisamente el menor conjunto convexo que contiene a A.

c.- La unión de conjuntos convexos no es necesariamente un conjunto convexo.

DEFINICIÓN 3.1.4 *Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$. Se llama **envoltura convexa de** A al menor conjunto convexo que contiene a A. Este conjunto se denota por $co(A)$.*

$$co(A) = \bigcap \{B : B \subset X, A \subset B \text{ y } B \text{ convexo}\}.$$

*Se llama **combinación convexa** de elementos de A a cualquier elemento de X que sea de la forma $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$, donde $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0,1]$ es tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.*

TEOREMA 3.1.5 *Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$ un conjunto convexo. Entonces A contiene cada combinación convexa de sus elementos.*

DEMOSTRACIÓN Lo probaremos por inducción sobre el número n de sumandos de la combinación convexa.

Si $n = 2$ la afirmación es trivialmente cierta.

Supongamos que la afirmación es cierta para las combinaciones convexas de $k-1$ sumandos, $k \in \mathbb{N}$. Sea $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k$ donde $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset [0,1]$ es tal que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Sea $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}$, suponemos que $\alpha \neq 0$ y sea $a = \frac{1}{\alpha}(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{k-1}a_{k-1})$. Como a es combinación convexa de $k-1$ elementos de A tenemos que $a \in A$ y como $\alpha_k = 1-\alpha$ tenemos que $x = \alpha a + (1-\alpha)a_k$; así pues, $x \in A$. ∎

TEOREMA 3.1.6 *Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$. Si M es el conjunto de las combinaciones convexas de elementos de A,*

$$M = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : n \in \mathbb{N}, \{a_1,\ldots,a_n\} \subset A, \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset [0,1], \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\},$$

se verifica que $M = co(A)$.

DEMOSTRACIÓN Demostraremos primero que M es convexo. Sean $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i, y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$ dos elementos de M. Sea $t \in [0,1]$, tenemos que $tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{m} t\alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{n}(1-t)\beta_i b_i$, pero como $\sum_{i=1}^{m} t\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}(1-t)\beta_i = t + (1-t) = 1$ tenemos que $tx + (1-t)y \in M$. Como M es convexo y $A \subset M$ se verifica que $co(A) \subset M$. Para cada convexo B tal que $A \subset B$ es claro que $M \subset B$, por tanto

$$M \subset \bigcap\{B : B \subset X, A \subset B, B \text{ convexo }\} = co(A).$$

Así pues, $co(A) = M$. ∎

TEOREMA 3.1.7 *Sean X un espacio vectorial y $A_1,\ldots,A_n$ una familia finita de subconjuntos de convexos de X. Si*

$$M = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : a_i \in A_i, i \in \{1,\ldots,n\} \ y \ \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset [0,1], \ con \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\},$$

se verifica que $co(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = M$.

DEMOSTRACIÓN Probaremos que M es convexo. Sean $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i$ dos elementos de M y sea $t \in [0,1]$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ tenemos que

$$t\alpha_i a_i + (1-t)\beta_i b_i = [t\alpha_i + (1-t)\beta_i]\left(\frac{t\alpha_i}{t\alpha_i + (1-t)\beta_i} a_i + \frac{(1-t)\beta_i}{t\alpha_i + (1-t)\beta_i} b_i\right).$$

Denotemos $\gamma_i = t\alpha_i + (1-t)\beta_i$. Como $\frac{t\alpha_i}{\gamma_i} + \frac{(1-t)\beta_i}{\gamma_i} = 1$ deducimos que $c_i = \frac{t\alpha_i}{\gamma_i} a_i + \frac{(1-t)\beta_i}{\gamma_i} b_i$ es de A_i; así pues, $t\alpha_i a_i + (1-t)\beta_i b_i = \gamma_i c_i$. Entonces $tx + (1-t)y = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i c_i$ y será un elemento de M ya que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i = t\sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$. Finalmente es claro que $M \subset co(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$; pero como M es convexo y $A_1 \cup \cdots \cup A_n \subset M$ también tenemos que $co(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \subset M$. ∎

TEOREMA 3.1.8 *Sea X un espacio normado. Si $A \subset X$ es convexo entonces $cl(A)$ es convexo.*

DEMOSTRACIÓN Sean x, y dos elementos de $\mathrm{cl}(A)$ y sea $t \in [0,1]$, tenemos que existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tales que $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $tx_n + (1-t)y_n \in A$ y como $\lim(tx_n + (1-t)y_n) = tx + (1-t)y$ deducimos que $tx + (1-t)y \in \mathrm{cl}(A)$. ∎

TEOREMA 3.1.9 *Sean X un espacio normado y $A \subset X$ un conjunto convexo con interior no vacío. Entonces si $a \in A$ y $x \in Int A$ se verifica que $(x, a) \subset Int A$, donde*

$$(x, a) = \{x : x = tx + (1-t)a, t \in (0,1)\}.$$

DEMOSTRACIÓN Sea $z \in (x, a)$, será $z = tx + (1-t)a$ con $t \in (0,1)$. Tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Demostraremos que $B(z, tr) \subset A$ y que, por tanto, $z \in \mathrm{Int}\, A$. Si $y \in B(z, tr)$ tenemos que $y = t(x + \frac{1}{t}(y-z)) + (1-t)a$; como $x + \frac{1}{t}(y-z) \in B(x, r) \subset A$ se tiene que $y \in A$. ∎

TEOREMA 3.1.10 *Sean X un espacio normado y $A \subset X$ un conjunto convexo con interior no vacío. Entonces $Int A$ es convexo.*

Si $B \subset X$ es abierto entonces $co(B)$ es abierto.

DEMOSTRACIÓN Sean $x, y \in \mathrm{Int}\, A$, por el teorema anterior tenemos que $(x, y) \subset \mathrm{Int}\, A$ y como $[x, y] = (x, y) \cup \{x\} \cup \{y\}$ deducimos que $[x, y] \subset \mathrm{Int}\, A$.

Sea $x \in coB$ entonces existen $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset B$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = x$, tenemos que $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset B = Int\, B \subset Int\, co(B)$, como $Int\, co(B)$ es convexo deducimos que $x \in \mathrm{Int}\ co(B)$ ∎

TEOREMA 3.1.11 *Sean X un espacio normado y A, B dos subconjuntos compactos y convexos de X entonces $co(A \cup B)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN Sea $I = [0,1]$ y consideremos la aplicación $f : A \times B \times I \to X$ definida por $f(a, b, t) = ta + (1-t)b$. Es claro que f es continua y como $A \times B \times I$ es compacto será $\mathrm{Im}\, f = co(A \cup B)$ un conjunto compacto. ∎

Obsérvese que si X es un espacio vectorial y $A \subset X$ entonces tenemos que $co(A \cup \{0\})$ es el conjunto de las combinaciones de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ donde $n \in \mathbb{N}, \{a_1, \ldots, a_n\} \subset A, \{\alpha_1, \ldots \alpha_n\} \subset [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leq 1$.

Si $\alpha \geq 0$ tenemos que $\alpha co(A)$ es el conjunto de las combinaciones de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ donde $n \in \mathbb{N}$, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, \alpha]$ es tal que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$.

Ejemplo 3.1.12 *Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos $A = \{(0,0)\}$ y $B = \{(1,y) : y \in \mathbb{R}\}$ tenemos que $A \cup B$ es cerrado y probaremos que $co(A \cup B)$ no es cerrado.*

Sea $(a,b) = t(1,y) + (1-t)(0,0), t \in [0,1], y \in \mathbb{R}$, un elemento de $co(A \cup B)$. Tenemos que o bien $(a,b) = (t,z)$ con $t \in (0,1]$ y $z \in \mathbb{R}$ o bien si $t = 0$ es $(a,b) = (0,0)$, por tanto deducimos que $co(A \cup B)$ no es cerrado. Observemos que $A \cup B$ es un conjunto cerrado pero $co(A \cup B)$ no es cerrado y también observemos que A es compacto y B es cerrado pero sin embargo $co(A \cup B)$ no es cerrado, veremos que esto no hubiese sucedido si B hubiese sido además acotado.

TEOREMA 3.1.13 *Sea X un espacio normado. Si A es convexo y compacto y B es convexo, cerrado y acotado entonces $co(A \cup B)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN

Para cada $t \in I = [0,1]$ denotamos $M_t = tA + (1-t)B$, sabemos que $co(A \cup B) = \bigcup_{t \in I} M_t$. Supongamos que $x \notin co(A \cup B)$ y sea $t \in I$. Vamos a probar, por reducción al absurdo, que existen $U_t(x)$, entorno de x y V_t, entorno de t en I, tales que $U_t(x) \cap M_r = \emptyset$ si $r \in V_t$.

En efecto, en caso contrario tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, si consideramos los entornos $B(x, \frac{1}{n})$ y $(\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n})$, podemos hallar $t_n \in (t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}) \cap I$ de modo que existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M_{t_n}$. Así pues será $x_n = t_n a_n + (1-t_n) b_n$ con $a_n \in A, b_n \in B$ si $n \in \mathbb{N}$. Como A es compacto existe una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que denotamos igual, que es convergente a cierto $a \in A$. Como $\lim x_n = x$ y $\lim t_n = t$ podemos deducir que la sucesión $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a cierto $b \in B$ (con la salvedad del caso $t = 1$ que es sencillo de tratar, ya que B es acotado), tenemos que $x = ta + (1-t)b$ y esto contradice que $x \notin co(A \cup B)$.

Consideremos para cada $t \in I$ los correspondientes entornos $U_t(x)$ y V_t. Por la compacidad de I obtenemos $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset I$ de modo que $I = V_{t_1} \cup \cdots \cup V_{t_n}$. Consideremos los correspondientes $U_{t_1}(x), \ldots, U_{t_n}(x)$ y sea $U = U_{t_1}(x) \cap \cdots \cap U_{t_n}(x)$. Veamos que $U \cap co(A \cup B) = \emptyset$.

En efecto, si $z \in U \cap co(A \cup B)$ será $z = ra + (1-r)b$ para ciertos $r \in I$, $a \in A$ y $b \in B$, pero entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $r \in V_{t_j}$, así pues será $z \in U_{t_j}(x) \cap M_r$ lo que no es posible. Por tanto podemos afirmar que $co(A \cup B)$ es cerrado.

Nos planteamos ahora si la demostración anterior puede ser simplificada en el caso particular en que X sea un espacio de Banach. En este caso puede seguirse una técnica demostrativa sustancialmente diferente.

Sea $H > 0$ tal que $\|b\| \leq H$ si $b \in B$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de $co(A \cup B)$ que converge a cierto $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_n \in A, b_n \in B, t_n \in [0,1]$ tales que $x_n = t_n a_n + (1-t_n) b_n$. Como A es compacto existe $M \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(a_i)_{i \in M}$ es convergente a cierto $a \in A$; también existirá $P \subset M$ infinito tal que $(t_i)_{i \in P}$ converge a cierto $t \in [0,1]$. Tenemos que $\lim_{n \in P}(1-t_n) b_n = \lim_{n \in P}(x_n - t_n a_n) = x - ta$. Si fuese $t = 1$, como $\|(1-t_n) b_n\| \leq M|1-t_n|$ si $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $x - ta = 0$ y será $x = a \in co(A \cup B)(x = 1a + 0b)$.

Supongamos que $t < 1$ y sea $\alpha \in (t, 1)$. Podemos suponer que $t_n < \alpha$ si $n \in P$. Entonces si $p, q \in P$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|b_p - b_q\| &= \|t_p b_p + (1 - t_p) b_p - (t_q b_q + (1 - t_q) b_q)\| \\ &\leq \|(1 - t_p) b_p - (1 - t_q) b_q\| + \|t_p b_p - t_q b_q\|, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

pero $\|t_p b_p - t_q b_q\| = \|t_p b_q - t_p b_q + t_p b_q - t_q b_q\| \leq |t_p| \|b_p - b_q\| + M|t_p - t_q|$. De (3.1.1) se deduce que

$$(1 - \alpha)\|b_p - b_q\| \leq \|(1 - t_p) b_p - (1 - t_q) b_q\| + M|t_p - t_q|$$

y como $((1 - t_i) b_i)_{i \in P}$ y $(t_i)_{i \in P}$ son sucesiones de Cauchy deducimos que $((1 - \alpha) b_i)_{i \in P}$ es de Cauchy. Por tanto $(b_i)_{i \in P}$ es de Cauchy; así pues, $(b_i)_{i \in P}$ será convergente a cierto $b \in B$ y $\lim_{i \in P}(1 - t_i) b_i = (1 - t)b$. Por tanto $x - ta = (1 - t)b$ y será $x = ta + (1 - t)b \in co(A \cup B)$. ∎

NOTA 3.1.14 Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un conjunto acotado. Es fácil probar que

$$sup\{\|a\| : a \in A\} = sup\{\|b\| : b \in co(A)\};$$

así pues, $co(A)$ es también acotado.

Sea ahora $x \in X$ y sean $p = sup\{\|b - x\| : b \in co(A)\}, q = sup\{\|a - x\| : x \in A\}$ demostraremos que $p = q$.

En efecto, como $A \subset co(A)$ tenemos que $q \leq p$. Si $b \in co(A)$ existen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, 1]$ con $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ de modo que $b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ y entonces $\|b - x\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i - x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|a_i - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q = q$; así pues $p \leq q$.

Demostraremos ahora que $d(A) = d(co(A))$. Es claro que $d(A) \leq d(co(A))$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $x, b \in co(A)$ tales que

$$d(co(A)) - \frac{\varepsilon}{3} \leq \|x - b\| \leq sup\{\|x - b\| : x \in co(A)\} = sup\{\|x - b\| : x \in A\}.$$

Existe $a \in A$ tal que $sup\{\|x - b\| : x \in A\} - \frac{\varepsilon}{3} \leq \|a - b\|$ y, para $b \in co(A)$, será

$$d(co(A)) - \frac{2\varepsilon}{3} \leq \|a - b\| \leq sup\{\|a - z\| : z \in co(A)\} = sup\{\|a - z\| : z \in A\}.$$

Finalmente existe $c \in A$ tal que $sup\{\|a - z\| : z \in A\} - \frac{\varepsilon}{3} \leq \|a - c\|$. Por tanto $d(co(A)) - \varepsilon \leq \|a - c\| \leq d(A)$ y esto prueba que $d(A) = d(co(A))$.

Veremos ahora un teorema que, aunque no será usado en lo que sigue, es realmente hermoso.

TEOREMA 3.1.15 **[Teorema de Carathéodory]**

Sea X un espacio vectorial real n -dimensional y sea $A \subset X$. Entonces todo elemento de $co(A)$ se puede expresar como combinación convexa de k elementos de A donde $k \leq n + 1$.

DEMOSTRACIÓN Sea x un elemento de $co(A)$, podemos poner $x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ donde $\{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \subset (0,1)$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ (suponemos que $x \notin A$). Si $k \leq n+1$ ya hemos concluido y si $k > n+1$ probaremos que podemos poner a x como combinación convexa de a lo más $k-1$ elementos de A, repitiendo el razonamiento se obtendrá la conclusión deseada.

Supongamos pues que $k > n+1$, tenemos que $\{a_1 - a_k, \ldots, a_{k-1} - a_k\}$ es ligado, por tanto existe $\{\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}\} \subset \mathbb{R}$, donde no todos los números son cero, de modo que $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i(a_i - a_k) = 0$. Sea $\mu_k = -(\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1})$ y observemos que entonces alguno de los números $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_k$ tiene que ser mayor que cero Sea $p = \frac{\mu_m}{\lambda_m}$ el mayor de los números de $\{\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\mu_k}{\lambda_k}\}$, sea $R = \{1, \ldots, k\} \setminus \{m\}$. Es evidente que $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0$, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{k-1} a_{k-1} - (\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1}) a_k = 0$. Así pues $\mu_m a_m = -\sum_{i \in R} \mu_i a_i$ y $a_m = -\sum_{i \in R} \frac{\mu_i}{\mu_m} a_i$. Entonces $\lambda_m a_m = -\sum_{i \in R} \frac{\mu_i}{\frac{\mu_m}{\lambda_m}} a_i = -\sum_{i \in R} \frac{\mu_i}{p} a_i$. Por tanto,

$$x = \sum_{i \in R} \lambda_i a_i + \lambda_m a_m = \sum_{i \in R} \lambda_i a_i - \sum_{i \in R} \frac{\mu_i}{p} a_i = \sum_{i \in R} (\lambda_i - \frac{\mu_i}{p}) a_i.$$

Veamos que esto es efectivamente una combinación convexa de $k-1$ puntos de A. Como $\frac{\mu_m}{\lambda_m} - \frac{\mu_i}{\lambda_i} \geq 0$, para cada $i \in R$, se tiene que $\lambda_i - \frac{\mu_i}{\frac{\mu_m}{\lambda_m}} \geq 0$, es decir $\lambda_i - \frac{\mu_i}{p} \geq 0$ si $i \in R$ y además

$$\sum_{i \in R} (\lambda_i - \frac{\mu_i}{p}) = \sum_{i \in R} (\lambda_i - \frac{\mu_i}{p}) + (\lambda_m - \frac{\mu_m}{\frac{\mu_m}{\lambda_m}}) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \frac{\mu_i}{p}) = 1 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1.$$

■

3.2 Conjuntos homogéneos

DEFINICIÓN 3.2.1 *Sea X un espacio vectorial y sea $P \subset X$.*

1. *Se dirá que P es **homogéneo positivo** si para $x \in P$ y $\alpha \geq 0$ se cumple que $\alpha x \in P$. En este caso también se suele decir que P es un **cono**.*

2. *Se dirá que P es una **cuña** (wedge) si para cada $x, y \in P$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$ se verifica que $x + y \in P$ y $\alpha x \in P$. (A este tipo de conjuntos también se les denomina cono convexo).*

Veamos algunas propiedades elementales de los conjuntos que acabamos de introducir sobre un espacio vectorial X

1. *Si $P \subset X$ es una cuña es evidente que P será convexo. Si $P \subset X$ es homogéneo positivo y convexo entonces P es una cuña.*

   En efecto, si $x, y \in P$ tenemos que $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in P$ y por tanto $2(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = x + y \in P$.

2. *Si $A \subset X$ es convexo entonces $P = \bigcup\{\alpha A : \alpha \geq 0\}$ es una cuña.*

   En efecto, si $x \in P$ y $t \geq 0$ tenemos que existe $\alpha \geq 0$ y $a \in A$ tal que $x = \alpha a$. Entonces es claro que $tx = t\alpha a \in P$. Si αa y βb son dos elementos de P $(a, b \in A, \alpha \geq 0, \beta \geq 0)$ entonces $\alpha a + \beta b = (\alpha + \beta)(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}a + \frac{\beta}{\alpha+\beta}b)$ y deducimos que $\alpha a + \beta b \in P$.

3. Sea $A \subset X$ y sea

   $$P = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : n \in \mathbb{N}, \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset [0, \infty), \{a_1, \ldots, a_n\} \subset A\}.$$

   Es claro que P es una cuña y que $A \subset P$. Si Q es otra cuña y $A \subset Q$ es sencillo comprobar que $P \subset Q$, así pues P *es la menor cuña que contiene a* A. Es fácil probar que $P = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha co(A)$.

4. *Si $P \subset X$ es una cuña tal que $P \neq X$ entonces si $a \in Int P$ se verifica que $-a \notin P$.*

   En efecto, supongamos que $B(a, r) \subset P$ y $-a \in P$, probaremos que $B(0, r) \subset P$. Si $x \in B(0, r)$ será $x+a \in B(a, r) \subset P$ y por tanto $(x+a)+(-a) = x \in P$. Si $x \in X$ tenemos que $\frac{r}{\|x\|}x \in B(0, r) \subset P$ y por tanto $x \in P$ esto prueba que sería $P = X$.

5. Finalmente observemos que si P es una cuña y Int $P \neq \emptyset$ entonces para cada $r > 0$ podemos encontrar $a \in P$ tal que $B(a, r) \subset P$ (P tiene dentro bolas de radio arbitrariamente grande).

   En efecto, sea $B(b, t) \subset P$, sea $a = \frac{r}{t}b$, si $y \in B(a, r)$ será $\|y - \frac{r}{t}b\| < r$ y por tanto $\|\frac{t}{r}y - b\| < t$ así pues $\frac{t}{r}y \in P$ y también será $y \in P$.

DEFINICIÓN 3.2.2 *Sean X un espacio vectorial y $A \subset X$. Se dice que A es simétrico si para cada $a \in A$ se verifica que $-a \in A$.*

LEMA 3.2.3 *Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un conjunto convexo y simétrico. Si $IntA \neq \emptyset$ entonces $0 \in Int(A)$.*

DEMOSTRACIÓN Observemos que si $a \in A$ como $0 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-a)$ tenemos que $0 \in A$. Supongamos que $a \in IntA$ y sea $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Sea $x \in B(0, r)$ entonces $[a + x, a - x] \subset B(a, r)$ por tanto $[x + a, x - a] \subset A$ y como $x = \frac{1}{2}(x + a) + \frac{1}{2}(x - a)$ tenemos que $x \in A$. ■

3.3 Aplicaciones abiertas; el Teorema de la aplicación abierta

3.3.1 Aplicaciones abiertas

Recordemos que una aplicación f entre dos espacios topológicos, X e Y, se dice que es **abierta** si para cada $x \in X$ y cada entorno U de x se verifica que $f(U)$ es entorno de $f(x)$ o, equivalentemente, si $B \subset X$ es abierto entonces $f(B)$ es abierto en Y.

Veremos que en el caso de aplicaciones lineales entre espacios normados hay una sencilla caracterización de las aplicaciones abiertas. Observemos que si X, Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es lineal y abierta entonces $T(U_X) \subset TX$ y $T(U_X)$ es abierto, por tanto TX no puede ser subespacio propio de Y y será $TX = Y$, es decir T será sobreyectiva.

TEOREMA 3.3.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea T una aplicación lineal de X en Y. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T es abierta.

ii) Existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha B_Y \subset T(B_X)$.

iii) Existe $M > 0$ tal que dado $y \in Y$ existe $x \in X$ con $Tx = y$ y $\|x\| \leq M\|y\|$ (M será denominada como la constante abierta de T).

DEMOSTRACIÓN i) $\Rightarrow$ ii) Tenemos que $0 \in T(U_X) \subset T(B_X)$ y $T(U_X)$ es abierto, así pues existe $\alpha > 0$ tal que $B(0, \alpha) = \alpha B_Y \subset T(U_X) \subset T(B_X)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $y \in Y \setminus \{0\}$ y denotemos $y' = \frac{\alpha}{\|y\|}$. Entonces existe $x' \in B_X$ tal que $Tx' = y' = \frac{\alpha}{\|y\|}y$. Sea $x = \frac{\|y\|}{\alpha}x'$; entonces $Tx = y$ y $\|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|y\|$, basta pues tomar $M = \frac{1}{\alpha}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $x \in X$ y sea V entorno de x probaremos que TV es entorno de Tx. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset V$, consideremos $B(Tx, \frac{\varepsilon}{M})$ y sea $z \in B(Tx, \frac{\varepsilon}{M})$, tenemos que $\|z - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{M}$ y existe $a \in X$ tal que $Ta = z - Tx$ y $\|a\| \leq M\|z - Tx\| \leq \varepsilon$, entonces $z = T(a + x)$ y $a + x \in B(x, \varepsilon)$, por tanto $B(Tx, \frac{\varepsilon}{M}) \subset TV$. ∎

Obsérvese que si X es un espacio vectorial y $\| \,\|, \| \,\|'$ son dos normas en X, podemos considerar la aplicación $I : (X, \| \,\|') \to (X, \| \,\|)$ definida en cada $x \in X$ por $I(x) = x$. Si no existe $\beta > 0$ tal que $\|x\|' \leq \beta\|x\|$, para cada $x \in X$, tendremos que I es lineal y sobreyectiva pero I no es abierta. Si existiese $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\| \leq \|x\|'$, si $x \in X$, tendríamos que I sería continua.

Como caso particular de lo que acabamos de decir, podemos considerar la aplicación $I : (l_1, \| \,\|_1) \to (l_1, \| \,\|_\infty), I(x) = x$; tenemos que I es lineal continua y sobreyectiva pero I no es abierta.

TEOREMA 3.3.2 *Sean X, Y dos espacios normados. Si existe una aplicación $T : X \to Y$ lineal continua y abierta y X es completo entonces Y es completo.*

DEMOSTRACIÓN Sea M la constante abierta de T. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ una serie en Y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|$ es convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $T(x_n) = y_n$ y $\|x_n\| \leq M\|y_n\|$. Tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ y por tanto, como X es completo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ será convergente a cierto $x \in X$. De la continuidad de T deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente a Tx. Esto prueba que Y es completo. ∎

TEOREMA 3.3.3 *Sean X, Y dos espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua y abierta. Si $T' \in C\mathcal{L}(X, Y)$ y $\|T - T'\| < \frac{1}{M}$ donde M es la constante de abierta de T, se verifica que T' es también abierta.*

El conjunto de las aplicaciones lineales continuas y abiertas es un subconjunto abierto de $C\mathcal{L}(X, Y)$.

DEMOSTRACIÓN Sea $S = T - T'$ y sea $k = M\|S\| < 1$. Sea $y_0 \in Y$; demostraremos que existe $z \in X$ tal que $T'z = y_0$, siendo $\|z\| \leq \frac{M}{1-k}\|y_0\|$. Sea $x_0 \in X$ tal que $Tx_0 = y_0$ y $\|x_0\| \leq M\|y_0\|$. Sea $x_1 \in X$ tal que $Tx_1 = Sx_0$ y $\|x_1\| \leq M\|Sx_0\| \leq k\|x_0\|$. Sea $x_2 \in X$ tal que $Tx_2 = Sx_1$ y $\|x_2\| \leq M\|Sx_1\| \leq k\|x_1\| \leq k^2\|x_0\|$. Supuesto que hemos obtenido $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ tal que si $i \in \{1, \ldots, n\}$ es $Tx_i = Sx_{i-1}$ y $\|x_i\| \leq k^i\|x_0\|$ escogemos $x_{n+1} \in X$ tal que $Tx_{n+1} = Sx_n$ y $\|x_{n+1}\| \leq M\|Sx_n\| \leq k\|x_n\| \leq k^{n+1}\|x_0\|$. De esta forma inductiva hemos conseguido una sucesión $(x_n)_{n\geq 0}$, en X, tal que $Tx_0 = y_0$ y si $n \in \mathbb{N}$ es $Tx_n = Sx_{n-1}$ con $\|x_n\| \leq k^n\|x_0\|$, es claro que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es convergente a cierto $z \in X$. Para cada $N \in \mathbb{N}$ es $\|\sum_{i=0}^{N} x_i\| \leq \|x_0\|(1 + \cdots + k^N)$, así pues $\|z\| \leq \|x_0\|\frac{1}{1-k} \leq \frac{M}{1-k}\|y_0\|$. También para cada $n \in \mathbb{N}$ es $T'(x_0 + \cdots + x_n) = (T - S)(x_0 + \cdots + x_n) = y_0 - Tx_{n+1}$. Como $\lim Tx_n = 0$, deducimos que $T'(z) = y_0$. ∎

3.3.2 El Teorema de la aplicación abierta

A continuación abordamos el estudio de uno de los pilares del Análisis Funcional. Antes de abordar su enunciado y demostración necesitaremos el lema que sigue.

LEMA 3.3.4 *Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que existe un $r > 0$ tal que $T(B(0,1))$ es denso en $B(0, r) \subset F$. Para cada $\epsilon \in]0, 1[$ se verifica que*

$$B(0, (1 - \epsilon)r) \subset T(B(0,1)).$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $y \in B(0,r) \subset F$ y sea $\epsilon \in]0,1[$. Por hipótesis existe un $x_1 \in B(0,1)$ tal que $\|y - Tx_1\| < \epsilon r$. Como T es lineal $T(\epsilon B(0,1)) = \epsilon T(B(0,1))$ es denso en $\epsilon B(0,r) \subset F$. Podemos encontrar un $x_2 \in \epsilon B(0,1)$ tal que $\|y - Tx_1 - Tx_2\| \leq \epsilon^2 r$. Procediendo inductivamente, podemos encontrar una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in \epsilon^{n-1}B(0,1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k\| \leq \epsilon^n r$. Como $\|x_n\| \leq \epsilon^{n-1}$ y E es completo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ converge hacia un elemento $x \in E$. Por la continuidad de T y la desigualdad anterior, $Tx = y$. Claramente $\|x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{k-1} = \frac{1}{1-\epsilon}$. Por consiguiente $(1-\epsilon)x \in B(0,1)$ y $(1-\epsilon)Tx = (1-\epsilon)y \in T(B(0,1))$. Es decir, $(1-\epsilon)B(0,r) \subset T(B(0,1))$, lo que prueba el lema. ∎

TEOREMA 3.3.5 **[Teorema de la aplicación abierta.]**

Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $T(E) = F$. Se verifica que T es una aplicación abierta.

Como consecuencia, cada aplicación lineal continua y biyectiva entre dos espacios de Banach siempre tiene una inversa continua.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos, por hipótesis, que

$$F = T(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{T(B(0,n))}.$$

Si todos los cerrados $\overline{T(B(0,n))}$ tuviesen interior vacío entonces sus complementarios serían abiertos densos y su intersección, por el teorema de Baire, sería densa, por lo cual el complementario de esta intersección, que es F, tendría interior vacío, lo cual es falso. Por tanto, para algún $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\overline{T(B(0,n))}$ tiene interior no vacío.

Supongamos que $B(y,r) \subset \overline{T(B(0,n))}$. Esto significa que

$$T(B(0,n)) = T(nB(0,1)) = nT(B(0,1))$$

es denso en la bola $B(y,r)$. Por tanto $T(B(0,1))$ es denso en la bola $B(\frac{1}{n}y, \frac{r}{n})$. Como

$$B(\frac{1}{n}y, \frac{r}{n}) - B(\frac{1}{n}y, \frac{r}{n}) = (\frac{1}{n}y + B(0, \frac{r}{n})) - (\frac{1}{n}y + B(0, \frac{r}{n})) \subset 2B(0, \frac{1}{n}r),$$

resulta que $T(B(0,1))$ es denso en $B(0, \frac{2}{n}\epsilon)$. Por tanto, por el lema, para cada $\delta < \frac{2}{n}r$ se verifica que $B(0,\delta) \subset T(B(0,1))$. Como cada abierto $U \subset E$ es una unión de bolas, resulta que $T(U)$ contiene una bola alrededor de cada uno de sus puntos. Por tanto $T(U)$ es abierto. ∎

NOTA 3.3.6 1.- Sea X un espacio de Banach y sean Y un espacio normado y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Si T es sobreyectiva entonces T es abierta si y sólo si Y es completo. Por tanto si Y no es completo podemos afirmar que T no es abierta aunque T sea sobreyectiva.

Si $T : X \to Y$ es lineal continua y no sobreyectiva tenemos que la aplicación $T : X \to TX$ es lineal continua y sobreyectiva y por tanto pudiera ser que fuese abierta pero para que esto suceda será necesario que TX sea completo (por tanto tendrá que ser TX cerrado en Y).

2.- Si X, Y son dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ es una aplicación lineal y continua se verifica que TX es cerrado si y sólo si la aplicación $T : X \to TX$ es abierta.

3.- Si X, Y son dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ es una aplicación lineal continua y biyectiva entonces T^{-1} es continua (es decir T es isomorfismo). En efecto, tendremos que T es continua abierta y biyectiva lo que significa que T es homeomorfismo y por tanto T^{-1} es continua.

TEOREMA 3.3.7 *Sea X un espacio de Banach y sea Y un espacio normado. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal son equivalentes:*

i) Existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$;

ii) T es inyectiva y continua y $T(X)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN Si i) es cierto tenemos que la aplicación $T : X \to TX$ es un isomorfismo y por tanto es abierta; así pues, TX es completo.

Si ii) es cierto tenemos que la aplicación $T : X \to TX$ es lineal, biyectiva y continua entre espacios de Banach; por tanto, será un isomorfismo y existirán $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$. ▪

DEFINICIÓN 3.3.8 *Si $T : X \to Y$ satisface cualquiera de las dos condiciones equivalentes del teorema anterior diremos que T es* ***isomorfismo*** *en su imagen y también es usual decir que Y* ***tiene copia de*** *X* ***por medio de*** *T (T fija en Y una copia de X).*

Se dice que Y ***tiene copia de*** *X si existe un subespacio de Y que es isomorfo a X.*

NOTA 3.3.9

1.- Una isometría lineal es un caso particular de isomorfismo en su imagen y fijará en el segundo espacio una copia del primero.

2.- Sea X un espacio vectorial y sean $\|\ \|$ y $\|\ \|'$ dos normas en X de modo que $(X, \|\ \|)$ y $(X, \|\ \|')$ son espacios de Banach. Supongamos que las normas son comparables; es decir, por ejemplo, existe $\alpha > 0$ tal que $\|x\| \leq \alpha\|x\|'$ si $x \in X$. Demostraremos que entonces las normas son equivalentes. En efecto, consideremos la aplicación $I : (X, \|\ \|') \to (X, \|\ \|)$, $I(x) = x$. Tenemos que I es lineal continua y biyectiva por tanto la aplicación inversa I^{-1} será continua y existirá $\beta > 0$ tal que $\|I^{-1}(x)\|' = \|x\|' \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$. Por tanto tenemos que $\frac{1}{\alpha}\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|$ si $x \in X$.

3.- Sea X un espacio de Banach y sean A, B dos subespacios cerrados de X. Consideremos la aplicación $T : A \times B \to A + B$ definida por $T((a, b)) = a + b$.

tenemos que T es lineal continua y sobreyectiva además $A \times B$ es un espacio de Banach (ya que es cerrado en $X \times Y$). Es sencillo comprobar que T es abierta si y sólo si $A + B$ es cerrado.

En el caso en que $A+B$ sea cerrado tenemos que, si M es la constante abierta de T, para cada $y \in A+B$ existe $(a, b) \in A \times B$ tal que $a+b = x$ y $\|(a, b)\|_\infty \leq M\|y\|$, así pues será $\|a\| \leq M\|x\|$ y $\|b\| \leq M\|x\|$.

Por tanto si $z \in B_{A+B}$ podemos poner $z = a + b$, donde $a \in A$, $\|a\| \leq M\|z\| \leq M, b \in M$ y $\|b\| \leq M$, así pues será $a \in MB_A$, $b \in MB_B$. Podemos afirmar que existe $M > 0$ tal que $B_{A+B} \subset M(B_A + B_B)$.

Más adelante veremos que el Teorema de la Aplicación abierta no es válido para aplicaciones entre espacios normados (no de Banach).

3.4 El teorema de la gráfica cerrada

Sean X, Y dos conjuntos y $T : X \to Y$ una aplicación, se define el grafo, o gráfica, de T por $GT = \{(x, Tx) : x \in X\}$ que será un subconjunto de $X \times Y$.

Supongamos que X e Y son espacios topológicos y que en $X \times Y$ consideramos la topología producto, demostraremos que si Y es de Hausdorff y T es continua entonces GT es cerrado. En efecto, si $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una red de GT que converge a cierto (x, y) tenemos que $x \in \lim\limits_{\alpha \in I}\{x_\alpha\}, \lim\limits_{\alpha \in I}\{y_\alpha\} = y$ y $Tx_\alpha = y_\alpha$ si $\alpha \in I$. Como T es continua será $\lim\limits_{\alpha \in I}\{y_\alpha\} = Tx$, y como Y es Hausdorff será $Tx = y$, es decir $(x, y) \in GT$.

Consideremos ahora la aplicación $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $U(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $U(0) = 0$, tenemos que GU es cerrado pero que U no es continua. En el teorema del grafo cerrado demostraremos que esto no sucede si T es una aplicación lineal definida entre dos espacios de Banach.

Si R es un subconjunto de $X \times Y$ y $A \subset X$, $B \subset Y$ denotaremos por $R(A)$ y $R(B)$ a los conjuntos $R(A) = \{y \in Y : (x, y) \in R \text{ para algún } x \in A\}, R(B) = \{x \in X : (x, y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$.

TEOREMA 3.4.1 **[El Teorema de la gráfica cerrada.]**

Sean E y F dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal tal que su gráfica

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in E\}$$

es un subconjunto cerrado de $E \times F$. Se verifica que T es continua.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\pi_1 : G(T) \to E$ (resp. $\pi_2 : G(T) \to F$) la aplicación definida por $\pi_1((x, Tx)) = x$ (resp $\pi_2((x, Tx)) = Tx$). Claramente la aplicación π_1 es biyectiva y las aplicaciones π_1 y π_2 tienen norma menor o igual que 1, si en $E \times F$ se considera la norma del máximo $\|(x, y)\| = \text{máx}\ (\|x\|, \|y\|)$.

Por el teorema de la aplicación abierta, la aplicación π_1^{-1} es continua. Como $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ se tiene que T es continua. ∎

Nota 3.4.2

1.- ***Las tesis de los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada no son, en general, válidas para aplicaciones entre espacios normados.*** A continuación se presentan ejemplos de que prueba esa afirmación

En $X = l_\infty$ consideremos una base de Hamel $B = \{b_i : i \in I\}$ tal que $B \subset S_X$ y $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B$ (esta base existe como consecuencia del lema de Zörn y sabemos que será no numerable). Si $x \in X$ y $x = \sum_{i \in M} \alpha_i b_i, M \subset I$ finito, definimos $\|x\|' = \sum_{i \in M} |\alpha_i|$, claramente es $\| \|'$ una norma en X tal que $\|x\| \leq \|x\|'$ si $x \in X$ (donde $\|x\|$ denota la norma del supremo). Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|e_1 + \cdots + e_n\|' = n$ pero $\|e_1 + \cdots + e_n\| = 1$, así pues no existe $\alpha > 0$ tal que $\|x\|' \leq \alpha\|x\|$ si $x \in X$. Esto significa que $(X, \| \|')$ no es completo ya que dos normas completas en un mismo espacio vectorial tiene que ser equivalentes. Consideremos $I : (X, \| \|') \to (X, \| \|)$, $I(x) = x$, tenemos que I es lineal continua y biyectiva pero no es abierta. Por tanto el teorema de la aplicación abierta no es cierto, en general, si el espacio inicial no es completo aunque sea completo el espacio final.

Consideremos $J : (X, \| \|) \to (X, \| \|')$, $J(x) = x$. Claramente J es lineal y biyectiva pero no es continua. Demostraremos que GJ es cerrado. Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de GJ (será $y_n = x_n$ si $n \in \mathbb{N}$) tal que es convergente a cierto $(x, y) \in X \times X$, tenemos que $\| \| - \lim x_n = x$ y $\| \|' - \lim x_n = y$, pero entonces también será $\| \| - \lim x_n = y$ y por tanto $y = x$ es decir $(x, y) \in GJ$. Ha quedado probado que el teorema de la gráfico cerrada no es válido, en general, si el espacio final no es completo aunque sea completo el inicial.

2.- Sea $X = C^1([0,1])$ el espacio de las funciones reales definidas en $[0,1]$ y que tienen derivada continua. Sea $Y = C([0,1])$, consideremos en X e Y la norma del supremo y consideremos la aplicación $T : X \to Y$ definida en cada $f \in X$ por $T(f) = f'$ (función derivada). Sabemos que T es lineal y que no es continua. Demostraremos que GT es cerrado. Sea $\{(f_n, g_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de GT que converge a cierto $(f, g) \in X \times Y$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $g_n = f'_n$ además $\lim \|f_n - f\| = 0$ y $\lim \|f'_n - g\| = 0$. Es conocido que entonces $g = f'$, por tanto GT es cerrado en $X \times Y$. Observemos que $C([0,1])$ es completo, por tanto deducimos que $C^1([0,1])$ con la norma del supremo no es completo. Además el teorema del grafo cerrado no es cierto si el espacio inicial no es completo, aunque sea completo el espacio final.

Demostraremos que, no obstante, el espacio $X = C^1([0,1])$, con la norma $\|f\|' = \|f\| + \|f'\|$, sí es completo. En efecto, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X tendremos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en $Y = C([0,1])$ con la norma del supremo, por tanto existen f y g, funciones reales y continuas en $[0,1]$, tales que $\lim f_n = f$ y $\lim f'_n = g$ uniformemente en $[0,1]$, pero entonces sabemos que $g = f'$ y se deduce que $\lim f_n = f$ en X.

3.- Consideremos ahora la aplicación $T : (l_1, \| \|_1) \to (l_1, \| \|_\infty)$, $T(x) = x$, tenemos que T es lineal continua y sobreyectiva pero T no es abierta, así pues deducimos que $(l_1, \| \|_\infty)$ no es completo y que el teorema de la aplicación abierta no es cierto, en general, si el espacio final no es completo aunque sea completo el inicial.

3.5 Series convexas

3.5.1 Conjuntos cs-cerrados

DEFINICIÓN 3.5.1 *Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$. Se llama* ***serie convexa*** *de elementos de A a cada serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ donde $a_n \in A, \alpha_n \in [0,1]$ si $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$. Se dice que A es cs-****cerrado*** *si la suma de cada serie convexa de A que sea convergente es un elemento de A.*

*Se dice que A es cs-****compacto*** *si cada serie convexa de A converge a un elemento de A.*

Es claro que todo cs-compacto es cs-cerrado y que cada cs-cerrado es convexo.

TEOREMA 3.5.2 *Sea X un espacio normado. Si $A \subset X$ es convexo y cerrado entonces A es cs-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN Sea $A \subset X$ un conjunto convexo y cerrado. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$ una serie convexa convergente de A con $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n = x$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$. Si $n \in \mathbb{N}$ denotamos $\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Tenemos que $\beta_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim \frac{1}{\beta_n} = 1, \lim b_n = x$. Por tanto, $\lim \frac{1}{\beta_n} b_n = x$, pero para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\frac{1}{\beta_n} b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_n} a_i$ y como A es convexo y $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_n} = 1$ deducimos que $\frac{1}{\beta_n} b_n \in A$ si $n \in \mathbb{N}$. Como A es cerrado tenemos que $x \in A$. ∎

NOTA 3.5.3

1.- Sea X un espacio normado y sea A un conjunto acotado con $sup\{\|a\| : a \in A\} = M$, si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i = x$ es una serie convexa convergente de A es evidente que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i a_i\|$ es convergente, por tanto $\|x\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \|a_i\| \leq M$. Si para algún $i \in \mathbb{N}$ fuese $\|a_i\| < M$ deducimos que $\|x\| < M$. Desde aquí es sencillo deducir que *la bola unidad abierta U_X es cs-cerrada* y también podemos deducir que *cada bola abierta, $U(a,r)$, de X es cs-cerrada.* Por tanto un conjunto que no es cerrado puede ser cs-cerrado.

Demostraremos que *cualquier abierto que sea convexo es cs-cerrado.*

En efecto, sea U un subconjunto abierto y convexo de X y sea $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i = x$ una serie convexa de U que es convergente a cierto $x \in X$. Es sencillo entender que podemos suponer que $\lambda_1 \neq 0. a_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X donde para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x_n = \frac{1}{\lambda_1+\sum_{i\geq n+1}\lambda_i}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i a_i\right)$ es clar que $\lim x_n = 0$ y también que $\lim_{n\to\infty}\left|1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+(\sum_{i\geq n+1}\lambda_i)}\right| = 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(a_1,\varepsilon) \subset U$. Tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left|1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\sum_{i\geq m+1}\lambda_i}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2\|a_1\|}$ entonces $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\sum_{i\geq m+1}\lambda_i} a_1 + x_m \in B(a_1,\varepsilon)$ ya que

$$\left\|\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + (\sum_{i\geq m+1}\lambda_i)}a_1 + x_m - a_1\right\| \leq \left|1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \sum_{i\geq m+1}\lambda_i}\right| \|a_1\| + \|x_m\| \leq \varepsilon.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} x = \quad & (\lambda_2 + \cdots + \lambda_m)\left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_2+\cdots+\lambda_m}a_2 + \cdots + \tfrac{\lambda_m}{\lambda_2+\cdots+\lambda_m}a_m\right) \\ & + \left(\lambda_1 + \textstyle\sum_{i\geq m+1}\lambda_i\right)\left(\tfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\sum_{i\geq m+1}\lambda_i}a_1 + x_m\right), \end{aligned}$$

. Así pues, $x \in U$, ya que x es combinación convexa de dos elementos de U.

2.- *Sea X un espacio normado y sea $P \subset X$ una cuña, entonces P es cs-cerrado si y sólo si cada serie convergente de elementos de P tiene su suma en P.*

En efecto, supongamos que P es cs-cerrado y que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a$ es una serie convergente de elementos de P. Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(2^i a_i) = a$ es una serie convexa convergente de P y por tanto $a \in P$.

Recíprocamente, supongamos que cada serie convergente de elementos de P tiene su suma en P y sea $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i = a$ una serie convexa convergente de P, como P es una cuña tenemos que $\alpha_i a_i \in P$ si $i \in \mathbb{N}$, por tanto $a \in P$.

En particular ha quedado probado que si E es subespacio vectorial de X entonces E es cs-cerrado si y sólo si E es cerrado.

Sea $A \subset X$ un conjunto cs-cerrado y sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n$, con $a_n \in A, \alpha_n \in [0,+\infty)$ si $n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \alpha$. Se verifica que $\frac{1}{\alpha}x \in A$. En efecto, tenemos que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha} a_n = \frac{1}{\alpha} x$ es una serie convexa convergente de A, por tanto $\frac{1}{\alpha} x \in A$.

Si $A \subset X$ es un conjunto acotado y $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ es una serie convexa de A entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ es de Cauchy. En efecto, sea $M > 0$ tal que $\|a\| < M$ si $a \in A$, tenemos que $\| \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i a_i \| \leq M \sum_{i=q+1}^{p} \alpha_i a_i$ si $p > q, p, q \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 3.5.4 *Sean X un espacio normado y $A \subset X$. Si A es cs-compacto entonces A es cs-cerrado y acotado. Si X es completo y A es cs-cerrado y acotado entonces A es cs-compacto.*

DEMOSTRACIÓN Si $A \subset X$ es *cs*-compacto es claro que A es *cs*-cerrado. Supongamos que A no es acotado entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existirá $a_n \in A$ tal que $\|a_n\| > 2^n$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n$ es una serie convexa de A que no es convergente ya que $\|\frac{1}{2^n} a_n\| > 1$.

Supongamos ahora que X es Banach y que $A \subset X$ es *cs*-cerrado y acotado. Sea $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ una serie convexa de A. Como A es acotado tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ será de Cauchy y por tanto convergente a cierto $x \in X$, pero como A es *cs*-cerrado será $x \in A$. ■

TEOREMA 3.5.5 *Sea X un espacio normado. Sean A y B dos subconjuntos de X. Si A es cs-compacto y B es cs-cerrado entonces $A+B$ y $co(A \cup B)$ son cs-cerrados.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (a_i + b_i) = x$ una serie convexa convergente de $A + B$ ($a_i \in A, b_i \in B$ si $i \in \mathbb{N}$), tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ es una serie convexa en A y como A es *cs*-compacto será convergente a cierto $a \in A$. Como para cada $i \in \mathbb{N}$ es $\alpha_i b_i = \alpha_i (a_i + b_i) - \alpha_i a_i$ deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i = x - a$. Como B es *cs*-cerrado existirá $b \in B$ tal que $x - a = b$, entonces $x = a + b \in A + B$.

Supongamos ahora que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i = x$ es una serie convexa convergente de $co(A \cup B)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ existen $\beta_i \in [0,1], a_i \in A$ y $b_i \in B$ tales que $x_i = \beta_i a_i + (1 - \beta_i) b_i$. Tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i$ es convergente en $\mathbb{R}$ a cierto

$h > 0$. Como A es *cs*-compacto, será $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i a_i$ convergente a un elemento ha de hA. Para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\alpha_i x_i = \alpha_i \beta_i a_i + \alpha_i(1 - \beta_i) b_i$ y deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(1 - \beta_i) b_i$ es convergente. Como B es *cs*-cerrado será convergente a cierto tb donde $b \in B$ y $t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\beta_i - 1)$. Entonces será $x = ha + tb$, con $h + t = \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i \alpha_i + (\beta_i - 1)\alpha_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Así pues $x \in co(A \cup B)$. ∎

Es conocido que la clausura de un conjunto puede tener puntos interiores y el conjunto tener interior vacío (por ejemplo $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) comprobaremos ahora que esto no puede suceder con un conjunto *cs*-cerrado en un espacio normado, más adelante se sacará provecho de esta propiedad.

TEOREMA 3.5.6 *Sea X un espacio normado. Si $A \subset X$ es cs-cerrado entonces A y $cl(A)$ tiene el mismo interior.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que $\mathrm{Int}\, A \subset \mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A)$. Si demostramos que $\mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A) \subset A$, como $\mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A)$ es abierto, podremos deducir que $\mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A) \subset \mathrm{Int}\, A$ y por tanto que $\mathrm{Int}\, A = Int\ \mathrm{cl}(A)$.

Sea $x \in \mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A)$. Existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \mathrm{Int}\, \mathrm{cl}(A)$. Buscamos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} a_n = x$ y, en esta situación, quedaría probado que $x \in A$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x = x$, lo que buscamos equivale a encontrar una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(a_n - x) = 0$. Probaremos, por inducción, que existe una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A tal que $\|\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}(a_i - x)\| \le \frac{r}{2^{k+1}}$ si $k \in \mathbb{N}$. Como $x \in \mathrm{cl}(A)$ existe $a_1 \in A$ tal que $\|a_1 - x\| < \frac{r}{2}$, por tanto $\|\frac{1}{2}(a_1 - x)\| \le \frac{r}{2^2}$. Como $x - 2(a_1 - x) \in B(x, r) \subset \mathrm{cl}(A)$ podemos obtener $a_2 \in A$ tal que $\|a_2 - x + 2(a_1 - x)\| < \frac{r}{2}$, por tanto $\|\frac{1}{2}(a_1 - x) + \frac{1}{2^2}(a_2 - x)\| < \frac{r}{2^3}$. Supuesto que hemos obtenido $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \subset A$ cumpliendo la condición deseada, tendremos que $\|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}(a_i - x)\| \le \frac{r}{2^n}$ y por tanto $x - 2^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}(a_i - x) \in B(x, r) \subset \mathrm{cl}(A)$. Como consecuencia, podemos obtener $a_n \in A$ tal que $\|a_n - x + 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}(a_i - x)\| \le \frac{r}{2}$, así pues $\|\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i}(a_i - x) + \frac{1}{2^n}(a_n - x)\| \le \frac{r}{2^{n+1}}$. Finalmente es claro que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(a_i - x) = 0. \qquad \blacksquare$$

NOTA 3.5.7

1.- Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$, se dice que A es **semicerrado** si $\operatorname{Int} A = Int\ \mathrm{cl}(A)$. Por tanto hemos probado que en un espacio normado todo conjunto cs-cerrado es semicerrado. Sea X un espacio normado y sean A, B dos subconjuntos cerrados convexos de X donde una de los dos es cerrado. Sabemos que en general no podemos afirmar que $A + B$ o $co(A \cup B)$ sean cerrados pero ha quedado probado que ambos son cs-cerrados (y por tanto semicerrados).

2.- El último teorema sugiere que estudiemos propiedades similares en los conjuntos convexos.

Consideremos en c_0 el conjunto $A = c_{00}$ tenemos A es convexo y que $\operatorname{Int} A = \emptyset$ pero $\mathrm{cl}\, A = c_0$ y $\operatorname{Int}\ \mathrm{cl}\, A = c_0$. Si el conjunto A fuese cs-convexo esto no hubiera sucedido y tendríamos la igualdad $\operatorname{Int} A = Int\ \mathrm{cl}\, A$, es decir podríamos afirmar que $\operatorname{Int}\ \mathrm{cl}\, A = \emptyset$ y esta propiedad es una característica importante de los conjuntos cs-cerrados.

Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un conjunto convexo tal que $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$ probaremos que entonces se verifican las siguientes propiedades:

i.- $\mathrm{cl}\, A = cl\ intA$.

En efecto, es claro que $\mathrm{cl}(IntA) \subset \mathrm{cl}(A)$. Sea $b \in \mathrm{cl}(A)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n \in B(b, \frac{1}{n}) \cap A$. Fijo $a \in Int\ A$, tenemos que $x_n = (1 - \frac{1}{n+1})b_n + \frac{1}{n+1}a \in IntA$ si $n \in \mathbb{N}$, pero como $\lim x_n = b$, deducimos que $b \in \mathrm{cl}(IntA)$.

ii.- *Si $a \in IntA$ y $b \in cl A$ entonces $(a, b) \subset IntA$.*

En efecto, sea $\alpha \in (0,1)$ y sea $z = \alpha a + (1-\alpha)b$, demostraremos que $z \in IntA$. Sea $f : X \to X$ la aplicación definida por $f(x) = z - \frac{\alpha}{1-\alpha}(x - z)$, tenemos que f es un homeomorfismo tal que $f(z) = z$ y $f(a) = b$, además si $x \in X$ se verifica que $(1-\alpha)f(x) = (1-\alpha)z - \alpha(x - z) = z - \alpha x$, es decir $\alpha x + (1-\alpha)f(x) = z$ si $x \in X$. Sea V entorno abierto de a tal que $V \subset IntA$, será $f(V)$ entorno abierto de $f(a) = b$, como $b \in \mathrm{cl}(A)$ será $f(V) \cap A \neq \emptyset$, así pues existe $y \in V$ tal que $f(y) \in A$. Consideremos la aplicación $g : X \to X$ definida por $g(x) = \alpha x + (1-\alpha)f(y)$, tenemos que g es homeomorfismo y $g(y) = z$. Como V es entorno abierto de y será $g(V)$ entorno abierto de $g(y) = z$. Demostraremos que $g(V) \subset A$, pero si $x \in V$ es $g(x) = \alpha x + (1-\alpha)f(y)$ una combinación convexa de $x \in A$ y $f(y) \in A$ así pues $g(x) \in A$.

iii.- $IntA = Int\ \mathrm{cl}\, A$.

En efecto, es claro que $IntA \subset Int\ \mathrm{cl}(A)$. Supongamos que $x \in Int\ \mathrm{cl}\, A$. Por medio de la traslación $-x$ no se pierde generalidad si suponemos que $0 \in Int\ \mathrm{cl}\, A$, demostraremos que $0 \in IntA$. Existe $r > 0$ tal que $B(0, r) \subset \mathrm{cl}\, A = \mathrm{cl}\ IntA$, así pues existe $a \in B(0, r) \cap IntA$. Si $a = 0$ hemos concluido, en otro caso tenemos que $-a \in B(0, r) \subset \mathrm{cl}\, A$ y $0 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(-a)$, por (ii) deducimos que $0 \in IntA$.

3.5.2 Conjuntos cs-cerrados y aplicaciones lineales y continuas

Sean X, Y dos espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua.

Si $A \subset X$ es cs-compacto entonces $T(A)$ es cs-compacto. En efecto, si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(a_i)$ es una serie convexa de $T(A)$ tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ es una serie convexa en A, por tanto existe $x \in A$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i = x$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T(a_i) = T(x)$ y $T(x) \in T(A)$.

Si $B \subset Y$ es cs-cerrado entonces $T^{-1}(B)$ es cs-cerrado en X. En efecto, sea $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i a_i = x$ una serie convexa convergente de $T^{-1}(B)$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i\, T(a_i) = Tx$ es una serie convexa convergente de B, por tanto $Tx \in B$ y $x \in T^{-1}(B)$.

Supongamos que X e Y son dos espacios normados y que $R \subset X \times Y$ es cs-cerrado. Vamos a demostrar que si $A \subset X$ es cs-compacto entonces $R(A)$ es un subconjunto cs-cerrado de Y. En efecto, sea $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i = b$ una serie convexa convergente de elementos de $R(A)$, para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $a_i \in A$ tal que $(a_i, b_i) \in R$. tenemos que $\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i a_i$ es una serie convexa de A y por tanto será convergente a cierto $a \in A$. Así pues tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (a_i, b_i)$ es una serie convexa de R que es convergente a (a, b), pero como R es cs-cerrado tenemos que $(a, b) \in R$ y será $b \in R(A)$.

De forma similar se probaría que si $B \subset Y$ es cs-compacto y $R \subset X \times Y$ es cs-cerrado entonces $R(B)$ es un conjunto cs-cerrado de X.

3.5.3 Aplicaciones a los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada

A continuación presentamos nuevas demostraciones de los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada, basándonos en los conceptos de esta sección. No obstante, el "espíritu" de las demostraciones sigue siendo el mismo. Se observará también que aquí se obtiene el teorema de la aplicación abierta como consecuencia del de la gráfica cerrada, mientras que en la sección segunda el de la gráfica cerrada se probó como consecuencia del de la aplicación abierta.

TEOREMA 3.5.8 **[Teorema de la gráfica cerrada.]**
Sean X, Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Si el grafo de T es cerrado entonces T es continua.

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT^{-1}(B_Y)$ y como X es completo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Int\ \mathrm{cl}\, mT^{-1}(B_Y) \neq \emptyset$. Entonces se verifica $Int\ \mathrm{cl}\, T^{-1}(B_Y) \neq \emptyset$. Como Y es de Banach tenemos que B_Y es cs-compacto y como GT es un subespacio vectorial cerrado será cs-cerrado. Entonces $T^{-1}(B_Y) = GT(B_Y)$ es cs-cerrado y por tanto $IntT^{-1}(B_Y) = Int\ \mathrm{cl}\, T^{-1}(B_Y) \neq \emptyset$. Como además $T^{-1}(B_Y)$ es convexo y simétrico, tenemos que $0 \in Int(T^{-1}(B_Y))$. Por tanto existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset T^{-1}(B_Y)$. Si $x \in X$ y $x \neq 0$, tenemos que $\frac{r}{\|x\|}x \in B(0,r)$, por lo que $\|\frac{r}{\|x\|}Tx\| < 1$ y será $\|Tx\| \leq \frac{1}{r}\|x\|$. ∎

TEOREMA 3.5.9 **[Teorema de la aplicación abierta.]**
Sean X, Y dos espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal continua y sobreyectiva entonces T es abierta.

DEMOSTRACIÓN Tenemos que GT es un subespacio vectorial cerrado de $X\times Y$. Por tanto GT es cs-cerrado y, como X es de Banach, tenemos que B_X es cs-compacto. Por tanto,

$$GT(B_X) = \{y \in Y : (x,y) \in GT \text{ para algún } x \in B_X\} = T(B_X)$$

es cs-cerrado en Y. Como T es sobreyectiva, tenemos que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B_X)$ y, al ser Y completo, podemos deducir, del teorema de Baire, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Int\ \mathrm{cl}(mT(B_X)) \neq \emptyset$. Si $B(a,r) \subset \mathrm{cl}(mT(_X))$ es claro que $B(\frac{1}{m}a, \frac{r}{m}) \subset \mathrm{cl}\, T(B_X)$; así pues, $Int\ \mathrm{cl}\, T(B_X) \neq \emptyset$. Dado que $T(B_X)$ es cs-cerrado, tenemos que $IntT(B_X) \neq \emptyset$. Como $T(B_X)$ es convexo y simétrico, deducimos que existe $r > 0$ tal que $rB_X \subset T(B_X)$. Por tanto T es abierta. ∎

NOTA 3.5.10 *Sea Y un espacio de Banach separable entonces demostraremos que existe una aplicación $T : l_1 \to Y$ que es lineal continua y abierta.*

En efecto, sea $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B_Y$ un conjunto numerable y denso en B_Y. Definimos $T : l_1 \to Y$ por $T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y_i$. Observemos que si $p, q \in \mathbb{N}$ con $q > p$ entonces $\|\sum_{i=p}^{q} x(i)y_i\| \leq \sum_{i=p}^{q} |x_i|$ y por tanto T está bien definida y además es claro que $\|Tx\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x(i)y_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|$. Es sencillo comprobar que T es lineal, así pues T también es continua ya que $\|Tx\| \leq \|x\|$. Veremos que T es abierta, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $T(e_n) = y_n$ y por tanto $\mathrm{cl}\, T(B_{l_1}) \supset B_Y$. Como B_{l_1} es cs-compacto será $T(B_{l_1})$ cs-compacto y por tanto $T(B_{l_1}) \supset IntT(B_{l_1}) = Int\ \mathrm{cl}\, T(B_{l_1}) \supset Int(B_Y) = U_Y$. Así pues $T(B_{l_1}) \supset \frac{1}{2}B_Y$ y deducimos que T es abierta.

Tema 4

El teorema de Hahn-Banach y los teoremas de extensión y separación

4.1 Introducción

Después de los anteriores capítulos es lógico que nos hagamos la siguiente pregunta ¿Dado un espacio normado X (por ejemplo real) existe alguna aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ que sea lineal y continua? Esta existencia está garantizada si X es finito dimensional pero todavía nada sabemos en el caso infinito dimensional. Está claro que parte del sentido de los capítulos anteriores quedaría en entredicho si en general no pudiéramos garantizar, en el marco de los espacios normados, la existencia de aplicaciones lineales y continuas.

Del estudio de la topología general sabemos que en un espacio completamente regular está garantizada la existencia de aplicaciones continuas que no sean constantes. Dado un espacio normal, el lema de Urysohn nos permite separar dos cerrados disjuntos por una función continua que toma en los mismos valores constantes distintos. El teorema de Tietze, por otro lado, asegura que en un espacio normal toda aplicación real y continua definida en un subconjunto cerrado puede extenderse a todo el espacio, conservando la continuidad.

Quizás el teorema de Tietze podría darnos alguna pista para solucionar nuestra pregunta inicial, fijamos un subespacio finito dimensional E de X, entonces existe una aplicación $T : E \to \mathbb{R}$ que es lineal y continua, como E es cerrado el teorema de Tietze nos asegura la existencia de una extensión continua a X. Pero, claro está que no nos garantiza que esta extensión sea lineal. Por otra parte hay resultados de álgebra lineal elemental que nos permiten obtener una extensión lineal de T a X, pero nada nos garantiza que la extensión sea continua.

La solución a nuestra pregunta la obtendremos con el histórico teorema de

Hahn-Banach.

DEFINICIÓN 4.1.1 *Sea X un espacio vectorial y sea $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación, se dice que p es sublineal si para cada $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, se verifica que:*

i.- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

ii.- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

Cada seminorma en X es una aplicación sublineal aunque el recíproco es falso.

Si E es un subespacio vectorial de X y $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal diremos que f está dominada por p si $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E$.

LEMA 4.1.2 *Sean X un espacio vectorial real y $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación sublineal. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial de X y $g_0 : E \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal dominada por p. Sea $a \in X - E$ entonces existe una aplicación $g : E + \mathcal{L}(a) \to \mathbb{R}$ lineal y dominada por p tal que $g(x) = g_0(x)$ si $x \in E$.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $x \in E + \mathcal{L}(a)$ tenemos que existe un único $y \in E$ y un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $x = y + \alpha a$, definimos $g : E + \mathcal{L}(a) \to \mathbb{R}$ por $g(x) = g_0(y) + \alpha h$, donde $h = g(a) \in \mathbb{R}$ decidiremos después qué valor tendrá. Es claro que g es lineal y que $g(x) = g_0(x)$ si $x \in E$.

Se verifica que $g(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E + \mathcal{L}(a)$ si y sólo si se verifica que $g_0(y) - \alpha h \leq p(y - \alpha a)$ y $g_0(y) + \alpha h \leq p(y + \alpha a)$ para cada $y \in E$ y cada $\alpha > 0$. Dividiendo por α obtenemos que la expresión anterior es equivalente a que se verifique, para cada $\alpha > 0$ y cada $y \in E$, que $g_0(\frac{1}{\alpha}y) - p(\frac{1}{\alpha}y - a) \leq h \leq p(\frac{1}{\alpha}y + a) - g_0(\frac{1}{\alpha}y)$. Como E es un subespacio vectorial esta expresión equivale a que para cada $y \in E$ se verifique que $g_0(y) - p(y - a) \leq h \leq p(y + a) - g_0(y)$. Si $y_1, y_2 \in E$ entonces

$$\begin{aligned} g_0(y_1) + g_0(y_2) &= g_0(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) = p((y_1 - a) + (y_2 + a)) \\ &\leq p(y_1 - a) + p(y_2 + a). \end{aligned}$$

Si fijamos $y_2 \in E$ deducimos que para cada $y_1 \in E$ es $g_0(y_1) - p(y_1 - a) \leq p(y_2 + a) - g_0(y_2)$. Así pues, $\{g_0(y) - p(y-a) : y \in E\}$ está acotado superiormente y tendrá supremo que denotamos por α, será $\alpha \leq p(y_2+a) - g_0(y_2)$ para cada $y_2 \in E$. Por tanto, $\{p(y+a) - g_0(y) : y \in E\}$ está acotado inferiormente y tendrá ínfimo que denotamos por β, es claro que $\alpha \leq \beta$ y por tanto podemos afirmar que existe $h \in \mathbb{R}$ tal que para cada $y \in E$ se verifique que $g_0(y) - p(y - a) \leq h \leq p(y + a) - g_0(y)$ y con esto se concluye la demostración. ∎

4.2 Versión analítica del teorema de Hahn-Banach

TEOREMA 4.2.1 **[Teorema de Hahn-Banach]**
Sea X un espacio vectorial real y sea $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación sublineal. Sea E un subespacio vectorial de X y sea $g_0 : E \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal dominada por p. Entonces existe $g : X \to \mathbb{R}$ lineal y dominada por p tal que $g(x) = g_0(x)$ si $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN Consideremos la familia $\mathcal{P}$ de los pares ordenados (F, g) tales que F es subespacio vectorial de X con $E \subset F$ y $g : F \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal con $g_E = g_0$ y $g(x) \leq p(x)$ si $x \in F$.

En $\mathcal{P}$ definimos la relación $(F_1, g_1) \leq (F_2, g_2)$ si y sólo si $F_1 \subset F_2$ y $g_{2_{F_1}} = g_1$. Tenemos que $\leq$ es una relación de orden en $\mathcal{P}$ y que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, ya que $(E, g_0) \in \mathcal{P}$. Demostraremos que toda cadena de $\mathcal{P}$ (subconjunto totalmente ordenado) tiene cota superior. Sea $H = \{(F_i, g_i) : i \in I\}$ una cadena de $\mathcal{P}$. Tenemos que $F = \cup_{i \in I} F_i$ es un subespacio vectorial de X. En efecto, si $x, y \in F$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que existen $i_1, i_2 \in I$ tales que $x \in F_{i_1}, y \in F_{i_2}$. Como H es una cadena podemos suponer que, por ejemplo, es $F_{i_1} \subset F_{i_2}$ y entonces $x + y \in F_{i_2}$ y $\alpha x \in F_{i_2}$. Así pues, $x + y \in F$ y $\alpha x \in F$.

Definimos $g : F \to \mathbb{R}$ por $g(x) = g_i(x)$ si $x \in F_i, i \in I$, tenemos que g está bien definida ya que si $x \in F_i$ y existe $j \in I$ tal que $x \in F_j$ podemos suponer que, por ejemplo, es $(F_i, g_i) \leq (F_j, g_j)$ y será claro que $g_j(x) = g_i(x)$. Es sencillo demostrar que g es lineal y además si $x \in F$ tenemos que existe $i \in I$ tal que $x \in F_i$ y por tanto será $g(x) = g_i(x) \leq p(x)$. Si $x \in E$ entonces para cada $i \in I$ es $x \in F_i$ y será $g(x) = g_i(x) = g_0(x)$.

Finalmente para cada $i \in I$ es $F_i \subset F$ y si $x \in F_i$ es $g_i(x) = g(x)$, por tanto tenemos que $(F_i, g_i) \leq (F, g)$ y $(F, g) \in \mathcal{P}$. Así pues la cadena H tiene cota superior y como consecuencia del lema de Zörn podemos afirmar que existe un elemento (F, g) de $\mathcal{P}$ que es maximal. Es decir, si $(F', g') \in \mathcal{P}$ y $(F, g) \leq (F', g')$ entonces $(F, g) = (F', g')$. Si demostramos que $F = X$ habremos concluido. Supongamos que $F \neq X$ entonces si $a \in X \setminus F$ deducimos del lema anterior que existe una aplicación $g' : F' = F + \mathcal{P}(a) \to \mathbb{R}$ lineal y tal que $g'(x) = g(x)$ si $x \in F$ y $g'(x) \leq p(x)$ si $x \in F'$ pero entonces sería $(F, g) \leq (F', g')$ y $(F, g) \neq (F', g')$ lo cual es una contradicción. ■

4.2.1 Versión analítica compleja del teorema de Hahn- Banach

Vamos a estudiar ahora el caso de que X sea un espacio vectorial complejo. En este caso va a ser necesario asumir que p es una seminorma en X. En esta situación, si E es subespacio vectorial de X y $f : E \to \mathbb{K}$ es lineal diremos que f está **absolutamente dominada** por p si $|f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in E$.

Teorema 4.2.2 **[Forma compleja del teorema de Hahn-Banach]**
Sean X un espacio vectorial complejo y p una seminorma en X. Sean E un subespacio vectorial de X y $f_0 : E \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal absolutamente dominada por p. Entonces existe una aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ lineal y absolutamente dominada por p tal que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in E$.

Demostración Si $g_0 = \operatorname{Re} f_0$ tenemos, para cada $x \in E$ que $f_0(x) = g_0(x) - ig_0(ix)$ además $g_0(x) \leq |f_0(x)| \leq p(x)$. Por el teorema anterior deducimos que existe $g : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que $g(x) = g_0(x)$ si $x \in E$ y $g(x) \leq p(x)$ si $x \in X$.

Sea $f : X \to \mathbb{C}$ definida por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ es claro que f es lineal y si $x \in E$ es $f(x) = f_0(x)$. Demostraremos que $|f(x)| \leq p(x)$ si $x \in X$. En efecto, si $x \in X$ es tal que $f(x) \neq 0$ sea $\alpha = \frac{|f(x)|}{f(x)}$, entonces $f(\alpha x) = |f(x)|$ y como este número es real será $|f(x)| = f(\alpha x) = g(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$. ∎

Nota 4.2.3 Sean X un espacio vectorial real y p una seminorma en X. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial y $f_0 : E \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal dominada por p, observemos que si $x \in E$ se verifica que $f_0(-x) \leq p(-x) = p(x)$. Así pues, $-p(x) \leq f_0(x) \leq p(x)$ y deducimos que $|f_0(x)| \leq p(x)$. Es decir, f_0 está absolutamente dominada por p. En esta situación sabemos que existe una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in E$ y f está dominada por p, razonando como antes deducimos que f está absolutamente dominada por p, por tanto el teorema anterior es válido en el caso real incluso si f_0 está solo dominada por p.

4.3 Teoremas de existencia de formas lineales y continuas

El próximo teorema resuelve nuestro problema de existencia de aplicaciones lineales y continuas.

Teorema 4.3.1 *Sea X un espacio normado. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial y $f_0 : E \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua entonces existe una aplicación lineal y continua, $f : X \to \mathbb{K}$, tal que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in E$ y $\|f\| = \|f_0\|$.*

Demostración Definimos $p : X \to \mathbb{R}$ en cada $x \in X$ por $p(x) = \|f_0\|\|x\|$, tenemos que p es seminorma en X y que $|f_0(x)| \leq p(x)$ si $x \in E$, por tanto existe una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in E$ y $|f(x)| \leq p(x)$ si $x \in X$. Por tanto f es continua y $\|f\| \leq \|f_0\|$ pero como $\|f_0\| = \|f_E\| \leq \|f\|$ tenemos que $\|f\| = \|f_0\|$. ∎

Teorema 4.3.2 *Sea X un espacio normado. Si $x_0 \in X$ entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Demostración Suponemos que $x_0 \neq 0$ y definimos la aplicación $f_0 : \mathcal{L}(x_0) \to \mathbb{K}$ por $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$. Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\| = \|\alpha x_0\|$ y deducimos que $\|f_0\| = 1$. Sabemos que existe una aplicación lineal y continua $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in \mathcal{L}(x_0)$ y $\|f\| = \|f_0\|$. ∎

TEOREMA 4.3.3 *Sea X un espacio normado. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío y sea $f_0 : A \to \mathbb{K}$ una aplicación. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $f = f_0$ en A.

ii) Existe $M > 0$ tal que si $n \in \mathbb{N}$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ y $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset A$ entonces $|\alpha_1 f_0(x_1) + \cdots + \alpha_n f_0(x_n)| \leq M\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\|$.

Además, si se cumple ii), se tiene puede escogerse f en i de modo que $\|f\| \leq M$.

DEMOSTRACIÓN Es claro que $i)$ implica $ii)$. Veamos la otra implicación. Definimos la aplicación $\overline{f}_0 : \mathcal{L}(A) \to \mathbb{K}$ por $\overline{f}_0(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f_0(x_1) + \cdots + \alpha_n f_0(x_n)$. Veamos que $\overline{f}_0$ está bien definida independientemente de la combinación lineal utilizada.

En efecto, si $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ y $\beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m$ son dos elementos iguales de $\mathcal{L}(A)$ tenemos que:

$$|(\alpha_1 f_0(x_1) + \cdots + \alpha_n f_0(x_n)) - (\beta_1 f_0(y_1) + \cdots + \beta_m f_0(y_m))| \leq$$

$$\leq M \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j \right\| = 0$$

Claramente es $\overline{f}_0$ lineal en $\mathcal{L}(A)$ y además es continua con $\|f_0\| \leq M$. Para concluir la demostración consideremos la extensión $f : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $f = \overline{f}_0$ en $\mathcal{L}(A)$ y $\|f\| = \|\overline{f}_0\|$. ∎

TEOREMA 4.3.4 **[Teorema de Helly]**.

Sea X un espacio normado. Sean $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$ y $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Existe $x_0 \in X$ tal que $f_j(x_0) = c_j$ si $j \in \{1, \ldots, n\}$.

ii) Existe $M > 0$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ es $|\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n| \leq M\|\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\|$.

Si se cumple ii) se tiene entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger x_0 de modo que $\|x_0\| = M + \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN $i) \Rightarrow ii)$ $|\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_n c_n| = |\alpha_1 f_1(x_0) + \cdots + \alpha_n f_n(x_0)| = |(\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n)(x_0)| \leq \|x_0\|\|\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\|$.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $\varepsilon > 0$. Si cada c_j es igual a cero basta con escoger $x_0 = 0$. Supongamos que para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ es $c_j = 0$ y supongamos también que estamos en la situación de que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es libre. Sabemos que existe un conjunto libre $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset X$ tal que $f_i(y_j) = \delta_{ij}$. Consideremos la aplicación T de X en $\mathbb{K}^n$ definida por $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, se verifica que T es lineal y que $Ty_i = e_i$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, T es sobreyectiva y existirá $y_0 \in X$ tal que $Ty_0 = (c_1, \ldots, c_n)$; es decir, $(f_1(y_0), \ldots, f_n(y_0)) = (c_1, \ldots, c_n)$. Como

$y_0 \notin \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$ existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(y_0) = d(y_0, \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j)$ y $f(\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j) = 0$, esto último significa que existe $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \subset \mathbb{K}$ de modo que $f = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$.

Observemos que

$$d(y_0, \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j) = f(y_0) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j \right\| = M.$$

Por tanto existe $z_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$ tal que $\|y_0 - z_0\| \leq M + \varepsilon$. Si fuese $\|y_0 - z_0\| = M + \varepsilon$ para $x_0 = y_0 - z_0$ tenemos el resultado deseado. Si fuese $\|y_0 - z_0\| < M + \varepsilon$ escogemos $y \in \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$ con $\|y\| = 1$ y definimos la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(\lambda) = \|y_0 - z_0 + \lambda y\|$. Tenemos que $\varphi(0) = \|y_0 - z_0\| < M + \varepsilon$ y $\varphi(2(M+\varepsilon)) = \|y_0 - z_0 + 2(M+\varepsilon)y\| > M + \varepsilon$. De la continuidad de φ se deduce que existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\|y_0 - z_0 + \lambda_0 y\| = M + \varepsilon$, para $x_0 = y_0 - z_0 + \lambda_0$ y tenemos el resultado deseado.

Supongamos ahora que estamos en la situación en que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ no es libre y después de una reordenación podemos suponer que $\{f_1, \ldots, f_m\}$ $(m < n)$ es subconjunto libre maximal de $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ existe $(\alpha_1^k, \ldots, \alpha_m^k) \in \mathbb{K}^m$ de modo que $f_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k f_i$. Para $\{f_1, \ldots, f_m\}$ existe $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = M + \varepsilon$ y $f_j(x_0) = c_j$ si $j \in \{1, \ldots, m\}$. Si $k \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica que $|f_k(x_0) - c_k| = \left| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^k c_j - c_k \right| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^k f_j - f_k \right\| = 0.$ ∎

Como consecuencia del teorema de Helly tenemos que si $f \in X^*$ es tal que $\|f\| > h$ entonces para cada $a \in \mathbb{K}$ es $|ah| < \|af\|$ y podemos afirmar que existe $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que $f(x) = h$.

TEOREMA 4.3.5 *Sea X un espacio normado. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial y $x_0 \in X$ tal que $d(x_0, E) = \alpha > 0$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \alpha$ y $f(x) = 0$ si $x \in E$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $E_1 = E + \mathcal{L}(x_0)$. Cada $x \in E_1$ tiene una expresión única en la forma $x = y + \lambda x_0$ con $y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Definimos la aplicación $f_0 : E_1 \to \mathbb{K}$ por $f_0(y + \lambda x_0) = \lambda\alpha$; tenemos que f_0 es lineal con $f_0(x_0) = \alpha$ y $f_0(x) = 0$ si $x \in E$. Demostraremos que $\|f_0\| = 1$. Sea $\lambda \neq 0$ entonces si $y \in E$ es $-\lambda^{-1}y \in E$ y por tanto $\|x_0 + \lambda^{-1}y\| \geq \alpha$, así pues $\|y + \lambda x_0\| \geq \alpha|\lambda| = |f_0(y + \lambda x_0)|$ y será $\|f_0\| \leq 1$. Por otra parte si $\varepsilon > 0$ existe $y \in E$ tal que $\|x_0 - y\| < \alpha + \varepsilon$ y como $f_0(x_0 - y) = \alpha$ deducimos que $\|f_0\| \geq |f_0(\frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|})| > \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon}$, por tanto será $\|f_0\| \geq 1$. Así pues $\|f_0\| = 1$ y si consideramos la correspondiente extensión lineal y continua $f : X \to \mathbb{K}$ con $f_{E_1} = f_0$ y $\|f\| = \|f_0\|$ habremos concluido la demostración. ∎

4.4 Algunas consecuencias del teorema de Hahn-Banach

1.- Sea X un espacio normado. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$ tenemos que $x - y \neq 0$ y por tanto existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$, así pues $f(x) \neq f(y)$.

Sea $x \in X$ y consideremos $\alpha = \sup\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\}$ es claro que $\alpha \leq \|x\|$. Como existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$, deducimos que

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in B_{X^*}\} = \sup\{f(x) : f \in S_{X^*}\}.$$

2.- Sean X un espacio normado y $E \subset X$ un subespacio vectorial. Si $x \in X$ entonces $x \in \mathrm{cl}(E)$ si y sólo si para cada $f \in X^*$ con $f(E) = \{0\}$ se verifica que $f(x) = 0$.

En efecto, si $x \notin \mathrm{cl}(E)$ será $d(x, E) = \alpha > 0$ y entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(E) = \{0\}$ y $f(x_0) = \alpha$.

3.- Vamos a probar que a cada sucesión acotada, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de $\mathbb{K}$ le podemos hacer corresponder un elemento de $\mathbb{K}$, que denotamos por $\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$, de modo que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente se verifique que $\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim a_n$ y además para cada par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sucesiones acotadas y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifique que $\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \varphi((b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ y $\varphi(\alpha(a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \alpha\varphi((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

En efecto, consideremos la aplicación $\varphi_0 : c \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi_0((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim a_n$. Tenemos que φ_0 es lineal y continua con $\|\varphi_0\| = 1$, por tanto existe una aplicación lineal y continua $\varphi : l_\infty \to \mathbb{K}$ tal que $\varphi_c = \varphi_0$ y $\|\varphi\| = 1$.

4.- Sean X, Y dos espacios normados. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial y $T_0 : E \to Y$ una aplicación lineal. Si $Y \neq \mathbb{K}$ no se puede afirmar que exista una aplicación lineal y continua $T : X \to Y$ tal que $T(x) = T_0(x)$ si $x \in E$. En el próximo teorema veremos que para los espacios del tipo $B(S)$ sí se puede realizar la afirmación.

TEOREMA 4.4.1 *Sean X un espacio normado y $E \subset X$ un subespacio vectorial. Sea S un conjunto y consideremos el espacio $B(S)$. Entonces si $T_0 : E \to B(S)$ es una aplicación lineal y continua existe una aplicación lineal y continua $T : X \to B(S)$ tal que $T(x) = T_0(x)$ si $x \in E$ y $\|T\| = \|T_0\|$.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $t \in S$ definimos la aplicación $f_t : E \to \mathbb{K}$ por $f_t(y) = T_0 y(t)$. Tenemos que f_t es lineal y $|f_t(y)| = |T_0 y(t)| \leq \sup\{|T_0 y(t)| : t \in S\} \leq \|T_0 y\| \leq \|T_0\|\|y\|$. Así pues $\|f_t\| \leq \|T_0\|$ y f_t es continua. Por tanto para cada $t \in S$ existe una aplicación lineal y continua $g_t : X \to \mathbb{K}$ de modo que $g_t(y) = f_t(y)$ si $y \in E$ y $\|g_t\| = \|f_t\| \leq \|T_0\|$. Definimos la aplicación $T : X \to B(S)$ en cada $x \in X$ por $Tx : S \to \mathbb{K}$, $Tx(t) = g_t(x)$. Para cada $t \in S$ es $|Tx(t)| = |g_t(x)| \leq \|T_0\|\|x\|$, así pues Tx es efectivamente una aplicación acotada. Además es claro que T es lineal y que si $x \in X$ es $\|Tx\| \leq \|T_0\|\|x\|$ y será $\|T\| \leq \|T_0\|$. Si $x \in E$ entonces para cada $t \in S$ es $Tx(t) = g_t(x) = f_t(x) = T_0 x(t)$ así pues $Tx = T_0 x$. Por tanto, como T es extensión de T_0, será $\|T_0\| \leq \|T\|$. Por consiguiente, $\|T\| = \|T_0\|$. ∎

4.5 Separación de conjuntos convexos

Después del siguiente lema, de carácter técnico, entraremos en el estudio de los teoremas de separación (que también son denominadas como las "versiones geométricas del teorema de Hahn-Banach").

LEMA 4.5.1 *Sea X un espacio normado real y sea P una cuña propia de X ($P \neq X$) con $IntP \neq \emptyset$ entonces existe $f \in X^*$ tal que $f \neq 0$ en P y $f(x) \geq 0$ si $x \in P$.*

DEMOSTRACIÓN Como P es una cuña con $IntP \neq \emptyset$ tenemos que existe $e \in P$ tal que $B(e,1) \subset P$. Para cada $x \neq 0$ tenemos que $e - \frac{1}{\|x\|}x \in P$ y por tanto $\|x\|e - x \in P$. Para cada $x \in X$ definimos $p(x) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha e - x \in P\}$, será $0 \leq p(x) \leq \|x\|$. Observemos que si $x \in P$ entonces $p(-x) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha e + x \in P\} = 0$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in X$ son tales que $p(x) < \lambda$ tenemos que existirá $\lambda' \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) \leq \lambda' < \lambda$ y $\lambda' e - x \in P$, pero entonces como $\lambda e - x = \lambda' e - x + (\lambda - \lambda')e$ deducimos que $\lambda e - x \in P$.

Demostraremos que p es sublineal. Si $\beta = 0$ tenemos que $p(\beta x) = p(0) = \inf\{\alpha \geq 0 : \alpha e \in P\} = 0$ y también $\beta p(x) = 0$. Supongamos que $\beta > 0$ y sea $\varepsilon > 0$, para $\lambda = p(\beta x) + \varepsilon$ es $\lambda e - \beta x \in P$ y por tanto $\frac{\lambda}{\beta}e - x \in P$. Por tanto, $p(x) \leq \frac{\lambda}{\beta}$ y $\beta p(x) \leq p(\beta x) + \varepsilon$, para $\lambda = p(x) + \varepsilon$ tenemos que $\lambda e - x \in P$ y $\beta\lambda e - \beta x \in P$ así pues $\beta\lambda \geq p(\beta x)$ y será $p(x) + \varepsilon \geq \frac{1}{\beta}p(\beta x)$. Todo esto prueba que $p(\beta x) = \beta p(x)$ si $\beta \geq 0$. Si $x, y \in X$ tenemos que para cada $\lambda > p(x)$ y cada $\mu > p(y)$ es $\lambda e - x \in P$ y $\mu e - y \in P$, así pues $(\lambda + \mu)e - (x + y) \in P$ y $p(x + y) \leq \lambda + \mu$. Por tanto, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Sabemos que si una cuña es propia y $a \in IntP$ entonces $-a \notin P$, así pues $-e \notin P$. Si fuese $p(e) < 1$ podemos considerar $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $p(e) < \beta < 1$ y entonces $\beta e - e \in P$. De aquí deducimos que $(1-\beta)(-e) \in P$ y $-e \in P$ lo que no es posible, por tanto será $p(e) \geq 1$. Definimos la aplicación $f_0 : \mathcal{L}(e) \to \mathbb{R}$ por $f_0(\lambda e) = \lambda p(e)$, es claro que f_0 es lineal. Si $\lambda \geq 0$ es $f_0(\lambda e) = \lambda p(e) = p(\lambda e)$. Si $\lambda < 0$ tenemos que $p(\lambda e) = 0$, ya que $-\lambda e \in P$, mientras que $f_0(\lambda e) = \lambda p(e) < 0$. Así pues f_0 está dominada por p y por H-Ba existe una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{R}$ dominada por p y de modo que $f(x) = f_0(x)$ si $x \in \mathcal{L}(e)$. Por tanto, $f(e) = f_0(e) = p(e) \neq 0$ y tenemos que f no es idénticamente cero en P. Además, para cada $x \in X$ es $f(x) \leq \|x\|$ y $-f(x) = f(-x) \leq \|x\|$, así pues $|f(x)| \leq \|x\|$ y f es continua. Si $x \in P$ es $f(-x) \leq p(-x) = 0$ y será $f(x) \geq 0$.

Finalmente observemos que si $g = \frac{1}{\|f\|}f$ entonces $g \in S_{X^*}$ y $g(x) \geq 0$ si $x \in P$. ∎

TEOREMA 4.5.2 **[Forma geométrica del teorema de Hahn-Banach]**
Sea X un espacio normado real. Sean A y B dos subconjuntos convexos, disjuntos y no vacíos de modo que B es abierto, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(a) > f(b)$ si $a \in A$ y $b \in B$

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ es abierto y convexo. Sea $P = \cup\{\alpha(A - B) : \alpha \geq 0\}$, tenemos que P es una cuña de interior no vacío ya que $A - B \subset P$. Probaremos que $P \neq X$. En efecto, si $a \in A$ y $b \in B$ se verifica que $b - a \notin P$. En caso contrario, sería $b - a = \alpha(a' - b')$ donde $a' \in A, b' \in B$ y $\alpha > 0$. Entonces dividiendo por $1 + \alpha$ deducimos que el elemento $\frac{\alpha}{1+\alpha}a' + \frac{1}{1+\alpha}a = \frac{1}{\alpha+1}b + \frac{\alpha}{\alpha+1}b'$ es a la vez de A y B lo que no es posible. Por tanto existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que $f(x) \geq 0$ si $x \in P$. Así pues si $a \in A$ y $b \in B$ será $f(a) \geq f(b)$. Supongamos que $a \in A$ y $b \in B$ y $f(a - b) = 0$, consideremos $e \in P$ tal que $f(e) > 0$, como $A - B$ es abierto existirá algún $\varepsilon > 0$ tal que $x = (a - b) - \varepsilon e \in A - B \subset P$ pero entonces sería $f(x) < 0$ lo que no es posible. Por tanto para cada $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $f(a) \geq f(b)$ y $f(a) \neq f(b)$. ∎

Observemos que si $g = \frac{1}{\|f\|}f$ tenemos que $g \in S_{X^*}$ y que $g(a) > g(b)$ si $a \in A$ y $b \in B$.

TEOREMA 4.5.3 *Sea X un espacio normado real. Si A y B son dos subconjuntos convexos de X no vacíos y con $d(A, B) = \alpha > 0$ entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que* $\inf f(A) = \sup f(B) + \alpha$.

DEMOSTRACIÓN Sea $V = U(0, \alpha)$. Si $G = B + V$ entonces G es abierto y convexo. Si $x \in A \cap G$ será $x = b + c$ con $b \in B$, $c \in V$ y tendremos que $d(A, B) \leq d(x, B) \leq \|(b + c) - b\| = \|c\| < \alpha$, pero esto no es posible y por tanto será $A \cap G = \emptyset$. Por el teorema anterior existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(a) > f(x)$ para cada $a \in A$ y cada $x \in G$. Sean $p = \inf f(A)$ y $q = \sup f(B)$ entonces para cada $a \in A$ y $b \in B$ es $p - q \leq f(a) - f(b) \leq \|a - b\|$ y por tanto $p - q \leq \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} = \alpha$. Por otra parte, si $z \in V$ entonces para cada $b \in B$ es $b + z \in G$ y $f(b + z) \leq p$. Así pues, $f(b) \leq p - f(z)$ para cada $b \in B$ y será $q \leq p - f(z)$ es decir $f(z) \leq p - q$ si $z \in V$. Observemos que $\sup\{f(z) : z \in V\} = \alpha \sup\{f(x) : x \in U_X\} = \alpha\|f\| = \alpha$. Por tanto $\alpha \leq p - q$ y será $p - q = \alpha$. ∎

NOTA 4.5.4 1.- Obsérvese que, en la situación del último teorema,

$$\sup f(B) = \inf f(A) - \alpha;$$

así pues, si $a \in A$ y $b \in B$ es $f(b) \leq f(a) - \alpha$ y podemos afirmar que $|f(a) - f(b)| \geq \alpha$.

2.- Si en los dos últimos teoremas hubiese sido X un espacio normado complejo entonces hubiéramos obtenido:

i) En el primer teorema una aplicación $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\|g\| = 1$ y $g(a) > g(b)$ si $a \in A$ y $b \in B$, entonces si $f : X \to \mathbb{C}$ es la aplicación definida por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ podemos afirmar que $f \in S_{X^*}$ y $Ref(a) > Ref(b)$ si $a \in A$ y $b \in B$.

ii) En el segundo teorema una aplicación $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\|g\| = 1$ y $\inf g(A) = \sup g(B) + \alpha$ entonces si $f : X \to \mathbb{C}$ es la aplicación definida por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ podemos afirmar que $f \in S_{X^*}$ y $\inf Ref(A) = \sup Ref(B) + \alpha$.

3.- Sea X un espacio normado real. Sean B un conjunto convexo no vacío y $x \in X$. Si $x \notin \operatorname{cl} B$ será $d(x, B) > 0$ y, aplicando el último teorema a los conjuntos $A = \{x\}$ y B, deducimos que existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \sup f(B) + d(x, B)$.

4.- Sea X un espacio normado real. Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de X y convexos con $IntB \neq \emptyset$ y $A \cap IntB = \emptyset$. Si aplicamos el penúltimo teorema a A y $IntB$ deducimos que existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(a) > f(b)$ si $a \in A$ y $b \in IntB$. Es sencillo deducir que si $x \in \operatorname{cl} B$ y $a \in A$ se verifica que $f(x) \leq f(a)$.

5- *Sea X un espacio normado real. Supongamos que A y B son subespacios cerrados de X tales que $A + B$ es propio y $A + B$ es denso en X. Sea $z \in X$ tal que $z \notin A + B$, probaremos que A es disjunto de $B' = B + z$.*

En efecto, si $b + z \in A$, con $b \in B$, tenemos que $b + z \in A$ y $-b \in B$ así pues $z \in A + B$ lo que no es posible. Tenemos pues que A y B' son cerrados convexos y disjuntos y demostraremos que no existe $f \in X^*$ tal que $f \neq 0$ y $\inf f(A) \geq \sup f(B')$. En efecto, supongamos que existe $f \in X^*$ tal que $\inf f(A) \geq \sup f(B') = f(z) + \sup f(B)$. Como A es subespacio vectorial si existe $x \in A$ con $f(x) \neq 0$ deducimos que no existe $\inf f(A)$, por tanto $f(A) = \{0\}$ y será $\sup f(B) \leq f(-z)$, pero de nuevo como B es subespacio vectorial deducimos que $f(B) = \{0\}$. Por tanto, $f(A+B) = \{0\}$ y, como $A+B$ es denso en X, será $f = 0$.

Veamos ahora un ejemplo de la situación que aquí hemos descrito. Consideremos en l_1, $A = \{a \in l_1 : a(2n) = 0 \text{ si } n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \in l_1 : b(2n) = \frac{1}{2^n} b(2n-1)$ si $n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que A y B son subespacios vectoriales cerrados y disjuntos de l_1 y en su momento se probó que el subespacio $A + B$ es propio. Observemos que $\{e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} \subset A \subset A+B$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\frac{1}{2^n} e_{2n} + e_{2n-1} \in B \subset A+B$ así pues $\frac{1}{2^n} e_{2n} + e_{2n-1} + (-e_{2n-1}) = \frac{1}{2^n} e_{2n} \in A+B$, por tanto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A+B$ y $A + B$ será denso en l_1.

DEFINICIÓN 4.5.5 *Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$. Se dice que A es equilibrado si para cada $a \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ es $\lambda a \in A$.*

Obsérvese que si $A \subset X$ es equilibrado entonces A es simétrico. Si X es un espacio normado tenemos que B_X y U_X son equilibrados y es fácil probar que si $A \subset X$ es equilibrado entonces $\operatorname{cl} A$ es equilibrado.

En la próxima nota veremos que para los conjuntos equilibrados se consiguen buenos resultados de separación en los espacios normados complejos.

NOTA 4.5.6 1.- Sea X un espacio normado complejo y sean A, B dos subconjuntos no vacíos de X que son convexos y disjuntos y de modo que B es abierto y equilibrado, sabemos que existe $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $\|g\| = 1$ y $g(a) > g(b)$ si $a \in A, b \in B$. Consideremos la aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ definida en cada $x \in X$ por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ entonces $f \in S_{X^*}$. Si $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $|f(a)| \geq g(a)$ y si $\theta = Argf(b)$ será $f(b) = |f(b)| e^{i\theta}$ y $|f(b)| = f(e^{-i\theta} b)$, pero como $e^{-i\theta} b \in B$ será $|f(b)| = f(e^{-i\theta} b) = g(e^{-i\theta} b) < g(a) \leq |f(a)|$. Por tanto para cada $a \in A$ y cada $b \in B$ es $|f(b)| < |f(a)|$. Es evidente que este resultado es también cierto en el caso de un espacio normado real.

2.- Sea X un espacio normado complejo. Sean A y B dos subconjuntos convexos de X tales que B es equilibrado y $d(A, B) = \alpha > 0$. Sabemos que existe una aplicación lineal $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tal que $\|g\| = 1$ y $\inf g(A) = \sup g(B) + \alpha$. Consideremos la aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ definida en cada $x \in X$ por $f(x) = g(x) - ig(ix)$ tenemos que $f \in S_{X^*}$. Si $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $|f(a)| \geq g(a)$ y si $\theta = Argf(b)$ será $e^{-i\theta}b \in B$ y $|f(b)| = f(e^{-i\theta}b) = g(e^{-i\theta}b) \leq g(a) - \alpha \leq |f(a)| - \alpha$. Sean $q = \sup\{|f(b)| : b \in B\}, p = \inf\{|f(a)| : a \in A\}$. Ha quedado probado que $q \leq p - \alpha$ es decir $\alpha \leq p - q$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\|a - b\| \leq \alpha + \varepsilon$, tenemos que $p - q \leq |f(a)| - |f(b)| = ||f(a)| - |f(b)|| \leq |f(a) - f(b)| \leq \|a - b\| \leq \alpha + \varepsilon$. Así pues tenemos que $p - q = \alpha$.

Es sencillo comprobar que este resultado es también cierto para el caso de espacios normados reales.

3.- Sean X un espacio vectorial complejo y M un subconjunto de X. Se dice que M es $\mathbb{C}$-simétrico si para cada $x \in M$ y cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ se verifica que $\lambda x \in M$.

Es evidente que los resultados de los apartados 1 y 2 son válidos si cambiamos la hipótesis de que B es equilibrado por la hipótesis de que B sea $\mathbb{C}$-simétrico. En el caso real bastaría la hipótesis de que B sea simétrico.

Pero observemos que en el caso complejo si B es convexo y $\mathbb{C}$-simétrico entonces B es equilibrado. En efecto, supongamos que $x \in B$ y que $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda| < 1$, podemos poner $\lambda = |\lambda|e^{i\Theta}$ donde $\Theta = Arg\lambda$. Tenemos que $|\lambda|x = \alpha(-x) + (1-\alpha)x$ donde $\alpha = \frac{1-|\lambda|}{2}$. Así pues, $\lambda x = \alpha(-e^{i\Theta}x) + ((-\alpha)(e^{i\Theta}x))$ y deducimos que $\lambda x \in B$. En el caso real tenemos que convexo y simétrico implican equilibrado.

4.6 Hiperplanos

DEFINICIÓN 4.6.1 *Sea X un espacio vectorial real, se dice que $H \subset X$ es un hiperplano afín si existe una aplicación lineal $f : X \to \mathbb{R}$ y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$. En este caso, usaremos la notación $H = [f = \alpha]$.*

TEOREMA 4.6.2 *Si X es un espacio normado y H es un hiperplano en E entonces H es cerrado si y sólo si f es continua.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que si f es continua entonces $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ es cerrado. Recíprocamente, Si denotamos $E = H - x_0$ se cumple que E es cerrado. Veamos que $E = \text{Ker } (f)$. Si $y \in H$ se tiene que $f(y - x_0) = f(y) - f(x_0) = 0$, por lo que $H - x_0 \subset \text{Ker } (f)$. Por otro lado, si $x \in \text{Ker } (f)$ entonces $y = x_0 + x$ verifica que $f(y) = f(x_0) + f(x) = \alpha$, por lo que $y \in H$; esto prueba que $x_0 + \text{Ker } (f) \subset H$ y $\text{Ker } (f) \subset H - x_0$. Como $\text{Ker } (f)$ es cerrado, necesariamente f es continua. ∎

DEFINICIÓN 4.6.3 *Sea X un espacio vectorial. Si A, B son dos subconjuntos de X diremos que el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B si, por ejemplo, se verifica que $f(a) \geq \alpha$ si $a \in A$ y $f(b) \leq \alpha$ para $b \in B$.*

Diremos que $[f = \alpha]$ separa estrictamente A y B si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(a) \geq \alpha + \varepsilon$ si $a \in A$ y $f(b) \leq \alpha - \varepsilon$ si $b \in B$.

Con estos conceptos podemos afirmar para un espacio normado real X lo siguiente:

i) *Si A y B son dos subconjuntos de X convexos, no vacíos, disjuntos y B es abierto, entonces existe un hiperplano cerrado, $H = [f = \alpha]$, que separa A y B.*

En efecto, sabemos que existe $f \in X^*$ tal que $f(a) > f(b)$ si $a \in A$ y $b \in B$. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sup\{f(b) : b \in B\} \leq \alpha \leq \inf\{f(a) : a \in A\}$, tenemos que basta tomar $H = [f = \alpha]$.

ii) Si A y B son dos subconjuntos convexos de X tales que $d(A, B) = \alpha > 0$ tendremos que existe $f \in X^*$ tal que $\inf f(A) = \sup f(B) + \alpha$. Por tanto, si $p = \inf f(A), q = \sup f(B)$ y $\beta = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$, deducimos que $H = [f = \beta]$ es un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B.

Sean A y B dos subconjuntos disjuntos de X de modo que A es cerrado y convexo y B es compacto y convexo, es fácil probar que entonces $d(A, B) = \alpha > 0$ y por tanto existirá un hiperplano cerrado que separe estrictamente A y B.

Tema 5

Introducción a la dualidad

5.1 Introducción

5.1.1 Duales y biduales. Espacios reflexivos

En lo que sigue el término dual hará siempre referencia a dual topológico, en otro caso se dirá explícitamente que se habla del dual algebraico.

Sea X un espacio normado y sea X^* el espacio dual de X. Al espacio dual de X^* se le denota por X^{**} y se denomina espacio bidual. Es frecuente que a los elementos de X^* se les denote por x^* y a los elementos de X^{**} por x^{**}.

Para cada $x \in X$ denotamos por $\hat{x}$ a la aplicación $\hat{x} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definida en cada $f \in X^*$ por $\hat{x}(f) = f(x)$. Es claro que $\hat{x}$ es lineal y que $|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\|$. Así pues $\hat{x}$ es también continua y podemos afirmar que $\hat{x} \in X^{**}$, además $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Como sabemos que existe $f \in S_{X^*}$ tal que $|f(x)| = \|x\|$, resulta que $\|x\| = |f(x)| = |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|$ y tenemos que $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

Consideremos ahora la aplicación $j : X \to X^{**}$ definida en cada $x \in X$ por $j(x) = \hat{x}$. Es sencillo comprobar que j es lineal y como además j es isometría tenemos que j es continua. La aplicación j es denominada **inclusión canónica o natural** de X en su espacio bidual X^{**}. Por tanto X puede identificarse, por medio de una isometría lineal, con el subespacio $j(X)$ de X^{**} que denotaremos por $\hat{X}$. Gracias a esta identificación entre X y $\hat{X}$ es usual considerar que $X \subset X^{**}$ y denotar a los elementos $\hat{x}$ de $\hat{X}$ simplemente por x.

Si la aplicación J es sobreyectiva diremos que X es **reflexivo**. Por tanto, X es reflexivo si y sólo si $X^{**} = \{\hat{x} : x \in X\}$.

Es sencillo probar que si X es completo entonces $\hat{X} = j(X)$ es cerrado en X^{**}. Por otra parte, si $\hat{X}$ es cerrado en X^{**}, como X^{**} es completo, tendremos que $\hat{X}$ es completo y deducimos que X es también completo. Por tanto, *si X es un espacio reflexivo necesariamente es X completo.*

TEOREMA 5.1.1 *Sea X un espacio de Banach reflexivo si $E \subset X$ es subespacio vectorial cerrado entonces E es reflexivo.*

DEMOSTRACIÓN Sea $h \in E^{**}$ y probaremos que existe $x_0 \in E$ tal que para $f \in E^*$ es $h(f) = f(x_0)$.

Definimos $\varphi : X^* \to \mathbb{K}$, en cada $f \in X^*$, por $\varphi(f) = h(f_E)$. Es claro que φ es lineal y $|\varphi(f)| = |h(f_E)| \leq \|h\|\|f_E\| \leq \|h\|\|f\|$. Así pues, φ es continua y sera $\varphi \in X^{**}$. Como X es reflexivo existe $x_0 \in X$ tal que si $f \in X^*$ es $\varphi(f) = \hat{x}_0(f) = f(x_0)$. Si fuese $x_0 \notin E$, como E es un subespacio cerrado, sabemos que existirá $f \in X^*$ tal que $f(E) = 0$ y $f(x_0) \neq 0$. Entonces tendremos que $\varphi(f) = 0$ y $\hat{x}_0(f) \neq 0$ y esto no es posible. Por tanto, necesariamente es $x_0 \in E$. Finalmente, si $g \in E^*$ existe (por el teorema de Hahn-Banach) una aplicación $f \in X^*$ tal que $f_E = g$. Entonces será $h(g) = h(f_E) = \varphi(f) = \hat{x}_0(f) = f(x_0) = g(x_0) = \hat{x}_0(g)$. ▪

5.1.2 Dualidad y la compleción de un espacio normado

Sean X un espacio normado que no es completo, tendremos que el correspondiente espacio métrico $(X, d), d(x, y) = \|x - y\|$, no es completo.

Recordemos que se llama compleción de un espacio métrico (X, d) a todo par $[(Y, \tilde{d}), h]$ tal que:

i) $(Y, \tilde{d})$ es un espacio métrico completo.

ii) h es una aplicación de (X, d) en $(Y, \tilde{d})$ que es isometría.

iii) $h(X)$ es denso en Y.

Si $[(Z, d'), g]$ es otra compleción de (X, d) es sencillo probar que existe una isometría sobreyectiva $\varphi : (Y, \tilde{d}) \to (Z, d')$ tal que $\varphi h = g$. Así pues, desde este punto de vista, podemos decir que la compleción de un espacio métrico es única salvo isometrías.

El concepto de compleción de un espacio normado está lógicamente relacionado con la linealidad y es el siguiente.

Dado un espacio normado $(X, \| \ \|)$ se llama compleción de X a todo par $[(Y, \| \ \|'), h]$ tal que

a) $(Y, \|\|')$ es un espacio normado completo.

b) h es una aplicación de $(X, \|\|)$ en $(Y, \|\|')$ que es isometría lineal.

c) $h(X)$ es denso en Y.

Dado un espacio normado X tenemos que X^{**} es completo y consideremos $Y = cl(\hat{X}) \subset X^{**}$. Si en Y consideramos la norma inducida de X^{**} tenemos que Y es un espacio normado completo. Consideremos la aplicación $j : X \to Y, j(x) = \hat{x}$. Es claro que $[Y, j]$ es una compleción de X. Supongamos que $[(Z, \|\|'), h]$ es otra compleción del espacio normado X. Definimos $\varphi_0 : j(X) \to Z$ por $\varphi_0(j(x)) = h(x)$. Se tiene que φ_0 es lineal y $\|\varphi_0(j(x))\|' = \|h(x)\|' = \|x\| = \|j(x)\|$. Por tanto, φ_0 es una isometría lineal de $j(X)$ en Z, y, por la densidad de $j(Y)$ en Y, podemos considerar la correspondiente extensión lineal y continua, $\varphi : Y \to Z$, que también será isometría lineal. Por consiguiente, $\varphi(Y)$ es cerrado en Z y $h(X) \subset \varphi(Y)$. Como $h(X)$ es denso en Z deducimos que $\varphi(X) = Z$. Es claro que φ es isometría lineal sobreyectiva tal que $\varphi j = h$.

5.1.3 Dualidad y separabilidad

A continuación veremos algunos teoremas relacionados con la separabilidad.

TEOREMA 5.1.2 *Sean X un espacio normado y E un subespacio vectorial de X, entonces existe una aplicación lineal continua y abierta de X^* en E^*. Como consecuencia se deduce que si X^* es separable también lo será E^*.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación $\varphi : X^* \to E^*$ definida en cada $f \in X^*$ por $\varphi(f) = f_E$, es claro que φ es lineal y continua. Además del teorema de H-Ba deducimos que dada $f_0 \in E^*$ existe $f \in X^*$ tal que $\varphi(f) = f_0$ y $\|f_0\| = \|f\|$. Esto significa que φ es abierta con, constante abierta 1 (que φ es abierta también se puede deducir del hecho de que E^* y X^* son completos y φ es sobreyectiva). ∎

TEOREMA 5.1.3 *Sea X un espacio normado separable. Entonces:*

1. *Si E es un subespacio vectorial cerrado de X existe un subconjunto numerable, $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$, de S_{X^*} tal que $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker g_n$ y $d(x, E) = \sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$ si $x \in X$.*

2. *Existe un subconjunto numerable, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ de S_{X^*} que separa puntos de X y es tal que $\|x\| = \sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$.*

3. *X es linealmente isométrico a un subespacio de l_∞.*

DEMOSTRACIÓN Sea $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in S_{X^*}$ tal que $g_n(x) = 0$ si $x \in E$ y $g_n(x_n) = d(x_n, E)$. Consideremos $x \in X$, si $y \in E$ tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $|g_n(x)| = |g_n(x - y)| \leq \|x - y\|$. Así pues, $\sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq d(x, E)$. Por otra parte si $\varepsilon > 0$ tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon/2$ y entonces

$$\begin{aligned} d(x, E) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, E) = \|x - x_n\| + g_n(x_n) \\ &\leq \|x - x_n\| + |g_n(x_n - x)| + |g_n(x)| \leq 2\|x - x_n\| + |g_n(x)| \\ &< \varepsilon + \sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Por tanto, $d(x, E) = \sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$. Es evidente que será $E \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker g_n$ y si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker g_n$ tenemos que $d(x, E) = \sup\{|g_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} = 0$. Por tanto, como E es cerrado, tenemos que $x \in E$. Así pues, es $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker g_n$.

Si $E = \{0\}$ deducimos que existe un conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ numerable tal que si $x \in X$ es $\|x\| = d(x, 0) = \sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}$ y además $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker f_n = \{0\}$. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$ será $x - y \neq 0$ y por tanto $x - y \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \ker f_n$. Esto prueba que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq f_n(y)$.

Consideremos la aplicación $T : X \to l_\infty$ definida en cada $x \in X$ por $T(x) = (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Es fácil ver que T es lineal y que para cada $x \in X$ es $\|Tx\| = \sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} = \|x\|$. ∎

TEOREMA 5.1.4 *Sea X un espacio normado entonces existe un espacio métrico T tal que X es linealmente isométrico a un subespacio de $BC(T)$.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos $T = B_{X^*}$ con la métrica inducida por la norma de X^*. Consideremos la aplicación $\varphi : X \to BC(T)$ definida en cada $x \in X$ por $\varphi(x) = \overline{x}$, donde $\overline{x}$ es la restricción de $\hat{x}$ de X^* a B_{X^*}. Es claro que φ es lineal y que $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. ■

TEOREMA 5.1.5 *Sea X un espacio normado. Si X^* es separable entonces X es también separable.*

DEMOSTRACIÓN Sea $K = \{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S_{X^*}$ un conjunto numerable que es denso en S_{X^*}. Para cada $n \in \mathbb{N}$ como $\|f_n\| = 1$ existirá $x_n \in S_X$ tal que $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. Sean $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $F = \mathcal{L}(M)$, probaremos que F es denso en X. Si F no fuese denso en X existirá $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = 0$ si $x \in F$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $|(f_n - f)(x_n)| > \frac{1}{2}$ y por tanto $\|f_n - f\| \geq \frac{1}{2}$, lo que contradice que K sea denso en S_{X^*}. ■

En la siguiente nota ponemos de manifiesto que la separabilidad de X no implica la de X^*.

NOTA 5.1.6 Sea T un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff de modo que el conjunto T no es numerable. Demostraremos que el dual de $BC(T)$ no es separable.

Para cada $t \in T$ consideremos la aplicación $\varphi_t : BC(T) \to K$ definida por $\varphi_t(f) = f(t)$ (φ_t se denomina aplicación evaluación en t). Es claro que $\varphi_t \in BC(T)$ y $\|\varphi_t\| = 1$. Si $t_1, t_2 \in T$ con $t_1 \neq t_2$, tenemos que $\|\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2}\| \leq 2$. Como T es completamente regular existe una aplicación $f : T \to [-1, 1]$ continua tal que $f(t_1) = 1$ y $f(t_2) = -1$, entonces $\|f\| = 1$ y $\|\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2}\| \geq |(\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2})(f)| = 2$, así pues $\|\varphi_{t_1} - \varphi_{t_2}\| = 2$. De la no numerabilidad de T se deduce que $BC(T)^*$ no es separable.

Observemos que si $I = [0, 1]$ tenemos que $C(I)$ es un espacio separable con dual no separable.

El teorema que sigue tiene una demostración que recuerda el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

TEOREMA 5.1.7 **[Teorema de Markushevich]**

Sea X un espacio normado separable. Entonces existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* tales que:

i) $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \mathbb{N}$;

ii) Para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(x) \neq 0$ y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

DEMOSTRACIÓN Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de S_{X^*} tal que para cada $x \in X$ se verifica que $\|x\| = sup_{n\in\mathbb{N}}|g_n(x)|$. Consideremos un conjunto $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X \setminus \{0\}$ que sea numerable y denso en X. Procederemos por inducción de la siguiente forma:

Primer paso: Sea $x_1 = y_1$ y sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{k_1}(y_1) \neq 0$. Sea $f_1 = \dfrac{1}{g_{k_1}(y_1)} g_{k_1}$ y sea h_2 el menor entero tal que $g_{h_2} \notin \mathcal{L}(f_1)$. Definimos $f_2 = g_{h_2} - g_{h_2}(x_1) f_1$ y ya que $f_2 \neq 0$ podemos escoger $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(y_{k_2}) \neq 0$. Sea $x_2 = \dfrac{1}{f_2(y_{k_2})}(y_{k_2} - f_1(y_{k_2})x_1)$. Es claro que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, 2\}$, además $g_1 \in \mathcal{L}(f_1, f_2)$ y $y_1 \in \mathcal{L}(x_1, x_2)$.

Segundo paso: Sea h_3 el menor entero tal que $y_{h_3} \notin \mathcal{L}(x_1, x_2)$. Definimos $x_3 = y_{h_3} - f_1(y_{h_3})x_1 - f_2(y_{h_3})x_2$. Como $x_3 \neq 0$ podemos escoger g_{k_3} tal que $g_{k_3}(x_3) \neq 0$.

Sea $f_3 = \dfrac{1}{g_{k_3}(x_3)}(g_{k_3} - g_{k_3}(x_1)f_1 - g_{k_3}(x_2)f_2)$.

Sea h_4 el menor entero tal que $g_{h_4} \notin \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$. Definimos $f_4 = g_{h_4} - g_{h_4}(x_1)f_1 - g_{h_4}(x_2)f_2 - g_{h_4}(x_3)f_3$. Como $f_4 \neq 0$ podemos escoger $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que $f_4(y_{k_4}) \neq 0$. Definimos $x_4 = \dfrac{1}{f_4(y_{k_4})}(y_{k_4} - f_1(y_{k_4}) - f_2(y_{k_4})x_2 - f_3(y_{k_4})x_3)$.

Es sencillo comprobar que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Además es claro que $\{g_1, g_2\} \subset \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ y $\{y_1, y_2\} \subset \mathcal{L}(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Procediendo de esta manera se obtienen dos sucesiones, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^*, tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \mathbb{N}$ y $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_{2n})$, $(g_1, \ldots, g_n) \subset \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_{2n})$ si $n \in \mathbb{N}$. ▪

NOTA 5.8

a) Sea X un espacio normado separable. De la demostración del teorema anterior se deduce que si $M = \mathcal{L}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces para cada $x \in X$ se verifica que $\|x\| = sup\{|f(x)| : f \in M\}$. En este caso se dice que M es un conjunto normador.

   En el caso en que X^* fuese también separable y la sucesión de partida $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fuese tal que $\mathrm{cl}\,\mathcal{L}(g_n : n \in \mathbb{N}) = [g_n]_{n\in\mathbb{N}} = X^*$ hubiéramos obtenido que también sería $[f_n]_{n\in\mathbb{N}} = X^*$.

b) Sea X un espacio normado. Se dice que un par de sucesiones, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* constituye un **sistema biortogonal** si $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ para cada $i, j \in \mathbb{N}$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X se dice que es una **sucesión minimal** si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* tal que $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ es biortogonal.

   Demostraremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal si y sólo si para cada $i \in \mathbb{N}$ es $x_i \notin [x_n]_{n\in\mathbb{N}, n\neq i}$. En efecto, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ es tal que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \mathbb{N}$. Si $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}, n\neq i} \subset \ker f_i$ y por tanto $x_i \notin [x_n]_{n\in\mathbb{N}, n\neq i}$. Supongamos ahora que $x_i \notin [x_n]_{n\in\mathbb{N}, n\neq i}$ si $i \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $f_i \in X^*$ tal que $f_i(x_i) = 1$ y $f_i([x_n]_{n\in\mathbb{N}, n\neq i}) = \{0\}$.

   Un sistema minimal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamado **sistema fundamental** si $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$. En este caso entonces es también usual decir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **base de Markushevich** de X o bien que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una M-**base**.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es minimal es claro que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una M-base de $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Por esta razón es también usual denominar a las sucesiones minimales por **sucesiones M-básicas**.

■

5.2 Polaridad

DEFINICIÓN 5.2.1 *Sea X un espacio normado. Si A es un subconjunto de X se llama polar de A en X^* y se denota por A^0 al subconjunto de X^* : $A^0 = \{f \in X^* : |f(a)| \leq 1$ si $a \in A\}$. Si B es un subconjunto de X^* se define el polar de B en X y se denota por B_0 al subconjunto de X : $B_0 = \{x \in X : |f(x)| \leq 1$ si $f \in B\}$.*

En la siguiente nota resumimos los aspectos elementales de estos conceptos.

TEOREMA 5.2.2 *Sea X un espacio normado.*

i) Si $A \subset X$ entonces A^0 es convexo, equilibrado y cerrado.

ii) $(B_X)^0 = B_{X^*}$.

iii) Si A y B son subconjuntos de X y $A \subset B$ entonces $B^0 \subset A^0$.

iv) Si A y B son subconjuntos de X entonces $(A \cup B)^0 = A^0 \cap B^0$.

v) Si $A \subset X$ entonces $A^0 = [co(A)]^0$.

vi) Si A es subespacio vectorial de X entonces $A^0 = \{f \in X^* : f(a) = 0$ si $a \in A\}$ y A^0 es subespacio vectorial de X^*, en este caso a A^0 se le llama anulador de A en X^*.

DEMOSTRACIÓN Las primeras propiedades son inmediatas.

v) Es claro que $[co(A)]^0 \subset A^0$, sea $f \in A^0$ y sean $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset A$, $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset [0, 1]$ con $t_1 + \cdots + t_n = 1$ entonces

$$|f(t_1a_1 + \cdots + t_na_n)| \leq t_1|f(a_1)| + \cdots + t_n|f(a_n)| \leq 1.$$

vi) Observemos que si $f \in X^*$ y $f(a) \neq 0$ para algún $a \in A$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|nf(a)| > 1$. Como $na \in A$ deducimos que $f \notin A^0$. ■

NOTA 5.2.3 1.- Si $B \subset X^*$, entonces para el polar de B en X tenemos propiedades similares a las vistas para el polar de $A \subset X$ en X^*. Se verifica que B_0 es convexo, equilibrado y cerrado. $(B_{X^*})_0 = B_X$. Si $A \subset B \subset X^*$ es $B_0 \subset A_0$. Si A y B son subconjuntos de X^* entonces $(A \cup B)_0 = A_0 \cap B_0$. Si $B \subset X^*$ entonces $B_0 = [co(B)]_0$. Si B es subespacio vectorial de X^*, entonces $B_0 = \{x \in X : f(x) = 0$ si $f \in B\}$ es subespacio vectorial de X, en este caso a B_0 se le llama anulador de B en X.

2.- Si $A \subset X$ es $A \subset (A^0)_0$. En efecto, si $x \in A$ y $f \in A^0$ será $|f(x)| \leq 1$ así pues $x \in (A^0)_0$.

3.- Si $B \subset X^*$ es $B \subset (B_0)^0$. En efecto, si $f \in B$ y $x \in B_0$ es $|f(x)| \leq 1$; así pues, $f \in (B_0)^0$.

4.- Si A es subespacio vectorial de X se verifica que $(A^0)_0 = \text{cl } A$. En efecto, como $A \subset (A^0)_0$ y $(A^0)_0$ es cerrado será cl $A \subset (A^0)_0$. Si $x \in (A^0)_0$ entonces para cada $f \in X^*$ tal que $f(A) = \{0\}$ se verifica que $f(x) = 0$ ya que $f \in A_0$ y esto significa que $x \in cl\ A$.

5.- Sea X un espacio normado. Sea A un subconjunto de X. Se llama **anulador** de A en X^*, y lo denotaremos por A^a, al subconjunto de X^*: $A^a = \{f \in X^* : f(x) = 0 \text{ si } x \in A\}$. Sea B un subconjunto de X^*. Se llama anulador de B en X, y lo denotamos por B_a, al subconjunto de X: $B_a = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ si } f \in B\}$ Es sencillo comprobar que se verifican las propiedades:

i) A^a es subespacio cerrado de X^* y B_a es subespacio cerrado de X.

ii) $(A^a)_a = \mathcal{L}(A)$.

iii) Si A es subespacio vectorial de X entonces $A^a = A^0$. Si B es subespacio vectorial de X^* entonces $B_a = B_0$.

TEOREMA 5.2.4 *Sean X un espacio normado y E un subespacio vectorial de X entonces $(E \cap B_X)^0 = E^0 + (B_X)^0$.*

DEMOSTRACIÓN Sean $f \in E^0$ y $g \in (B_X)^0$, si $x \in E \cap B_X$ será $|(f+g)(x)| = |g(x)| \leq 1$, por tanto $E^0 + (B_X)^0 \subset (E \cap B_X)^0$. Sea $f \in (E \cap B_X)^0$, consideremos la correspondiente restricción a E, $f_E : E \to \mathbb{K}$ tenemos que $\|f_E\| \leq 1$ y por H-Ba existe $g \in X^*$ tal que $\|g\| = \|f_E\| \leq 1$ y $g(x) = f_E(x)$ si $x \in E$, por tanto si $x \in B_X$ es $|g(x)| \leq 1$ y será $g \in (B_X)^0$, además $f = g + (f - g)$ pero si $x \in E$ es $(f-g)(x) = 0$, así pues $f - g \in E^0$. En particular ha quedado probado también que $E^0 + (B_X)^0$ es cerrado. ∎

TEOREMA 5.2.5 *Sean X un espacio normado y E un subespacio vectorial de X. Sea $f \in X^*$ entonces $d(f, E^0) = \|f_E\|$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $g \in E^0$ entonces $f - g$ coincide con f en E y será $\|f - g\| \geq \|(f-g)_E\| = \|f_E\|$; así pues, $d(f, E^0) \geq \|f_E\|$. Por otra parte, consideremos la restricción $f_E : E \to \mathbb{K}$, por H-Ba existe $h \in X^*$ tal que $h_E = f_E$ y $\|h\| = \|f_E\|$, entonces $f - h \in E^0$ y $d(f, E^0) \leq \|f - (f-h)\| = \|h\| = \|f_E\|$. Por tanto, tenemos que $d(f, E^0) = \|f_E\|$.

Observemos que si $\alpha < d(f, E^0)$ entonces $\alpha < \|f_E\| = \|f\|$ y existirá $x \in S_X$ tal que $\alpha < |f(x)|$. ∎

TEOREMA 5.2.6 *Sean X un espacio normado y M un subconjunto de X convexo y equilibrado.*

a) Si $x_0 \in X$ es tal que $x_0 \notin cl\ M$ entonces existe $f \in M^0$ tal que $|f(x_0)| > 1$.

b) cl $M = (M^0)_0$.

DEMOSTRACIÓN a) Tenemos que $A = \{x_0\}$ es convexo compacto, $B = cl\ M$ es convexo cerrado equilibrado y $d(A, B) = \alpha > 0$. Por tanto existe $g \in X^*$ tal que $|g(x_0)| \geq |g(x)| - \alpha$ si $x \in M$. Por la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, consideremos $\beta > 0$ tal que $|g(x_0)| > \beta$ y $|g(x)| < \beta$ si $x \in M$. Si $f = \frac{1}{\beta} g$ tenemos que $f \in M^0$ y $|f(x_0)| > 1$.

b) Tenemos que $M \subset (M^0)_0$ y por tanto $cl\ M \subset (M^0)_0$, si $x \in X$ y $x \notin cl\ M$ existe $f \in M^0$ tal que $|f(x)| > 1$ así pues $x \notin (M^0)_0$, por tanto $(M^0)_0 \subset cl\,(M)$. ∎

5.3 Espacios normados tonelados

En el siguiente teorema el principio de acotación uniforme juega un importante papel.

TEOREMA 5.3.1 *Sea X un espacio normado. Si A es un subconjunto de X entonces A es acotado si y sólo si para cada $f \in X^*$ se verifica que $f(A)$ es acotado en $\mathbb{K}$.*

DEMOSTRACIÓN Si $A \subset X$ es acotado, sea $\alpha > 0$ tal que si $a \in A$ es $\|a\| < \alpha$. Si $a \in A$ y $f \in X^*$ tenemos que $|f(a)| \leq \|f\|\alpha$. Recíprocamente, supongamos que $f(A)$ es acotado en $\mathbb{K}$ para cada $f \in X^*$, entonces tenemos que $\{\hat{a} : a \in A\}$ es un subconjunto de X^{**} que es puntualmente acotado en X^*. Como X^* es completo, deducimos del principio de acotación uniforme que el conjunto $\{\hat{a} : a \in A\}$ es acotado en X^{**}; por tanto A es acotado en X. ∎

En particular se deduce que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de X tal que $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{K}$ para cada $f \in X^*$ entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en X.

NOTA 5.3.2 Sobre el principio de acotación uniforme.

Es lógico que nos preguntemos si la hipótesis de completitud es imprescindible para que en un espacio normado se verifique el principio de acotación uniforme. La respuesta es que no, ya que, por ejemplo, si F es el subespacio de l_∞ formado por las sucesiones finito valoradas tenemos que F no es cerrado y por tanto F no es completo, pero en F se verifica el principio de acotación uniforme.

Por otra parte, si H es el subespacio de l_∞ formado por las sucesiones eventualmente constantes tenemos que H no es completo y además H no verifica el principio de acotación uniforme. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : H \to \mathbb{K}$ la aplicación definida, en cada $x \in H$, por $f_n(x) = n(x(n+1) - x(n))$ es evidente que f_n es lineal y que $\|f_n\| \leq 2n$ pero como $|f_n(e_{n+1} - e_n)| = 2n$ será $\|f_n\| = 2n$, pero por otra parte es claro que si $a \in H$ es $\lim_{n \to \infty} |f_n(a)| = 0$. Por tanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente acotada en H pero no es uniformemente acotada en H.

Queda puesto de manifiesto la necesidad de caracterizar, de alguna manera, a los espacios normados en los que se verifique el principio de acotación uniforme.

Observemos que todo espacio normado es denso es otro donde se verifica el principio de acotación uniforme (todo espacio normado es denso en su compleción).

DEFINICIÓN 5.3.3 *Sea X un espacio normado diremos que X es* **tonelado** *si X verifica el principio de acotación uniforme; es decir, para cada espacio normado Y y cada $F \subset C\mathcal{L}(X,Y)$ que sea puntualmente acotado en X se verifica que F es uniformemente acotado, es decir F es acotado en $C\mathcal{L}(X,Y)$.*

DEFINICIÓN 5.3.4 *Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$. Se dice que A es* **absorbente** *si para cada $x \in X$ existe $\alpha_x > 0$ tal què si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| \leq \alpha_x$ se verifica que $\lambda x \in A$.*

Si X es un espacio vectorial topológico y A es un subconjunto de X diremos que A es un **tonel** *si A es convexo, equilibrado, absorbente y cerrado.*

TEOREMA 5.3.5 *Sea X un espacio normado, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Cada tonel de X es entorno de cero.

ii) X es tonelado.

iii) Si F es un subconjunto de X^* que es puntualmente acotado en X entonces F es acotado en X^*.

DEMOSTRACIÓN $i) \Rightarrow ii)$ Sea Y un espacio normado y sea F un subconjunto de $C\mathcal{L}(X,Y)$ que está puntualmente acotado en X. Consideremos el conjunto $M = \{x \in X : \|Tx\| \leq 1 \text{ si } T \in F\}$; es claro que M es convexo, equilibrado y cerrado, veremos que M es absorbente. Sea $x \in X$, tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que si $T \in F$ es $\|Tx\| \leq \alpha$. Por tanto $\beta x \in M$ para cada $\beta \in \mathbb{K}$ con $|\beta| \leq \frac{1}{\alpha}$. Por consiguiente, M es un tonel y existirá $\varepsilon > 0$ tal que $B(0,\varepsilon) \subset M$. Así pues, si $x \in B_X$ y $T \in F$ tenemos que $\|T(\varepsilon x)\| \leq 1$ y por tanto $\|T\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para cada $T \in F$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Es evidente pues basta tomar $Y = \mathbb{K}$.

$iii) \Rightarrow i)$ Sea $M \subset X$ un tonel en X y sea $M^0 = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1$ si $x \in M^0\}$ el correspondiente polar en X^*. Veremos que M^0 es puntualmente acotado en X. En efecto, si $x \in X \setminus \{0\}$ existe, por ser M absorbente, $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha x \in M$ y será $|f(\alpha x)| \leq 1$, es decir $|f(x)| \leq \frac{1}{|\alpha|}$, para cada $f \in M^0$. Por hipótesis tenemos que existe $H > 0$ tal que $\|f\| < H$ si $f \in M^0$. Consideremos $B(0,\frac{1}{H})$, si $x \in B(0,\frac{1}{H})$ tenemos que $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \leq 1$ si $f \in M^0$. Por tanto $B(0,\frac{1}{H}) \subset (M^0)_0 = \text{cl } M = M$. ∎

5.4 La aplicación dual o conjugada

Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Definimos la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$, en cada $g \in Y^*$, por $T^*g = gT$, es claro que la composición gT es una aplicación lineal y continua de X en $\mathbb{K}$ y por tanto es un elemento de X^*.

Es sencillo comprobar que T^* es lineal además para cada $g \in Y^*$ es $\|T^*g\| = \|gT\| \leq \|T\|\|g\|$. Por tanto, T^* es continua y $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Demostraremos ahora que $\|T^*\| = \|T\|$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $x \in S_X$ tal que $\|T\| - \varepsilon < \|Tx\|$. Como $Tx \in Y$, sabemos que existe $g \in S_{Y^*}$ tal que $g(Tx) = \|T\|$. Por consiguiente, $\|T^*\| \geq \|T^*g\| = \|gT\| \geq |g(Tx)| = \|Tx\| > \|T\| - \varepsilon$.

A la aplicación T^* se la denomina **dual** o **conjugada** de T (aquí la llamaremos dual). Se verifica lo siguiente:

i) $\ker T^* = (TX)^0$. En efecto, tenemos que $\ker T^* = \{g \in Y^* : T^*g = 0\} = \{g \in Y^* : g(TX) = 0 \text{ si } x \in X\} = (TX)^0$.

ii) Si TX es denso en Y entonces $\ker T^* = \{0\}$ y T^* es inyectiva. En efecto, si $g \in \ker T^*$ será $g(Tx) = 0$ si $x \in X$ como TX es denso en Y deducimos que $g = 0$.

TEOREMA 5.4.1 *Sean X, Y dos espacios normados. Sea $T : X \to TX \subset Y$ una aplicación lineal continua y abierta (para TX como espacio final). Entonces T^* es una aplicación lineal continua y abierta de Y^*en $(\ker T)^0$ y además se verifica:*

i- Si T es inyectiva entonces $T^*(Y^*) = X^*$ (T^* es sobreyectiva).

ii- Si $T(X) = Y$ (T es sobreyectiva) entonces T^* es un isomorfismo de Y^* en $(\ker T)^0$.

iii- Si T es isomorfismo de X en Y entonces T^* es isomorfismo de Y^* en X^*.

DEMOSTRACIÓN Si $g \in Y^*$ y $x \in \ker T$ tenemos que $(T^*g)(x) = g(Tx) = 0$. Así pues $T^*g \in (\ker T)^0$ y será $T^*Y^* \subset (\ker T)^0$. Sea α la constante abierta para la aplicación $T : X \to TX$. Si $y \in TX$ existirá $x \in X$ tal que $Tx = y$ y $\|x\| \leq \alpha\|y\|$. Sea $f \in (\ker T)^0$, demostraremos que existe $g \in Y^*$ tal que $T^*g = f$. En efecto, definimos la aplicación $g_0 : TX \to \mathbb{K}$ de la siguiente forma, si $y \in TX$ existe $x \in X$ tal que $Tx = y$ y ponemos $g_0(y) = f(x)$.

La aplicación g_0 está bien definida ya que si $x' \in X$ es tal que $Tx' = y$ será $x - x' \in \ker T$ y como $f \in (\ker T)^0$ será $f(x) = f(x')$. Es claro que g_0 es lineal y demostraremos que g_0 es continua. Si $y \in TX$ consideremos $x \in X$ tal que $Tx = y$ y $\|x\| \leq \alpha\|y\|$. Entonces, $|g_0(y)| = |f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \alpha\|f\|\|y\|$; por tanto, g_0 es continua y $\|g_0\| \leq \alpha\|f\|$. Aplicando el teorema de Hahn-Banach a la aplicación g tenemos que existe una aplicación lineal y continua $g : Y \to K$ tal que $g_{TX} = g_0$ y $\|g\| = \|g_0\|$. Si $x \in X$ tenemos que $(T^*g)(x) = g(Tx) = f(x)$ y por tanto $T^*g = f$. Así pues, $T^*Y^* = (\ker T)^0$ y para $f \in (\ker T)^0$ existe $g \in Y^*$ tal que $T^*g = f$ y $\|g\| \leq \alpha\|f\|$, es decir $T^* \quad Y^* \to (\ker T)^0$ es abierta y α es constante abierta de T^*.

Si T es inyectiva será $\ker T = \{0\}$ y $(\ker T)^0 = X^*$ por tanto $T^*Y^* = X^*$.

Si $TX = Y$ será T^* inyectiva ya que $\ker T^* = \{0\}$ y por tanto T^* es isomorfismo de Y^* en $(\ker T)^0$.

Finalmente, si T es isomorfismo de X en Y será T^* isomorfismo de Y^* en $(\ker T)^0$ ya que $TX = Y$ pero como T es inyectiva será $(\ker T)^0 = X^*$, por tanto T^* es isomorfismo de Y^* en X^*. ∎

NOTA 5.4.2 1) Sean X, Y dos espacios normados. Si existe una aplicación $T : X \to Y$ que es lineal continua y abierta entonces Y^* es isomórfico a un subespacio cerrado de X^* (concretamente a $(\ker T)^0$). Por tanto, si X^* es separable deducimos que también lo será Y^*.

2) Sean X, Y dos espacios normados. Si existe una aplicación lineal y continua, $T : X \to Y$, tal que $TB_X = B_Y$ (obsérvese que entonces T será abierta y por tanto sobreyectiva) entonces demostraremos que T^* es una isometría. (En particular quedará probado que si T es isometría sobreyectiva entonces T^* también es isometría). Sea $g \in Y^*$, si $x \in S_X$ se cumple que $|(T^*g)(x)| = |g(Tx)| \leq \|g\|$ ya que $Tx \in B_Y$, por lo que $\|T^*g\| \leq \|g\|$. Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existe $y \in S_Y$ tal que $\|g\| - \varepsilon < |g(y)|$. Como existe $z \in B_X$ tal que $Tz = y$, entonces será $|g(y)| = |g(Tz)| = |(T^*g)(z)| \leq \|T^*g\|$; así pues, deducimos que $\|T^*g\| = \|g\|$.

Obsérvese que *puede suceder que exista una aplicación $T : X \to Y$ lineal y continua que verifique $TB_X = B_Y$, de modo que T no sea isometría.* En efecto, sea $X = Y = c_0$ y consideremos la aplicación $T : X \to Y$ definida en cada $x \in X$ por $Tx = (x(2), x(3), \dots)$. Es claro que T es lineal y continua y que $TB_X = B_Y$, pero T no es isometría ya que $Te_1 = 0$. En esta situación, no obstante, podemos afirmar que la aplicación dual T^* es isometría.

3) Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Denotaremos por T^{**} a la aplicación dual de $T^* : Y^* \to X^*$, tenemos que T^{**} es una aplicación lineal y continua de X^{**} en Y^{**} con $\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$. Demostraremos que si $x \in X$ entonces $T^{**}(\hat{x}) = (\hat{Tx})$. En efecto, tenemos que $T^{**}\hat{x} : Y^* \to \mathbb{K}$ está definida, para $g \in Y^*$, por $(T^{**}\hat{x})(g) = \hat{x}(T^*g)$ y $\hat{x}(T^*g) = (T^*g)(x) = g(Tx) = (\hat{Tx})(g)$.

Consideremos las aplicaciones canónicas $j_1 : X \to X^{**}$ y $j_2 : Y \to Y^{**}$. Ha quedado probado que $T^{**}(j_1(x)) = j_2(Tx)$ si $x \in X$. Por tanto, deducimos que $T^{**}(j_1(X)) = j_2(TX)$. Observemos que si T es isomorfismo de X sobre Y entonces también será T^{**} un isomorfismo de X^{**} sobre Y^{**}. Por tanto, si X es reflexivo y $\varphi \in Y^{**}$ tendremos que existe $\hat{x} \in X^{**}(= \hat{X})$ tal que $T^{**}\hat{x} = \varphi$ y será $\varphi = (\hat{Tx})$; así pues, Y también sería reflexivo.

5.5 Dualidad en algunos espacios de sucesiones

En esta sección trabajaremos con los espacios $c_0, l_1, l_\infty, l_p, \dots$, y trataremos de identificar sus correspondientes espacios duales. Las normas usuales de los distintos espacios serán indicadas en todo caso por $\|\cdot\|$ y del contexto se deducirá a qué tipo de norma se está haciendo referencia.

El contenido de la siguiente nota inspirará fuertemente los próximos teoremas.

NOTA 5.5.1

1).- Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_1$, y sea $f : (\mathbb{R}^2, \| \|_1) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal (será también continua). Vamos a calcular $\|f\|$. Si $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $|a_1| + |a_2| = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(a_1, a_2)| &\leq |a_1||f(e_1)| + |a_2||f(e_2)| \leq max(|f(e_1)|, |f(e_2)|)(|a_1| + |a_2|) \\ &= max(|f(e_1)|, |f(e_2)|) \leq \|f\|. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\|f\| = max(|f(e_1)|, |f(e_2)|)$. Consideremos la aplicación $T : (\mathbb{R}^2, \| \|_1)^* \to (\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ definida por $T(f) = (f(e_1), f(e_2))$, es sencillo ahora probar que T es una isometría lineal biyectiva.

2.- Consideremos ahora $\mathbb{R}^2$ con la norma $\| \|_\infty$ y sea $f : (\mathbb{R}^2, \| \|_\infty) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, vamos a calcular $\|f\|$. Si $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $max(|a_1|, |a_2|) = 1$ tenemos que $|f(a_1, a_2)| \leq |a_1||f(e_1)| + |a_2||f(e_2)| \leq |f(e_1)| + |f(e_2)|$. Esto prueba que $\|f\| \leq |f(e_1)| + |f(e_2)|$. Supongamos que $f \neq 0$ y sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definido, para $i \in \{1, 2\}$, por $x_i = \frac{|f(e_i)|}{f(e_i)}$ si $f(e_i) \neq 0$ y $x_i = 0$ si $f(e_i) = 0$. Tenemos que $\|(x_1, x_2)\| = 1$ y $\|f\| \geq |f(x_1, x_2)| = |f(e_1)| + |f(e_2)|$. Por tanto $\|f\| = |f(e_1)| + |f(e_2)|$. Si consideremos la aplicación $R : (\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)^* \to (\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ definida por $R(f) = (f(e_1), f(e_2))$, es sencillo probar que R es una isometría lineal biyectiva.

3.- Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la norma $\| \|_p$ donde $p \in (1, +\infty)$ y sea $q \in (1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sea $f : (\mathbb{R}^2, \| \|_p) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal, vamos a calcular $\|f\|$.

Si $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ es tal que $|a_1|^p + |a_2|^p = 1$ tenemos que, usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} |f(a_1, a_2)| &\leq |a_1||f(e_1)| + |a_2||f(e_2)| \\ &\leq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{1/p}(|f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q)^{1/q} = (|f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q)^{1/q}. \end{aligned}$$

Por otra parte, supongamos que $f \neq 0$ y sea $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ el elemento definido, para $i \in \{1, 2\}$, por $x_i = \frac{|f(e_i)|^q}{f(e_i)}$ si $f(e_i) \neq 0$ y $x_i = 0$ si $f(e_i) = 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= |f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q, \ \|(x_1, x_2)\|^p = |x_1|^p + |x_2|^p \\ &= |f(e_1)|^{qp-p} + |f(e_2)|^{qp-p} = |f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \left| \frac{1}{\|(x_1, x_2)\|} f(x_1, x_2) \right| = \frac{1}{\|(x_1, x_2)\|}(|f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q) \\ &= \|(x_1, x_2)\|^{p-1}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $\|f\|^q \geq \|(x_1, x_2)\|^{pq-q} = \|(x_1, x_2)\|^p = |f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q$. Por tanto podemos afirmar que $\|f\| = (|f(e_1)|^q + |f(e_2)|^q)^{1/q}$. Si consideremos ahora la aplicación $S : (\mathbb{R}^2, \| \|_p)^* \to (\mathbb{R}^2, \| \|_q)$ definida por $S(f) = (f(e_1), f(e_2))$ es sencillo probar que S es una isometría lineal biyectiva.

Análogamente tendremos que la aplicación $S' : (\mathbb{R}^2, \| \|_q)^* \to (\mathbb{R}^2, \| \|_p)$ definida por $S'(f) = (f(e_1), f(e_2))$ es una isometría lineal biyectiva. Observemos que para cada $f \in (\mathbb{R}^2, \| \|_q)^*$ existirá un único vector (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^2$ de modo que $f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$ si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demostraremos directamente que $(\mathbb{R}^2, \| \|_p)$ es reflexivo. Sea φ un elemento de $(\mathbb{R}^2, \| \|_p)^*$ es decir sea $\varphi : (\mathbb{R}^2, \| \|_p)^* \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal; tenemos que φS^{-1} es una aplicación lineal de $(\mathbb{R}^2, \| \|_q)$ en $\mathbb{R}$ y por tanto existe un único $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ de modo que si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ es $(\varphi S^{-1})(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2$. Veremos que $\varphi = \hat{a}$; es decir que φ coincide con la aplicación $\hat{a} : (\mathbb{R}^2, \| \|_p)^* \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{a}(f) = f(a_1, a_2)$. En efecto, si $f \in (\mathbb{R}^2, \| \|_p)^*$ tenemos que $f = S^{-1}(f(e_1), f(e_2))$ y será $\varphi(f) = (\varphi S^{-1})(f(e_1), f(e_2)) = a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2) = f(a_1, a_2) = \hat{a}(f)$.

Es sencillo entender que todo lo que aquí se ha hecho para $\mathbb{R}^2$ es válido en el caso $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = R$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) donde $n \in \mathbb{N}$; esto es sólo cuestión de puntos suspensivos... Es también claro que cualquier espacio normado de dimensión finita será reflexivo.

TEOREMA 5.5.2 *El dual de l_1 es linealmente isométrico a l_∞.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación $T : l_1^* \to l_\infty$ definida por $Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Demostraremos que T está bien definida y que es una isometría lineal biyectiva. T está bien definida ya que si $f \in l_1^*$ es $\sup\{|f(e_n)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|f\|$, es evidente que T es lineal y que $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|$, por tanto T es continua.

Sean $f \in l_1^*$ y $x \in l_1$; tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$ y por tanto será $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(Tf)(n)x(n)$. Por consiguiente,

$$|f(x)| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(e_n)|) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \|Tf\|_\infty \|x\|$$

y deducimos que $\|f\| \leq \|Tf\|_\infty$ y será $\|Tf\|_\infty = \|f\|$.

Veamos que T es sobreyectiva. Sea $y \in l_\infty$ y sea $f : l_1 \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)$. Esta aplicación está bien definida ya que si $N \in \mathbb{N}$ es $\sum_{i=1}^{N} |y(i)x(i)| \leq \|y\| \sum_{i=1}^{N} |x(i)| \leq \|y\| \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|$. Es evidente que f es lineal y que $|f(x)| \leq \|y\|\|x\|$; así pues $f \in l_1^*$ y claramente $Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = y$.

Observemos que la aplicación inversa, $T^{-1} : l_\infty \to l_1^*$, de T está definida de la siguiente forma: si $y \in l_\infty$ entonces $T^{-1}y$ es la aplicación de l_1 en $\mathbb{K}$ definida por $(T^{-1}y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)$; es claro que

$$T(T^{-1}y) = ((T^{-1}y)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} = y$$

y que T^{-1} es isometría lineal biyectiva.

Observemos que l_1 *es un ejemplo de espacio separable que tiene dual no separable.* ∎

TEOREMA 5.5.3 *El dual de c_0 es linealmente isométrico a l_1.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación $T : c_0^* \to l_\infty$ definida por $T(f) = (f(e_n))_{\alpha\in\mathbb{N}}$. Demostraremos que T está bien definida y que es una isometría lineal biyectiva.

Sea $f \in c_0^* - \{0\}$ y veamos que $Tf \in l_1$. Observemos que si $x \in c_0$ tenemos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$ y $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)x(n)$. Fijemos $N \in \mathbb{N}$ y sea $x_N \in c_0$ el elemento definido por $x_N(i) = 0$ si $i > N$, $x_N(i) = 0$ si $i \le N$ y $f(e_i) = 0$, y $x_N(i) = \frac{|f(e_i)|}{f(e_i)}$ si $i \le N$ y $f(e_i) \neq 0$. Tenemos que $f(x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_N(i)f(e_i) = \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|$ y, como $f(x_N) \le |f(x_N)| \le \|f\|$, deducimos que para cada $N \in \mathbb{N}$ es $\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)| \le \|f\|$. Por tanto $Tf \in l_1$. Es claro que T es lineal y que $\|Tf\| \le \|f\|$, de donde se sigue que T es también continua.

Por otra parte, si $x \in c_0$ es $|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n)\right| \le \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| = \|x\|\|Tf\|$. Por tanto, $\|f\| \le \|Tf\|$ y $\|Tf\| = \|f\|$.

Veamos que f es sobreyectiva, sea $y \in l_1$ y consideremos la aplicación $f : c_0 \to \mathbb{K}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)$. Tenemos que f es lineal y que $|f(x)| \le \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \|x\|\|y\|$. Claramente, se verifica que

$$Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} = y.$$

Observemos que la aplicación inversa, $T^{-1} : l_1 \to c_0^*$, de T está definida de la siguiente forma: si $y \in l_1$ entonces $T^{-1}y$ es la aplicación de c_0 en $\mathbb{K}$ definida por $(T^{-1}y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n)$. Es claro que $T(T^{-1}y) = ((T^{-1}y)(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} = y$. ∎

NOTA 5.5.4 1.- De los teoremas anteriores también se deduce que l_1 y l_∞ son completos ya que son linealmente isométricos a un espacio dual.

2.- *El espacio c_0 no tiene copia de l_1.* En efecto, supongamos que existen un subespacio cerrado E de c_0 y un isomorfismo, $T : l_1 \to E \subset c_0$, de l_1 sobre E. Tenemos que la correspondiente aplicación dual $T^* : c_0^* \to l_1^*$ será lineal continua y abierta (ya que T es inyectiva). Por tanto, como c_0^* es separable, deducimos que l_1^* es separable y por tanto que l_∞ es separable, lo cual es falso. Más adelante se probará que l_1 no tiene copia de c_0.

3.- Sabemos que si X^* es separable entonces también X es separable, por tanto podemos deducir que l_∞^* *no es separable.* Como c_0^{**} es linealmente isométrico a l_∞

tenemos que c_0 *no es reflexivo.* Como l_1^{**} es linealmente isométrico a l_∞^* tenemos que l_1 *no es reflexivo.* Tenemos que l_∞ *no es reflexivo*, ya que c_0 es un subespacio cerrado de l_∞ que no es reflexivo.

4.- Si $f : l_\infty \to \mathbb{K}$ es una aplicación lineal y continua demostraremos que entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq \|f\|$. En efecto, consideremos $f' = f_{c_0}$. Hemos visto que $\|f'\| = \sum_{n=1}^{\infty} |f'(e_n)|$; por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} |f'(e_n)| = \|f'\| \leq \|f\|$.

Supongamos que $y \in l_\infty \backslash c_0$, por el teorema de Hahn-Banach, tenemos que existe $f \in B_{l_\infty^*}$ tal que $f(c_0) = \{0\}$ y $f(y) \neq 0$. Por tanto, existe $f \in l_\infty^*$ tal que $f \neq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| = 0$.

Si $f \in (l_1)^*$ o $f \in (c_0)^*$ tenemos que la aplicación f y su norma quedan totalmente determinadas por la sucesión $(f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Sin embargo, según lo que acabamos de ver, no podemos afirmar lo mismo si $f \in l_\infty$.

Es claro que para cada $y \in l_1$ podemos definir la aplicación $f : l_\infty \to \mathbb{K}$ por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$, si $x \in l_\infty$. Tenemos que f es lineal y continua con $\|f\| = \|y\|$.

Además $y = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y realmente es $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)f(e_i)$ si $x \in l_\infty$. Sin embargo, acabamos de observar que no todo elemento de $(l_\infty)^*$ es de esta forma.

Nos queda pendiente, por tanto, la identificación del dual de l_∞.

5.- Sean X, Y dos espacios normados. Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua y abierta. Hemos demostrado anteriormente que si X^* es separable entonces Y^* también es separable. Veremos ahora que este resultado no es cierto sin la hipótesis de ser abierta. Sea $T : c_0 \to l_1$ la aplicación definida por $Tx = (\frac{1}{2^n}x(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es evidente que T está bien definida, es lineal y $\|Tx\| \leq \|x\|$. Sea $Y = Tc_0$, tenemos que $T : c_0 \to Y$ es lineal continua y sobreyectiva; como $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ deducimos que Y es denso en l_1 y por tanto que Y^* es isomórfico a l_1^* Por consiguiente, Y^* no es separable mientras que c_0^* si es separable (es claro que la aplicación $T : c_0 \to Y$ no puede ser abierta).

6.- Consideremos la isometría lineal y biyectiva $T : c_0^* \to l_1$ que anteriormente estudiamos; tenemos que la correspondiente aplicación dual $T^* : l_\infty \equiv l_1^* \to c_0^{**}$ es también una isometría lineal biyectiva. Consideremos la inclusión natural, $j : c_0 \to c_0^{**}, j(x) = \hat{x}$. Vamos a probar que si $x \in c_0$ entonces $T^*x = jx = \hat{x}$. En efecto, si $x \in l_\infty$ tenemos que T^*x es la aplicación de c_0^* en $\mathbb{K}$ definida para $f \in c_0^*$ por $T^*x(f) = x(Tf^*) = x(f(e_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n)$, pero si $x \in c_0$ este resultado coincide con $f(\sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n) = f(x) = \hat{x}(f)$; así pues, si $x \in c_0$ es $T^*x = \hat{x}$.

TEOREMA 5.5.5 *El espacio dual de c es linealmente isométrico a l_1.*

DEMOSTRACIÓN No haremos uso del hecho de que c_0 y c son isomórficos ni de que el dual de c_0 es linealmente isométrico a l_1. Nuestra intención es construir, como en casos anteriores, la correspondiente isometría lineal y sobreyectiva.

Si $y \in c$, denotaremos al límite de $y = (y(n))_{n\in\mathbb{N}}$ por $y(\infty)$. Definimos la aplicación $T : l_1 \to c^*$, para cada $x \in l_1$, de la siguiente forma. Consideremos la aplicación $Tx : c \to \mathbb{K}$ definida por $(Tx)(y) = x(1)y(\infty)+\sum_{i=1}^{\infty} x(i+1)y(i)$. Es claro que Tx es lineal y si $y \in B_c$ es $|(Tx)(y)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)| = \|x\|$; así pues, $Tx \in c^*$ y $\|Tx\| \leq \|x\|$. Es evidente que T es lineal y continua; probaremos que $\|Tx\| = \|x\|$ si $x \in l_1$.

Sea $x \in l_1$ tal que $x \neq 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x(i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos la sucesión y de escalares de la siguiente forma. Si $i \leq N-1$ y $x(i+1) \neq 0$ será $y(i) = \frac{|x(i+1)|}{x(i+1)}$, si $i \leq N-1$ y $x(i+1) = 0$ será $y(i) = 0$; si $i \geq N$ y $x(1) \neq 0$ será $y(i) = \frac{|x(1)|}{x(1)}$; si $i \geq N$ y $x(1) = 0$ será $y(i) = 0$. Es claro que $\|y\| = 1$ y que tenemos

$$(Tx)(y) = |x(1)| + |x(2)| + \cdots + |x(N)| + \sum_{i=N}^{\infty} x(i+1)y(i);$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
\|x\| = {} & |x(1)| + \cdots |x(N)| + \sum_{i=N}^{\infty} |x(i+1)| \leq |x(1)| + \cdots + |x(N)| + \tfrac{\varepsilon}{2} = \\
= {} & (Tx)(y) - \sum_{i=N}^{\infty} x(i+1)y(i) + \frac{\varepsilon}{2} = \\
= {} & |(Tx)(y) - \sum_{i=N}^{\infty} x(i+1)y(i) + \frac{\varepsilon}{2}| \leq \\
\leq {} & |(Tx)(y)| + |\sum_{i=N}^{\infty} x(i+1)y(i)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |(Tx)(y)| + \varepsilon \leq \|Tx\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente veremos que T es sobreyectiva. Sea $f : c \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua; probaremos que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(e_i)|$ es convergente y que, por tanto, también es convergente la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f(e_i)$. En efecto, fijamos $N \in \mathbb{N}$ y sea $x_N \in c$ definida de la siguiente forma. Si $i \leq \mathbb{N}$ y $f(e_i) \neq 0$ será $x_N(i) = \frac{|f(e_i)|}{f(e_i)}$, si $i \leq N$ y $f(e_i) = 0$

será $x_N(i) = 0$ y si $i > N$ será $x_N(i) = 0$. Tenemos que $f(x_N) = f(\sum_{i=1}^{N} x_N(i)e_i) = \sum_{i=1}^{N} x_N(i)f(e_i) = \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|$. Como $f(x_N) = |f(x_N)| \leq \|f\|\|x_N\| \leq \|f\|$, se tiene que $\sum_{i=1}^{N} |f(e_i)| \leq \|f\|$.

Sea x la sucesión de escalares definida por $x(1) = f(e) - \sum_{i=1}^{\infty} f(e_i)$ y $x(n+1) = f(e_n)$ si $n \in \mathbb{N}$; es claro que $x \in l_1$. Consideremos $y \in c$ y demostraremos que $f(y) = x(1)y(\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} x(i+1)y(i)$. En efecto, tenemos que $y = \sum_{i=1}^{\infty}(y(i) - y(\infty))e_i + y(\infty)e$. Por tanto $f(y) = \sum_{i=1}^{\infty}(y(i) - y(\infty))f(e_i) + y(\infty)f(e) = (f(e) - \sum_{i=1}^{\infty} f(e_i))y(\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} x(i+1)y(i)$, así pues $Tx = f$. ∎

TEOREMA 5.5.6 *Sea $p \in (1, +\infty)$ entonces el dual del espacio l_p es linealmente isométrico a l_q, donde $q \in (1, +\infty)$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

DEMOSTRACIÓN Definimos la aplicación $T : l_p^* \to l_q$ por $Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es conveniente observar que si $f \in l_p^*$ y $x \in l_p$ será $f(x) = f(\sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)f(e_n)$. Veremos primero que T está bien definida. Sea $f \in l_p^* \backslash \{0\}$ y fijamos $N \in \mathbb{N}$, sea $x_N \in l_p$ la sucesión definida por $x_N(i) = 0$ si $i > N$; si $i \leq N$ se toma $x_N(i)$ de forma que $x_N(i)f(e_i) = |f(e_i)|^q$ si $f(e_i) \neq 0$ y $x_N(i) = 0$ en otro caso. Claramente se cumple que

$$f(x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_N(i)f(e_i) = \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} &|x_N(i)|^p|f(e_i)|^p = |f(e_i)|^{qp}, \\ &|x_N(i)|^p = |f(e_i)|^{pq-p}, \\ &|x_N(i)|^p = |f(e_i)|^q. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(x_N) = (\|x_N\|)^p$ y

$$\|f\| \geq f(\frac{x_N}{\|x_N\|}) = \|x_N\|^{p-1},$$

$$\|f\|^q \geq \|x_N\|^{pq-p} = \|x_N\|^p = \sum_{i=1}^{N} |f(e_i)|^q.$$

Por consiguiente, $\sum_{i=1}^{\infty}|f(e_i)|^q < \infty$ y $Tf \in l_q$; además, $\|T_f\| \leq \|f\|$. Por otra parte, si $f \in l_p^*, x \in l_p$ y $N \in \mathbb{N}$ deducimos, de la desigualdad de Hölder, que

$$\sum_{i=1}^{N}|f(e_i)||x(i)| \leq (\sum_{i=1}^{N}|f(e_i)|^q)^{1/q}(\sum_{i=1}^{N}|x(i)|^p)^{1/p} \leq \|Tf\|\|x\|.$$

Por tanto $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|f(e_i)||x(i)| \leq \|Tf\| \cdot \|x\|$. Esto prueba que $\|f\| \leq \|Tf\|$ y será $\|Tf\| = \|f\|$.

Veamos que T es sobreyectiva, sea $y \in l_q$ y sea $f : l_p \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$. Si $N \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{N}|y(i)||x(i)| \leq (\sum_{i=1}^{N}|y(i)|^q)^{1/q}(\sum_{i=1}^{N}|x(i)|^p)^{1/p} \leq \|y\|\|x\|.$$

Así pues, f está bien definida, es claro que f es lineal y que es continua, además $Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}} = (y(n))_{n\in\mathbb{N}} = y$.

Observemos que ha quedado probado que si $x \in l_p, y \in l_q$ entonces se tiene $(x(n)y(n))_{n\in\mathbb{N}} \in l_1$. ∎

NOTA 5.5.7 Sean $p, q \in (1, +\infty)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Consideremos la isometría lineal y biyectiva $T : l_p^* \to l_q$ definida por $Tf = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que si $f \in l_p^*$ existe un único $y \in l_q$ ($y = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$) tal que la aplicación f es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$, si $x \in l_p$. La aplicación inversa de T es la isometría $R : l_q \to l_p^*$ definida de la siguiente forma: si $y \in l_q$ entonces Ry es el elemento de l_p^* definido por $(Ry)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$, si $x \in l_p$. Si consideramos la isometría lineal y biyectiva $T' : l_q^* \to l_p$ definida por $T'g = (g(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$, también podemos afirmar que si $g \in l_q^*$ existe un único $x = (g(e_n))_{n\in\mathbb{N}}) \in l_p$ tal que la aplicación g es de la forma $g(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$ si $y \in l_q$. La aplicación inversa de T' es la isometría $R' : l_p \to l_q^*$ definida de la siguiente forma: si $x \in l_p$ entonces $R'x$ es el elemento de l_q^* definido por $(R'x)(y) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$, para $y \in l_q$.

Demostraremos ahora que l_p es reflexivo. En efecto, sea $\varphi \in l_p^{**}$, tenemos que la aplicación $\varphi : l_p^* \to \mathbb{K}$ es lineal y continua. Por tanto la aplicación $\varphi R : l_q \to \mathbb{K}$ es lineal y continua, y existe un único $x \in l_p$ tal que $\varphi R(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$, si $y \in l_q$.

Probaremos que $\varphi = \hat{x}$. Sea $f \in l_p^*$, tenemos que $y = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de l_q tal que $Ry = f$. Se verifica

$$\varphi(f) = \varphi(Ry) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i) = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)f(e_i) = f(\sum_{i=1}^{\infty} x(i)e_i) = f(x) = \hat{x}(f).$$

Por tanto, $\varphi = \hat{x}$ y deducimos que l_p es reflexivo.

Observemos que $p = 2$ entonces su exponente conjugado es $q = 2$; por tanto, l_2 es isométrico a su dual (cuando estudiaremos los espacios de Hilbert veremos que l_2 es de Hilbert y que los espacios de Hilbert tienen esta propiedad).

Finalmente, si $p \in (1, +\infty)$ entonces l_p no tiene copia de l_1 ya que l_p tiene como dual a l_q que es separable, por tanto todo subespacio de l_p también tendrá dual separable. Sin embargo, el dual de l_1 es l_∞, que no es separable.

5.6 Dualidad entre los espacios $L^p(\mu)$

5.6.1 El dual de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < +\infty$

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $p \in [1, \infty]$. Sea q el exponente conjugado de p (es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). La desigualdad de Hölder prueba que si $g \in L^q(\mu)$ y $\phi_g : L^p(\mu) \to \mathbb{R}$ está definida, para $f \in L^p(\mu)$, por

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f \cdot g d\mu \tag{5.6.1}$$

entonces ϕ_g es una forma lineal continua con norma menor o igual que $\|g\|_q$. La cuestión que se plantea es saber si **todas** las formas lineales continuas sobre $L^p(\mu)$ son de la forma anterior y si la representación (5.6.1) es única.

Para el caso $p = +\infty$ la respuesta a la cuestión anterior es negativa. Salvo casos triviales $L^1(\mu)$ no constituye el conjunto de todas las formas funcionales continuas sobre $L^\infty(\mu)$. Sin embargo, para $1 \leq p < +\infty$ la respuesta a dicha cuestión es afirmativa. Para probar esta afirmación comenzaremos con el caso en que $p \in]1, \infty[$. La demostración que presentamos no es la más corta que existe en la literatura; sin embargo presenta la ventaja de su carácter constructivo.

TEOREMA 5.6.1 **[Teorema de Frechet-Riesz]**

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida, sea $p \in]1, \infty[$ y sea q el exponente conjugado de p. Se verifica que $(L^p(\mu))^*$ es isométricamente isomorfo a $L^q(\mu)$ bajo la correspondencia $g \in L^q(\mu) \mapsto \phi_g$ definida por

$$\phi_g(f) = \int_\Omega g d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN

Debemos probar que si $\phi \in (L^p(\mu))^*$ entonces existe alguna $g \in L^q(\mu)$ tal que $\phi = \phi_g$ y tal que $\|\phi\|_{(L^p(\mu))^*} = \|g\|_q$.

Comenzaremos con el caso en que $\mu(\Omega) < +\infty$.

Definamos la aplicación $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ por medio de $\nu(E) = \phi(\chi_E)$. Veamos que ν es una medida compleja en (Ω, Σ). Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección disjunta de elementos de Σ y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ entonces $\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$, puntualmente y en $L^p(\mu)$, por ser $\mu(\Omega) < \infty$. Por la linealidad y continuidad de ϕ podemos escribir:

$$\nu(A) = \phi(\chi_A) = \phi(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(\chi_{A_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Esto prueba que ν es una medida compleja.

Si $E \in \Sigma$ es tal que $\mu(E) = 0$ entonces por la continuidad de ϕ,

$$|\nu(E)| = |\phi(\chi_E)| \leq \left(\int_\Omega \chi_E^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \|\phi\| = 0.$$

Esto prueba que ν es una medida absolutamente continua respecto a μ.

Por el Teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible g tal que $\nu(E) = \int_E g d\mu$ para cada $E \in \Sigma$. Esto prueba que $\phi(\chi_E) = \int_\Omega \chi_E \cdot g d\mu$. Por linealidad se sigue que para cada función simple s se verifica que $\phi(s) = \int_\Omega s \cdot g d\mu$.

Supongamos, por un momento, probado que $g \in L^q(\mu)$. Tendríamos entonces que las formas lineales continuas ϕ y ϕ_g coinciden en el espacio de las funciones simples. Como este espacio es denso en $L^p(\mu)$, la continuidad de esas formas lineales implicaría que $\phi = \phi_g$ en todo $L^p(\mu)$.

Para completar la demostración en el caso $\mu(\Omega) < \infty$ queda por probar que efectivamente $g \in L^q(\mu)$ y que $\|\phi\| = \|g\|_q$.

Sea $M > 0$ y denotemos $A_0 = \{x \in \Omega : |g(x)| \leq M\}$. El conjunto A_0 es medible. sea $h : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible acotada que se anula fuera de A_0. Sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que se anulan fuera de A_0 y tal que $\{s_n\}$ converge uniformemente hacia h, con lo cual también se cumple que $\lim_{n\to\infty} \|h - s_n\|_p = 0$, por ser $\mu(\Omega) < +\infty$. Por la continuidad de ϕ se sigue que $\lim_{n\to\infty} \phi(s_n) = \phi(h)$. La sucesión $\{s_n g\}$ es puntualmente convergente y es uniformemente acotada. Por el teorema de la convergencia dominada, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n g d\mu = \int_\Omega h g d\mu$. En otras palabras, $\phi(h) = \int_\Omega h g d\mu$ cuando h es una función medible y acotada nula fuera de A_0.

Definamos

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{|g(x)|^q}{g(x)}, & g(x) \neq 0, \\ 0, & g(x) = 0. \end{cases}$$

Se verifica que $\phi(h_0 \chi_{A_0}) = \int_{A_0} h_0 g d\mu = \int_{A_0} |g|^q d\mu$. Teniendo en cuenta que $|h_0| = |g|^{q-1}$, tenemos que $|h_0|^p = |g|^{qp-p} = |g|^q$. En consecuencia,

$$\|h_0 \chi_{A_0}\|_p = \left[\int_{A_0} |g|^q d\mu\right]^{1/p}.$$

y por tanto,

$$\int_{A_0} |g|^q d\mu = |\phi(h_0\chi_{A_0})| \leq \|\phi\| \cdot \left[\int_{A_0} |h_0|^p d\mu\right]^{1/p} = \leq \|\phi\| \left[\int_{A_0} |g|^q d\mu\right]^{1/p}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, de la desigualdad anterior se deduce que $\|g\chi_{A_0}\|_q \leq \|\phi\|$, siendo esta cota independiente del $M > 0$ elegido. Tomando límites para una sucesión $M_n \to \infty$, del teorema de la convergencia monótona se deduce que $\|g\|_q \leq \|\phi\|$. Con esto se concluye la demostración en el caso $\mu(\Omega) < +\infty$.

Supongamos ahora que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida arbitrario y sea $E \in \Sigma$. Denotemos por $L^p_E(\mu)$ el subespacio de $L^p(\mu)$ de las funciones nulas fuera de E. Este espacio puede ser identificado con $L^p(E, \Sigma_E, \mu_{|\sigma_E})$.

Si $\mu(E) < +\infty$, la discusión anterior prueba que existe una función $g_E \in L^q(E, \Sigma_E, \mu_{|\Sigma_E})$ tal que $\phi(f) = \int_E f g_E d\mu_E$ para cada $f \in L^p_E(\mu)$. Esta función está definida salvo un conjunto de medida nula. Esto significa, en particular, que si E y F tienen medida finita entonces g_E coincide en casi todo $E \cap F$ con g_F.

Para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < +\infty$ se verifica que

$$\|g_E\|_q = \|\phi_{|L^p_E}\| \leq \|\phi\|.$$

Por tanto,

$$a = \sup\{\|g_E\|_q : E \in \Sigma, \mu(E) < +\infty\} \leq \|\phi\|.$$

Podemos construir una sucesión creciente $\{A_n\}$ de conjuntos medibles, con $\mu(A_n) < +\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|g_{A_n}\|_q = a$.

Denotemos $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y sea $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$ la aplicación definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} g_{A_n}(x), & x \in A_n, \\ 0, & x \in \Omega \setminus A_n. \end{cases}$$

Dado que si $n > m$ entonces g_n coincide en casi todo A_m con g_m podemos escribir $\int_\Omega |g_n - g_m|^q d\mu = \int_\Omega |g_n|^q d\mu - \int_\Omega |g_m|^q d\mu$. Esto prueba que la sucesión $\{g_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^q(\mu)$. Como $L^q(\mu)$ es completo, dicha sucesión converge hacia algún elemento $g \in L^q(\mu)$.

Supongamos que $f \in L^p(\mu)$ se anula fuera de algún A_m. En este caso $fg_n = fg_m$ para cada $n > m$ por tanto, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f g_n = \int_\Omega f g d\mu$. Esto prueba que $\phi_g(f) = \phi(f)$ para este tipo de funciones f. Por continuidad ϕ_g y ϕ coinciden en las funciones $f \in L^p(\mu)$ que se anulan fuera de A. Como g se anula en casi todo el conjunto $\Omega \setminus A$ el teorema quedaría demostrado si probamos que ϕ se anula en $L^p_{\Omega\setminus A}$.

En efecto, supongamos que $f \in L^p(\mu)$ es nula en A y que $\phi(f) \neq 0$. Como f es nula fuera de un conjunto σ-finito, sabemos que existe un $B \in \Sigma$ con $\mu(B) < +\infty$ tal que $B \cap A = \emptyset$ y tal que $\phi(f\chi_B) \neq 0$, con lo cual necesariamente $\|g_B\|_q > 0$. Por ser $\lim_{n\to\infty} \|g_{A_n}\|_q^q = a^p$, para n suficientemente grande,

$$\|g_{A_n \cup B}\|_q^q = \int_{A_n} |g_{A_n}|^q d\mu + \int_B |g_B|^q d\mu > a^q.$$

Esto es una contradicción y por tanto el teorema queda demostrado. ∎

Denotemos ahora por Φ_p el isomorfismo canónico existente entre $(L^p(\mu))^*$ y $L^q(\mu)$,

$$\Phi_p(\phi_g) = g, \qquad g \in L^q(\mu).$$

La aplicación dual $\Phi_p^* : (L^q(\mu))^* \to (L^p(\mu))^{**}$ es también una isometría y la composición $\Phi_p^* \circ \Phi_q^{-1}$ es una isometría natural entre $L^p(\mu)$ y $(L^p(\mu))^{**}$. Esto prueba que $L^p(\mu)$ *es un espacio reflexivo para* $1 < p < +\infty$.

Es costumbre identificar $(L^p(\mu))^*$ con $L^q(\mu)$ por medio de la aplicación Φ_p. La aplicación

$$(f, g) \in L^p(\mu) \times L^q(\mu) \mapsto \langle f, g\rangle = \int_\Omega fgd\mu$$

es bilineal.

En el caso $p = 2$ se tiene que $q = 2$, con lo cual puede identificarse $(L^2(\mu))^*$ con $L^2(\mu)$. La aplicación bilineal anterior tiene gran importancia en este contexto ya que la expresión

$$(f|g) = \langle f|\bar{g}\rangle = \int_\Omega f\bar{g}d\mu, \qquad f, g \in L^2(\mu)$$

define un producto escalar en $L^2(\mu)$.

Si observamos con detenimiento la primera parte de la demostración del teorema anterior, para el caso $\mu(\Omega) < \infty$ vemos en seguida que en este caso también puede identificarse $(L^1(\mu))^*$ con $L^\infty(\mu)$. Veremos más adelante que esta identificación no vale para espacios de medida arbitrarios. Sin embargo si es válida para el caso en que el espacio de medida sea σ-finito.

TEOREMA 5.6.2 *Si* (Ω, Σ, μ) *es una espacio de medida* σ*-finito entonces* $(L^1(\mu))^*$ *es isométricamente isomorfo a* $L^\infty(\mu)$ *bajo la correspondencia* $\phi_g \mapsto g$*, donde*

$$\phi_g(f) = \int_\Omega f \cdot gd\mu, \qquad f \in L^1(\mu), g \in L^\infty(\mu).$$

DEMOSTRACIÓN Si $g \in L^\infty(\mu)$ y $f \in L^1(\mu)$ entonces

$$\left|\int_\Omega f \cdot gd\mu\right| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Por tanto, $\|\phi_g\| \leq \|g\|_\infty$ y basta probar que para $\phi \in (L^1(\mu))^*$ existe una $g \in L^\infty(\mu)$ tal que $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$ y tal que $\phi = \phi_g$.

Sea $\{A_n\}$ una partición numerable de Ω formada por conjuntos de medida finita. Procediendo como en la primera parte de la demostración del teorema anterior, se prueba que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función g_n una función de $L^\infty_{E_n}(\mu_{|\Sigma_{A_n}})$ tal que $\|g_n\|_\infty \leq \|\phi\|$ y tal que $\phi(f) = \int_{A_n} fg_n d\mu$ para cada $f \in L^1_{A_n}(\mu)$.

Si $x \in \Omega$ entonces $x \in A_n$ para un único $n \in \mathbb{N}$. Definamos $g(x) = g_n(x)$. La función g así definida es medible y verifica que $\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$ y además $\phi(f) = \phi_g(f)$ si f se anula fuera de algún A_n. Por la continuidad de ϕ y de ϕ_g se sigue que $\phi = \phi_g$. ∎

La demostración anterior prueba que si (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida arbitrario y ϕ es una forma lineal continua en $L^1(\mu)$ entonces para cada $E \in \Sigma$

con $\mu(E) < +\infty$ existe una función g_E en E y tal que $\phi(f) = \phi_{g_E}(f)$ para cada $f \in L^1_E(\mu)$. La familia de las g_E está acotada para la norma $\|\cdot\|_\infty$. Además $g_E = g_F$ en casi todo $E \cap F$, para cada par $E, F \in \Sigma$. La σ-finitud del espacio de medida es una de las hipótesis posibles para las cuales es posible "juntar" las funciones.

Si se elimina la hipótesis de ser μ una medida σ-finita entonces el teorema anterior puede dejar de ser válido. Consideremos $\Omega = \mathbb{R}$, Σ el σ-álgebra de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son numerables o que sus complementarios son numerables y μ la medida que cuenta en Σ. El espacio $L^1(\mu)$ consiste de las funciones que son nulas fuera de un conjunto numerable. y satisfacen $\sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$. Para una función $f \in L^1(\mu)$, $\|f\|_1 = \sum_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Sea ahora $F : L^1(\mu) \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $F(f) = \sum_{x>0} f(x)$. Claramente F es una forma lineal sobre $L^1(\mu)$ y es inmediato comprobar que F es continua. Supongamos que existe una función $g \in L^\infty(\mu)$ tal que $F(f) = \int f \cdot g d\mu$ para cada $f \in L^1(\mu)$ Tomando $f = \chi_{\{x\}}$ se tiene que $F(f) = f(x) = 1$ y $\int f \cdot g d\mu = f(x)g(x) = g(x)$. Por tanto debe ser $g(x) = 1$ para $x > 0$. Es decir $g = \chi_{]0,\infty[}$. Sin embargo, esta función no es medible y por tanto, F no puede ser representada por una función de $L^\infty(\mu)$.

5.6.2 El dual de $L^\infty(\mu)$ y de $L^\infty_l(\mu)$

Antes de abordar el problema de la determinación de los duales de de $L^\infty(\mu)$ y de $L^\infty_l(\mu)$, incluimos algunos conceptos y resultados sobre medidas finitamente aditivas y de variación acotada, que no son habituales en los cursos de teoría de la medida.

5.6.2.1 Medidas finitamente aditivas de variación acotada

DEFINICIÓN 5.6.3 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Denotaremos por $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ el conjunto de las aplicaciones $\tau : \Sigma \to \mathbb{C}$ tales que*

1. *$\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$, si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$ (finitamente aditiva).*
2. *$\sup\{|\tau(A)| : A \in \Sigma\} < +\infty$ (acotada).*
3. *Si $A \in \Sigma$ es localmente μ-nulo entonces $\tau(A) = 0$ (τ es localmente μ-continua).*

El conjunto de las aplicaciones $\tau : \Sigma \to \mathbb{C}$ que verifican las condiciones 1,2 y

(3.') Si $A \in \Sigma$ y $\mu(A) = 0$ entonces $\tau(A) = 0$ (τ es μ-continua)

será denotado por $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Es inmediato comprobar que $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ son espacios vectoriales.

Si $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $A \in \Sigma$, la variación de τ en A es el número $|\tau|(A)$ definido por

$$|\tau|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\tau(A_i)| : \{A_1, \cdots, A_n\} \text{ partición de } A\}.$$

Si $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$, su variación se define de forma análoga.

Es sencillo comprobar, como se hizo para las medidas signadas o complejas, que si $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces $|\tau| \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ y lo correspondiente ocurre si $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

En cada caso la aplicación $\tau \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\|\tau\| = |\tau|(\Omega)$$

es una norma en el correspondiente espacio.

Es posible definir la integral de una función medible acotada respecto de un elemento de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ o de $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$. Para ello será fundamental el siguiente resultado.

LEMA 5.6.4 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea τ un elemento de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ o de $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$. Supongamos que $\{A_1, \cdots, A_m\}$ y $\{B_1, \cdots, B_n\}$ son dos particiones de Ω con elementos de Σ y que $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ y $g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k}$ son dos funciones simples. Se verifica que*

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tau(A_i) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau(B_k) \right| \leq \|\tau\| \cdot \|f - g\|_u,$$

donde $\|f - g\|_u = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \Omega\}$.

DEMOSTRACIÓN

Se verifica que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tau(A_i) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \tau(B_k) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_i - \beta_k) \tau(A_i \cap B_k) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_i - \beta_k| \cdot |\tau(A_i \cap B_k)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \|f - g\|_u \cdot |\tau(A_i \cap B_k)| \leq \|\tau\| \cdot \|f - g\|_u. \end{aligned}$$

Si $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$ es una función simple y τ es un elemento de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ o de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$, definimos la integral de s respecto de τ como el número

$$\int_\Omega s d\tau = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tau(A_i).$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función medible y acotada entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples tal que $\lim_{n \to \infty} \|f - s_n\|_u = 0$. Por el lema anterior se tiene que

$$\left| \int_\Omega s_p d\tau - \int_\Omega s_q d\tau \right| \leq \|s_p - s_q\|_u \cdot \|\tau\| \leq \|\tau\| \cdot \|f - s_p\|_u + \|\tau\| \cdot \|f - s_q\|_u.$$

De aquí se deduce inmediatamente que la sucesión numérica $\{\int_\Omega s_n d\tau\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Por tanto es convergente y podemos definir

$$\int_\Omega f d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n d\tau.$$

Usando el lema anterior puede probarse sin dificultad que la definición anterior es independiente de la sucesión $\{s_n\}$ que, convergiendo uniformemente hacia f, se elija. Por tanto la definición de integral es consistente y se comprueba inmediatamente que generaliza la noción de integral respecto a medidas complejas.

TEOREMA 5.6.5 **[Propiedades de la integral]**

A.- Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea τ un elemento de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ o de $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$. Supongamos que f y g son dos funciones medibles y acotadas y que $\alpha \in \mathbb{C}$. Se verifica:

1. $\int_\Omega (f+g) d\tau = \int_\Omega f d\tau + \int_\Omega g d\tau$.

2. $\int_\Omega (\alpha f) d\tau = \alpha \int_\Omega f d\tau$.

3. $|\int_\Omega f d\tau| \leq \int_\Omega |f| d|\tau|$.

B.- Si $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces se verifica

4. *Si $A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es un conjunto localmente μ-nulo entonces $\int_A f d\tau = 0$.*

C.- Si $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ entonces se verifica

4.' *Si $A = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ es un conjunto μ-nulo entonces $\int_A f d\tau = 0$.*

DEMOSTRACIÓN

La demostración de las tres primeras propiedades es inmediata. Para probar la cuarta, en el caso en que $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$, basta observar que

$$\left|\int_\Omega f d\tau\right| \leq \int_\Omega |f| d|\tau| = \int_\Omega \chi_A |f| d|\tau| + \int_\Omega \chi_{A^c} |f| d|\tau| \leq \|f\|_u |\tau|(A) + 0 = 0.$$

En el caso $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ la demostración es similar. ∎

Vamos ahora a extender la noción de integral respecto a una medida $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ a funciones de $L^\infty(\mu)$. Si $f \in L^\infty(\mu)$ entonces existe una función $g \in L^\infty(\mu)$ acotada y tal que $\|f - g\|_\infty = 0$ y $\|f\|_\infty = \|g\|_u$. Definimos entonces $\int_\Omega f d\tau = \int_\Omega g d\tau$. Es inmediato comprobar, usando la propiedad cuarta del teorema anterior que la noción de integral que se acaba de introducir es independiente de la función acotada g, con las propiedades anteriores, que se elija.

5.6.3 El dual de $L^\infty(\mu)$ y $L_l^\infty(\mu)$

TEOREMA 5.6.6 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida arbitrario y sea $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ (resp. $\tau \in \mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$). Sea $T_\tau : L^\infty(\mu) \to \mathbb{C}$ (resp. $T_\tau : L_l^\infty(\mu) \to \mathbb{C}$) la aplicación definida por $T_\tau(f) = \int_\Omega g d\tau$. Se verifica que $T_\tau \in (L^\infty(\mu))^*$ (resp. $T_\tau \in (L_l^\infty(\mu))^*$) y que $\|T_\tau\| = \|\tau\|$.*

DEMOSTRACIÓN

La demostración es idéntica en los dos casos que estamos considerando.

Sea $f \in L^\infty(\mu)$ y elijamos una función g medible y acotada tal que $\|f-g\|_\infty = 0$ y $\|f\|_\infty = \|g\|_u$. Se verifica que

$$|T_\tau(f)| = |\int_\Omega f d\tau| = |\int g d\tau| \leq \int_\Omega |g| d|\tau| \leq \|g\|_u \|\tau\| = \|f\|_\infty \|\tau\|.$$

Esto prueba que $T_\tau \in (L^\infty(\mu))^*$ y que $\|T_\tau\| \leq \|\tau\|$.

Para probar la igualdad, sea $\epsilon > 0$ y sea $\{A_1, \cdots, A_n\}$ una partición de Ω tal que

$$\|\tau\| - \epsilon < \sum_{i=1}^n |\tau(A_i)|.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ sea $\alpha_i = \exp\,(-i\arg(\tau(A_i)))$ y sea $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$. Claramente se verifica que $f \in L^\infty(\mu)$ y que $\|f\|_\infty = \|f\|_u = 1$. Se verifica que

$$|T_\tau(f)| = |\int_\Omega f d\tau| = |\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau(A_i)| = \sum_{i=1}^n |\tau(A_i)| \geq \|\tau\| - \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, se verifica que $\|T_\tau\| = \|\tau\|$. ∎

El resultado recíproco del teorema anterior también se cumple: cada funcional lineal y continua en $L^\infty(\mu)$ o en $L_l^\infty(\mu)$ es la integral respecto de una medida finitamente aditiva.

TEOREMA 5.6.7 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $T \in (L^\infty(\mu))^*$ (resp. $T \in (L_l^\infty(\mu))^*$). Existe un $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ (resp. $\tau \in \mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$) tal que $T = T_\tau$.*

DEMOSTRACIÓN

Para cada $A \in \Sigma$ definamos, en ambos casos, $\tau(A) = T(\chi_A)$. Veamos que así queda definido un elemento de $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ o de $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

1. $\sup\{|\tau(A)| : A \in \Sigma\} \leq \sup\{|T(f)| : f \in L^\infty(\mu), \|f\|_\infty \leq 1\} = \|T\|$.

2. Si $A, B \in \Sigma$ y $A \cap B = \emptyset$, se verifica que

$$\tau(A \cup B) = T(\chi_{A\cup B}) = T(\chi_A + \chi_B) = T(\chi_A) + T(\chi_B).$$

3. Si $T \in L^\infty(\mu)$ y $A \in \Sigma$ es μ-nulo entonces χ_A es una función nula de $L^\infty(\mu)$. Por tanto, $\tau(A) = T(\chi_A) = T(0) = 0$.

4. Si $T \in L_l^\infty(\mu)$ y $A \in \Sigma$ es localmente μ-nulo entonces χ_A es una función nula de $L_l^\infty(\mu)$. Por tanto, $\tau(A) = T(\chi_A) = T(0) = 0$.

Sea ahora $f \in L^\infty(\mu)$ (resp. $f \in L_l^\infty(\mu)$) y tomemos una función $g \in L^\infty(\mu)$ (resp $g \in L^\infty(\mu)$) medible y acotada tal que $\|f-g\|_\infty = 0$ (resp. $\|f-g\|_{\infty,l} = 0$) y $\|f\|_\infty = \|g\|_u$ (resp. $\|f\|_{\infty,l} = \|g\|_u$. Elijamos una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que converja uniformemente hacia g. Por ser $\|T_\tau\| \leq \|\tau\|$ y por la linealidad de T, se tiene que $T(s_n) = \int_\Omega s_n d\tau$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} \|g-s_n\|_u = 0$, y T es continua,

$$T(f) = T(g) = \lim_{n\to\infty} T(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\tau = \int_\Omega f d\tau = \int_\Omega g d\tau = T_\tau(g),$$

en ambos casos. ■

COROLARIO 5.6.8 *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. La aplicación T de $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ y con valores en $(L^\infty(\mu))^*$ definida por $T(\tau) = T_\tau$ es una aplicación biyectiva e isométrica. Como consecuencia, $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ es un espacio de Banach y los espacios $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $(L^\infty(\mu))^*$ son isométricamente isomorfos. Análogamente los espacios $\mathcal{F}(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $(L_l^\infty(\mu))^*$ son también isométricamente isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN Ya hemos visto que T es una isometría y que T es sobreyectiva, de donde se sigue que T es inyectiva y preserva las sucesiones de Cauchy, por lo que, por ser $(L^\infty(\mu))^*$ un espacio completo, $\mathcal{F}_c(\Omega, \Sigma, \mu)$ también es completo. ■

Ejemplo 5.6.9 *En el caso en que Ω sea un conjunto arbitrario, no vacío, y μ la medida que cuenta entonces puede identificarse el espacio $\mathcal{B}(\Omega)$ de las funciones acotadas sobre Ω con $L^\infty(\mu)$, y se suele denotar $L^\infty(\mu) = l^\infty(\Omega)$. De esta forma el dual $(\mathcal{B}(\Omega))^* = (l^\infty(\Omega))^*$ se identifica con el espacio de las medidas finitamente aditivas y acotadas sobre $\mathcal{P}(\Omega)$.*

5.7 Dualidad y espacios cocientes

Empezaremos recordando conceptos que pudieran ser sobradamente conocidos. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea E un subespacio vectorial propio de X. Consideremos en X la relación xRy si y sólo si $x - y \in E$. Esta relación es de equivalencia en X y al correspondiente conjunto cociente se le denota por X/E. La clase de equivalencia definida por $x \in X$ es $x + E$. Se definen en X/E las operaciones $(x+E)+(y+E) = (x+y)+E$, $\alpha(x+E) = \alpha x + E$, para $\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X$). Tenemos que, con estas operaciones, X/E es un espacio vectorial que se denomina **espacio cociente de X por E**. El vector cero de X/E es E. Se denomina **aplicación canónica** a la aplicación $p : X \to X/E$ definida, en cada $x \in X$, por $p(x) = x + E$. Es claro que p es lineal y sobreyectiva; además $\ker p = E$.

Supongamos ahora que X es un espacio normado y sea E un subespacio vectorial de X. Definimos en, X/E,

$$\|x + E\| = d(x, E) = \inf\{\|x + e\| : e \in E\}$$

Si $x+E = x'+E$ es claro que $\{x+e : e \in E\} = \{x'+e : e \in E\}$ y $\|x+E\|$ está bien definido. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica que

$$\|\alpha x + E\| = \inf\{\|\alpha x + e\| : e + E\} = \inf\{|\alpha|\|x+e\| : e \in E\} = |\alpha|\|x+E\|.$$

Probaremos que si $x, y \in X$ entonces $\|(x+E)+(y+E)\| \leq \|x+E\| + \|y+E\|$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existen $e_1, e_2 \in E$ tales que $\|x+e_1\| \leq \|x+E\| + \varepsilon/2$ y $\|y+e_2\| \leq \|y+E\| + \varepsilon/2$, entonces

$$\|x+y+E\| \leq \|x+y+e_1+e_2\| \leq \|x+e_1\| + \|y+e_2\| \leq \|x+E\| + \|y+E\| + \varepsilon.$$

Es claro que $\|E\| = 0$; así pues, podemos afirmar que $\|x+E\|$ es una seminorma en X/E. Si $\|x+E\|$ fuese norma en E tendremos que si $x \in \mathrm{cl}(E)$ será $\|x+E\| = d(x,E) = 0$ y por tanto $x \in E$; así pues, sería E cerrado. Recíprocamente, si E es cerrado y $\|x+E\| = 0$ deducimos que $d(x,E) = 0$ y por tanto $x \in \mathrm{cl}(E) = E$, es decir $x+E = E$.

En lo sucesivo cuando se considere el espacio vectorial X/E supondremos que E es un subespacio cerrado propio. Por tanto X/E, con la norma dada por $\|x+E\|$, será un espacio normado. Este espacio normado se denomina **espacio normado cociente de X por E.**

Observemos que si $x \in X$ entonces $\|x\| = d(x, 0) \geq d(x,E) = \|x+E\|$. Vamos a probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un $y \in X$ tal que $x+E = y+E$ y $\|y\| \leq \|x+E\| + \varepsilon$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $z \in E$ tal que $\|x-z\| \leq d(x,E) + \varepsilon = \|x+E\| + \varepsilon$. Tomando $y = x - z$ se verifica que $x+E = y+E$ y que $\|y\| \leq \|x+E\| + \varepsilon$.

TEOREMA 5.7.1 *Sean X un espacio normado y E un subespacio vectorial cerrado de X. La aplicación lineal canónica, $p : X \to X/E$, es continua y abierta; además $\|p\| = 1$. Si X es completo entonces X/E es completo.*

DEMOSTRACIÓN

Si $x \in X$ tenemos que $\|p(x)\| = \|x+E\| \leq \|x\|$ y por tanto p es continua y $\|p\| \leq 1$. Consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 1$ y sea $x+E \in X/E$ tal que $x+E \neq E$. Tenemos que existe $e \in E$ tal que $\|x+e\| < \alpha\|x+E\|$. Si $z = x+e$ será $p(z) = x+E$ y $\|z\| < \alpha\|p(z)\|$; esto prueba que p es abierta y, por tanto, que si X es completo entonces X/E es completo.

Veamos que $\|p\| = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ y $x+E \in X/E$ con $\|x+E\| = 1$. Tenemos que existe $e \in E$ tal que $1 \leq \|x+e\| < 1+\varepsilon$ y será $\|p\| \geq \|p\left(\frac{x+e}{\|x+e\|}\right)\| = \frac{1}{\|x+e\|}\|p(x+e)\| > \frac{1}{1+\varepsilon}\|x+E\| = \frac{1}{1+\varepsilon}$.

(Otra forma de probar esto mismo es la siguiente: para cada $\theta \in (0,1)$ tenemos, por el teorema de Riesz, que existe $x \in S_x$ tal que $d(x,E) \geq \theta$, entonces $\|p\| \geq \|p(x)\| = \|x+E\| \geq \theta$). •

NOTA 5.7.2

1) Vamos a recordar el concepto de topología cociente. Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en X. Consideremos el conjunto cociente $X/\mathcal{R}$ y la aplicación canónica $p : X \to X/\mathcal{R}$. La topología cociente en

$X/\mathcal{R}$ se denota por $T/\mathcal{R}$ y está definida por $T/\mathcal{R} = \{A \subset X/\mathcal{R} : p^{-1}(A) \in T\}$. Es sencillo comprobar que $T/\mathcal{R}$ es efectivamente una topología en $X/\mathcal{R}$ y que además es la mayor topología (la más fina) que podemos definir en $X/\mathcal{R}$ de modo que p sea continua.

Supongamos ahora que X es normado y sea T la topología que induce la norma en X. Denotaremos por T/E a la correspondiente topología cociente en X/E. Sea T' la topología que induce en X/E la norma $\|x + E\|$. Demostraremos que $T/E = T'$. Como la aplicación $p : (X, T) \to (X/E, T')$ es continua, deducimos que $T' \subset T/E$. Sea $A \in T/E$; tenemos que, como p es sobreyectiva, $A = p(p^{-1}(A))$. Como $p^{-1}(A) \in T$ y $p : (X, T) \to (X/E, T')$ es abierta, resulta $A \in T'$.

2) Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Denotaremos, como es usual, por $\overline{T}$ a la aplicación de $X/\ker T$ en Y definida por $\overline{T}(X + E) = T(x)$. Es bien conocido que esta aplicación es lineal e inyectiva; además $T = \overline{T} \cdot p$.

Teorema 5.7.3 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Consideremos la aplicación lineal $\overline{T} : X/\ker T \to Y$. Se verifica:*

i.- $\overline{T}$ es continua y $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

ii.- Si T es abierta entonces $\overline{T}$ es isomorfismo.

iii.- Si $TB_X = B_Y$ (será T abierta) entonces $\overline{T}$ es isometría lineal biyectiva.

Demostración Sea $F = \ker T$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x + F \in B_{X/F}$, entonces existe $e \in F$ tal que $\|x + e\| < \|x + F\| + \varepsilon \leq 1 + \varepsilon$ y será $\|\overline{T}(x + F)\| = \|T(x)\| = \|T(x + e)\| \leq (1 + \varepsilon)\|T\|$. Así pues, $\overline{T}$ es continua y $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$. Como $\overline{T}$ y p son continuas y $T = \overline{T} \circ p$, será $\|T\| \leq \|\overline{T}\| \cdot \|p\| = \|\overline{T}\|$.

Supongamos que T es abierta, entonces $\overline{T}$ es biyectiva y existe $\alpha > 0$ tal que si $y \in Y$ podemos hallar $x \in X$ tal que $Tx = y$ y $\|x\| \leq \alpha\|y\|$. Entonces será $\overline{T}(x + F) = y$ y $\overline{T}^{-1}(y) = x + F$ y tenemos que $\|\overline{T}^{-1} y\| = \|x + F\| \leq \|x\| \leq \alpha\|y\|$. Por tanto, $\overline{T}^{-1}$ es continua.

Supongamos ahora que $TB_X = BY$ tendremos que $\|\overline{T}\| = \|T\| \leq 1$. Recordemos que si $\alpha B_Y \subset TB_X$ entonces la constante abierta puede tomarse como $\frac{1}{\alpha}$. Por tanto, en este caso, la constante abierta puede tomarse como 1. Por consiguiente, si $x + F \in X/F$ y $\|x + F\| = 1$ tenemos que para Tx existe $x' \in X$ tal que $Tx' = Tx$ (será $x' + F = x + F$) y $\|x'\| \leq \|Tx\|$. Se verifica entonces que $1 = \|x + F\| = \|x' + F\| \leq \|x'\| \leq \|Tx\| = \|\overline{T}(x + F)\| \leq 1$; por tanto, $\|\overline{T}(x + F)\| = 1$ y esto prueba que $\overline{T}$ es isometría. ∎

Teorema 5.7.4 *Sea X un espacio normado y sea E un subespacio vectorial de X entonces E^* es linealmente isométrico a X^*/E^0.*

Demostración Consideremos la aplicación $T : X^* \to E^*$ definida en cada $f \in X^*$ por $T(f) = f_E$. Sabemos que T es lineal continua y abierta, además $\ker T = E^0$.

Si $f \in B_{X^*}$ será $Tf \in B_{E^*}$. Si $g \in B_{E^*}$, por el teorema de Hahn-Banach podemos afirmar que existe $f \in B_{X^*}$ tal que $Tf = g$. Por tanto $TB_{X^*} = B_{E^*}$ y podemos afirmar que la aplicación $\overline{T} : X^*/E^0 \to E^*$ es una isometría lineal y biyectiva. ∎

TEOREMA 5.7.5 *Sea X un espacio normado y sea E un subespacio vectorial cerrado de X entonces $(X/E)^*$ es linealmente isométrico a E^0.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación canónica $p : X \to X/E$. Tenemos que p es lineal, continua y abierta. Sabemos que, entonces, la aplicación dual $p^* : (X/E)^* \to X^*$, es un isomorfismo de $(X/E)^*$ en $(\ker p)^0 = E^0$ y que $\|p^*\| = \|p\| = 1$. Sea $f \in (X/E)^*$; tenemos que $\|p^* f\| \leq \|f\|$.

Veamos la otra desigualdad. Sea $\varepsilon > 0$; existe $x + E \in B_{X/E}$ tal que $\|f\| - \varepsilon < |f(x+E)| = |f(p(x))|$ y también existe $e \in E$ tal que $\|x + e\| < (1+\varepsilon)\|x + E\| \leq 1 + \varepsilon$. Por tanto, $\|f\| - \varepsilon < |f(p(x))| = |f(p(x+e))| = |p^* f(x+e)| \leq (1+\varepsilon)\|p^* f\|$. Esto prueba que $\|p^* f\| = \|f\|$. ∎

5.8 Dualidad y espacios producto

En esta sección estudiaremos los espacios normados producto y la dualidad en estos espacios.

Sean X, Y dos espacios normados, recordemos que en el espacio vectorial producto las normas $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_p (p \geq 1)$ son todas equivalentes e inducen en $X \times Y$ la topología producto. Consideremos en $X \times Y$ cualquiera de estas normas. Sea $\varphi_1 : X \to X \times Y$ la aplicación definida por $\varphi_1(x) = (x, 0)$. Tenemos que φ_1 es una isometría lineal y por tanto que X es isométrico a $X \times \{0\}$, que es subespacio cerrado de $X \times Y$. De manera análoga deducimos que Y es isométrico a $\{0\} \times Y$. Tenemos que las aplicaciones proyección, $p_1 : X \times Y \to X$, $p_1(x,y) = x$, $p_2 : X \times Y \to Y, p_2(x,y) = y$ son continuas y abiertas. Cuando consideremos el producto de espacios vectoriales estaremos suponiendo, como es lógico, que el cuerpo de escalares es el mismo para cada uno de los espacios.

Es sencillo entender que los resultados que se pueden afirmar en el caso del producto de dos espacios normados son también ciertos para el caso del producto de cualquier número finito de espacios normados.

Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia no finita de espacios normados finito dimensionales. Consideremos el correspondiente espacio vectorial producto, $X = \prod_{i \in I} X_i$. Tenemos que X no es finito dimensional. Supongamos que $\|\cdot\|$ es una norma en X que induce en X la correspondiente topología producto. Consideremos para cada $i \in I$ la proyección $p_i : X \to X_i$. Tenemos que p_i es lineal continua y abierta y que $p_i(B_X) \subset \|p_i\| B_{X_i}$. Así pues, si $B = \prod_{i \in I} \|p_i\| B_{X_i}$ tenemos que $B_X \subset B$. Como B es compacto y B_X es cerrado deducimos que B_X es compacto. Esto no es posible para un espacio normado infinito dimensional.

Si los espacios X_i tienen dimensión arbitraria bastará considerar un subespacio finito dimensional de cada uno de ellos para deducir que el espacio vectorial producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ no puede ser normado.

TEOREMA 5.8.1 *Sean X, Y dos espacios normados, entonces $(X \times Y)^*$ es isomórfico a $X^* \times Y^*$. Este isomorfismo es una isometría si en $X \times Y$ se considera la norma $\|\cdot\|_\infty$ y en $X^* \times Y^*$ se utiliza la norma $\|\cdot\|_1$ [o bien al reves o también si en $X \times Y$ se toma la norma $\|\cdot\|_p$ con $p \in (1, +\infty)$ y en $X^* \times Y^*$ la norma $\|\cdot\|_q$ con $q \in (1, +\infty)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$].*

DEMOSTRACIÓN

Definimos la aplicación $\varphi : X^* \times Y^* \to (X \times Y)^*$, en cada $(f, g) \in X^* \times Y^*$, por $\varphi(f, g) = h$, donde h es la aplicación definida en cada (x, y) de $X \times Y$ por $h(x, y) = f(x) + g(y)$.

Es claro que h es lineal y que

$$|h(x, y)| \leq |f(x)| + |g(y)| \leq \|f\|\|x\| + \|g\|\|y\| \leq \|(x, y)\|_\infty(\|f\| + \|g\|).$$

Por tanto, h es continua y $\|h\| \leq \|f\| + \|g\| = \|(f, g)\|_1$.

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$ existen $x \in S_X, y \in S_Y$ tales que $f(x)$ y $g(x)$ son reales y $f(x) > \|f\| - \varepsilon/2$, $g(y) > \|g\| - \varepsilon/2$. Se verifica entonces que $\|(x, y)\|_\infty = 1$ y $\|h\| \geq |h(x, y)| = h(x, y) = f(x) + g(y) > \|f\| + \|g\| - \varepsilon$. Por tanto, $\|h\| = \|f\| + \|g\|$ y $\|\varphi(f, g)\| = \|(f, g)\|_1$. Es claro que φ es lineal y veremos que φ es sobreyectiva. Sea $h \in (X \times Y)^*$ y sean f, g las aplicaciones $f : X \to \mathbb{K}$, $f(x) = h(x, 0)$, $g : Y \to K$, $g(y) = h(0, y)$. Tenemos que f y g son lineales y que $|f(x)| = |h(x, 0)| \leq \|h\|\|x\|$ y $|g(y)| \leq \|h\|\|y\|$. Así pues, $f \in X^*$ $g \in Y^*$. Claramente, $\varphi(f, g) = h$, ya que si $(x, y) \in Y \times Y$ es $(\varphi(f, g))(x, y) = f(x) + g(y) = h(x, y)$.

Supongamos ahora que φ es la misma aplicación y que en $X \times Y$ se utiliza $\|\cdot\|_1$ y en $X^* \times Y^*$ se utiliza $\|\cdot\|_\infty$. Sean $(f, g) \in X^* \times Y^*$ y $\varphi(f, g) = h$. Si $(x, y) \in X \times Y$ es

$$\begin{aligned} |h(x, y)| &\leq |f(x)| + |g(y)| \leq \|f\|\|x\| + \|g\|\|y\| \\ &\leq \|(f, g)\|_\infty(\|x\| + \|y\|) = \|(f, g)\|_\infty\|(x, y)\|_1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|h\| \leq \|(f, g)\|_\infty$. Por otra parte, sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\|(f, g)\|_\infty = \|f\|$. Existe $x \in S_X$ tal que $f(x)$ es real y $f(x) > \|f\| - \varepsilon$. Se tiene entonces que $\|(x, 0)\|_1 = 1$ y $\|h\| \geq |h(x, 0)| = f(x) > \|f\| - \varepsilon = \|(f, g)\|_\infty - \varepsilon$. Así pues podemos afirmar que $\|h\| = \|(f, g)\|_\infty$. ∎

TEOREMA 5.8.2 *Sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 cuatro espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Si X_1, X_2 son isomórficos y Y_1, Y_2 son isomórficos entonces $X_1 \times Y_1$ es isomórfico a $X_2 \times Y_2$.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, sea $\varphi_1 : X_1 \to X_2$ una aplicación lineal y biyectiva tal que para ciertos $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0$ se verifica que $\alpha_1\|x\| \leq \|\varphi_1(x)\| \leq \beta_1\|x\|$, si $x \in X_1$. Sea $\varphi_2 : Y_1 \to Y_2$ una aplicación lineal y biyectiva tal que para ciertos $\alpha_2 > 0, \beta_2 > 0$ se verifica que $\alpha_2\|y\| \leq \|\varphi_2(y)\| \leq \beta_2\|y\|$, si $y \in Y_1$.

Consideremos la aplicación $h : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$ definida en cada $(x, y) \in X_1 \times Y_1$ por $h(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Es claro que φ es lineal y biyectiva. Sean $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2), \beta = \max(\beta_1, \beta_2)$. Si $(x, y) \in X_1 \times Y_1$ se verifica que

$$\begin{aligned}\alpha\|(x,y)\|_1 &= \alpha\|x\| + \alpha\|y\| \leq \alpha_1\|x\| + \alpha_2\|y\| \leq \|\varphi_1(x)\| + \|\varphi_1(y)\| \\ &= \|h(x,y)\|_1 \leq \beta_1\|x\| + \beta_2\|y\| \leq \beta\|(x,y)\|_1.\end{aligned}$$

Esto prueba que h es isomorfismo. ∎

Es evidente que el resultado anterior se puede generalizar a cualquier producto finito de espacios normados.

TEOREMA 5.8.3 *Si X es alguno de los espacios: $l_\infty, c, c_0, l_p (p \geq 1)$, entonces $X \times X$ es isomórfico a X.*

DEMOSTRACIÓN Veamos primero el caso $X = l_\infty$; el caso c_0 es similar. Consideremos la aplicación $\varphi : l_\infty \times l_\infty \to l_\infty$ definida por $\varphi(x, y) = z$, donde, para $n \in \mathbb{N}$, es $z(2n - 1) = x(n)$ y $z(2n) = y(n)$. Es claro que $\|\varphi(x, y)\| = \|(x, y)\|_\infty$ y que φ es lineal. Veamos que φ es sobreyectiva, sea $z \in l_\infty$ y sean $x, y \in l_\infty$ tales que $x(n) = z(2n - 1), y(n) = z(2n)$. Claramente se tiene que $\varphi(x, y) = z$.

Para el caso $X = l_p$ definimos la aplicación $\varphi : l_p \times l_p$ de igual manera y consideramos en $l_p \times l_p$ la norma $\|\cdot\|_p$.

Para el caso $X = c$ sólo hay que tener en cuenta que c es isomórfico a c_0. ∎

DEFINICIÓN 5.8.4 *Un espacio normado X se dice que es **estable** si $X \times \mathbb{K}$ es isomórfico a X.*

TEOREMA 5.8.5 *Los espacios l_∞, c_0, c y l_p,con $p \geq 1$, son estables.*

DEMOSTRACIÓN Estudiemos el caso de l_∞. Sea $\varphi : l_\infty \times \mathbb{K} \to l_\infty$ la aplicación definida por $\varphi(x, \lambda) = z$, donde $z(1) = \lambda$ y $z(n) = x(n-1)$ si $n > 1$. Tenemos que φ es lineal e inyectiva. Si $z \in l_\infty$ y (x, λ) es tal que $x(n) = z(n + 1)$, si $n \in \mathbb{N}$, y $\lambda = z(1)$, tenemos que $\varphi(x, \lambda) = z$. Por tanto, φ es biyectiva. Si consideramos en $l_\infty \times \mathbb{K}$ la norma $\|\cdot\|_\infty$, es evidente que $\|\varphi(x, \lambda)\| = \|(x, \lambda)\|_\infty$, si $(x, \lambda) \in l_\infty \times \mathbb{K}$.

Los casos c_0 y c son análogos al caso l_∞. Para el caso de l_p definimos la aplicación φ de igual manera. Si consideramos en $l_p \times \mathbb{K}$ la norma $\|\cdot\|_p$ podemos deducir que también φ es una isometría. ∎

NOTA 5.8.6

Sea X un espacio normado, el problema de cuando $X \times X$ o $X \times \mathbb{K}$ son isomórficos a X es un problema histórico que ya fue planteado por el propio Banach en el texto *"Théorie des opérations linéaires"* (1932). Si X es finito dimensional es claro que esto no es posible; Así pues, el problema se reduce a considerar los espacios X que sean infinito dimensionales. En su momento se probara que si $I = [0, 1]$ entonces $X = C(I)$ es isomórfico a $X \times X$ y a $X \times \mathbb{K}$.

El matemático R.C. James, en 1950, obtuvo un espacio de Banach X, de dimensión infinita, tal que $X \times X$ no es isomórfico a X (*"Bases and reflexivity of Banach Spaces"* Ann. of Math 52, 518-527). El espacio X que James obtiene

tiene la propiedad de que si consideramos la aplicación canónica $j : X \to X^{**}$ se verifica que $j(X) = \hat{X}$ es de codimensión 1 en X^{**}: es decir, existe $x^{**} \in X^{**}\backslash\hat{X}$ tal que $\hat{X} + \mathcal{L}(x^{**}) = X^{**}$. Si X fuese isomórfico a $X \times X$ sería X^* isomórfico a $(X \times X)^* \cong X^* \times X^*$. Por tanto, X^{**} sería isomórfico a $(X^* \times X^*)^* \cong X^{**} \times X^{**}$. Se puede demostrar que entonces existe un isomorfismo $T : X^{**} \to X^{**} \times X^{**}$ de modo que $T(\hat{X}) = \hat{X} \times \hat{X}$. Así pues, sería $\hat{X} \times \hat{X}$ de codimensión 1 en $X^{**} \times X^{**}$; sin embargo, en realidad es de codimensión dos. La cuestión relativa a $X \times \mathbb{K}$ es todavía más compleja, pero fue resuelta negativamente por Kalton en 1979. Gowers es un destacado matemático que ha obtenido importantes resultados en la década de los 90 en temas relacionados con los anteriormente citados.

TEOREMA 5.8.7 *Sea X un espacio normado y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Si $f \neq 0$ entonces X es isomórfico a* $\ker f \times \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $e \in X$ tal que $f(e) = 1$. Para cada $x \in X$ tenemos que $x - f(x)e \in \ker f$. Consideremos la aplicación $T : X \to \ker f$ definida en cada $x \in X$ por $Tx = x - f(x)e$. Es claro que T es lineal y que $\|Tx\| \leq \|x\| + \|f\|\|x\|\|e\| = \|x\|(1+\|f\|\|e\|)$, si $x \in X$. Consideremos la aplicación $T_1 : X \to \ker f \times \mathbb{K}$ definida, en cada $x \in X$, por $T_1 x = (Tx, f(x))$. Se tiene que T_1 es lineal y continua. Si $T_1 x = T_1 y$ se cumple $f(x) = f(y), T(x) = T(y)$. Por tanto, $x - f(x)e = y - f(y)e$ y será $x = y$, por lo que T_1 es inyectiva. Sea $(z, \alpha) \in \ker f \times \mathbb{K}$ y sea $x = z + \alpha e$; entonces, $f(x) = f(z) + \alpha f(e) = \alpha$ y $Tx = x - f(x)e = z + \alpha e - \alpha e = z$. Por tanto, $T_1 x = (z, \alpha)$ y tenemos que T_1 es biyectiva. La correspondiente aplicación inversa es $T_1^{-1} : \ker f \times \mathbb{K} \to X$, $T_1^{-1}(z, \alpha) = z + \alpha e$. Es sencillo comprobar que T_1^{-1} es continua (si $\lim(z_n, \alpha_n) = (z, \alpha)$ entonces $\lim(z_n + \alpha_n e) = z + \alpha e$). ∎

TEOREMA 5.8.8 *Sea X un espacio normado entonces X es estable si y sólo si X es isomórfico a cada uno de sus subespacios cerrados maximales.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que en un espacio normado los subespacios cerrados maximales son de la forma $F = \ker f$, con $f \in X^*$, y que son todos isomórficos entre sí. Si X es isomórfico a un subespacio cerrado maximal $F = \ker f, f \in X^*$, entonces $X \times \mathbb{K}$ es isomórfico a $F \times \mathbb{K}$, que es isomórfico a X.

Recíprocamente, si X es estable entonces existe un isomorfismo $T : X \times \mathbb{K} \to X$. Tenemos que X es isomórfico a $X \times \{0\}$; si $F = T(X \times \{0\})$ tenemos que la aplicación $T : X \times \{0\} \to F$ es también un isomorfismo. Probaremos que F es subespacio cerrado maximal de X. Consideremos la aplicación $f : X \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definida por $f(x, \alpha) = \alpha$. Es claro que $fT^{-1} \in X^*$ y que $F = \ker(fT^{-1})$. ∎

Tema 6

Topologías débiles en un espacio normado

6.1 La topología *-débil sobre el dual de un espacio normado

6.1.1 La topología *-débil. Propiedades fundamentales

Comenzamos recordando algunos conceptos que suponemos que ya han sido estudiados. Sea $\{Z_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos el espacio topológico producto $Z = \prod_{i\in I} Z_i$. Un entorno abierto de un elemento $(a_i)_{i\in I}$ de Z es un conjunto de la forma $\prod_{i\in I} M_i$ de modo que existe $J \subset I$ finito tal que si $i \in I\backslash J$ es $M_i = Z_i$ y si $i \in J$ es M_i un entorno abierto de a_i en Z_i.

Sea X un espacio normado y sea $\mathbb{K}$ el correspondiente cuerpo de escalares. Para cada $x \in X$ denotaremos por $\mathbb{K}_x$ a $\mathbb{K}$ con su topología usual. Consideremos el espacio topológico producto $\prod_{x\in X} \mathbb{K}_x$ y observemos que el conjunto $\prod_{x\in X} \mathbb{K}_x$ no es otro que $\mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ es aplicación}\}$. Por tanto tenemos que X^*, el dual de X, está contenido en $\mathbb{K}^X$. Podemos considerar en X^* la topología inducida de la de $\mathbb{K}^X$ esta topología es llamada **topología $*$-débil de X^*** y será también denotada por $\sigma(X)$ ó $\sigma(X^*, X)$ o bien T_{*-w}.

Sea $f_0 \in X^*$; un entorno de f_0 para la topología $*$-débil será un conjunto de la forma

$$U = \left(\prod_{x\in X} M_x\right) \cap X^*$$

de modo que existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tal que si $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ es $M_x = \mathbb{K}$ y si

$i \in \{1, \ldots, n\}$ es $M_{x_i} = U(f_0(x_i), \varepsilon_i)$, para ciertos $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_n > 0$. Por tanto,

$$U = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon_i, \text{ si } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Si $\varepsilon > 0$ es tal que $\varepsilon < \text{mín}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ es evidente que U contiene al conjunto

$$\begin{aligned}&\{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| \leq \varepsilon \; i \in \{1, \ldots, n\}\}\\ &\quad = \{f \in X^* : |f(\tfrac{1}{\varepsilon}x_i) - f_0(\tfrac{1}{\varepsilon}x_i)| \leq 1, i \in \{1, \ldots, n\}\},\end{aligned}$$

que será también entorno de f_0. Denotaremos

$$B(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| \leq \varepsilon \text{ si } i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

y denotaremos por $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ al conjunto que se obtiene al sustituir $\leq$ por $<$. Si $\varepsilon = 1$ denotaremos, respectivamente, estos conjuntos por $B(f_0; x_1, \ldots, x_n)$ y $U(f_0; x_1, \ldots, x_n)$.

Es sencillo entender que la familia

$$\{B(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) : \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$$

es una base de entornos de f_0 para la topología $*$-débil. Además, observemos que todos los conjuntos de esta familia son convexos. Es sencillo comprobar que la familia $\{B(f_0; x_1, \ldots, x_n) : \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, n \in \mathbb{N}\}$, es también una base de entornos de f_0 para T_{*-w}. Observemos que

$$B(0; x_1, \ldots, x_n) = \{f \in X^* : |f(x_i)| \leq 1 \text{ si } i \in \{1, \ldots, n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}^0.$$

Así pues, *en la topología $*$-débil los polares de los conjuntos finitos de X constituyen una base de entornos de cero en X^*.*

De las propiedades de la topología producto se deduce que el espacio (X^*, T_{*-w}) es regular y de Hausdorff. Si $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una red en X^* se verifica que $\lim\limits_{\alpha \in I} f_\alpha = f_0$ en T_{*-w} ($*$-$w \lim f_\alpha = f_0$ ó (f_α) es $*$-débil convergente a f_0) si y sólo si para cada $x \in X$ es $\lim\limits_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = f_0(x)$. Este hecho también se puede deducir directamente observando cómo son las bases de entornos en T_{*-w}.

Es sencillo comprobar que cada conjunto $B(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ es $*$-w cerrado y que cada conjunto $U(f_0; x_1, \ldots, x_n : \varepsilon)$ es $*$-w abierto.

Si A es un subconjunto de X entonces su polar: $A^0 = \{f \in X^* : |f(a)| \leq 1$ si $a \in A\}$ será $*$-w cerrado en X^* ya que $A^0 = \bigcap_{a \in A} B(0; a)$.

En ocasiones a la topología de la norma en X^* la denotaremos por $T_{\|\cdot\|}$ para distinguirla de la topología T_{*-w}.

Sea $f_0 \in X^*$ y consideremos la aplicación traslación,

$$\varphi : (X^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w}),$$

definida por $\varphi(f) = f + f_0$. Es sencillo ver que φ es un homeomorfismo. Análogamente, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\alpha \neq 0$ entonces la aplicación homotecia, $H : (X^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w}), H(f) = \alpha f$, es también un homeomorfismo. Finalmente, si $x \in X$ es claro que la aplicación $\hat{x} : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}, \hat{x}(f) = f(x)$, es lineal y continua.

TEOREMA 6.1.1 *Sea X un espacio normado entonces en X^* se verifica que $T_{*-w} \subset T_{\|\cdot\|}$. Como consecuencia, si A es un subconjunto de X^* tenemos que $cl_{\|\ \|}(A) \subset cl_{*-w}(A)$, $Int_{*-w}(A) \subset Int_{\|\ \|}(A)$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $A \subset X^*$ un conjunto $*$-w cerrado; probaremos que es cerrado en norma. En efecto, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A que converge en norma a f_0 tenemos que $\lim f_n(x) = f_0(x)$ si $x \in X$ y por tanto $*$-$w \lim f_n = f_0$; así pues $f_0 \in A$. Desde aquí podemos deducir ya que $T_{*-w} \subset T_{\|\cdot\|}$ pero lo razonaremos directamente. Sea $f_0 \in X^*$, todo entorno de f_0 en T_{*-w} contiene a cierto $U = U(f_0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) = \{f \in X^* : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon$ si $i \in \{1, \dots, n\}\} = \bigcap_{i=1}^n \hat{x}_i^{-1}(U(f_0(x_i), \varepsilon)))$. Como U es intersección de un número finito de elementos de $T_{\|\ \|}$ será $U \in T_{\|\ \|}$. ■

TEOREMA 6.1.2 *Sea X un espacio normado. La topología $*$-débil es una topología vectorial en X^*.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\{(f_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una red en $(X^*, T_{*-w}) \times (X^*, T_{*-w})$ que converge a (f_0, g_0). Tenemos que $*$-w $\lim_{\alpha\in I} f_\alpha = f_0$ y $*$-w $\lim_{\alpha\in I} g_\alpha = g_0$. Por consiguiente, si $x \in X$ es

$$\lim_{\alpha\in I}(f_\alpha + g_\alpha)(x) = \lim_{\alpha\in I} f_\alpha(x) + \lim_{\alpha\in I} g_\alpha(x) = f_0(x) + g_0(x) = (f_0 + g_0)(x).$$

Por tanto $*$-w $\lim_{\alpha\in I}(f_\alpha + g_\alpha) = f_0 + g_0$.

Sea $\{(t_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una red en $\mathbb{K} \times (X^*, T_{*-w})$ que converge a (t_0, f_0). Tenemos que $\lim_{\alpha\in I}(t_\alpha f_\alpha)(x) = \left(\lim_{\alpha\in I} t_\alpha\right)\left(\lim_{\alpha\in I} f_\alpha(x)\right) = t_0 f_0(x)$. ■

TEOREMA 6.1.3 *Sea X un espacio normado y consideremos la familia de aplicaciones $H = \{\hat{x} : X^* \to \mathbb{K} : x \in X\}$. La topología T_{*-w} de X^* coincide con la topología inicial T en X^* para la familia H.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $x \in X$ tenemos que la aplicación $\hat{x} : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ es continua y esto significa que $T \subset T_{*-w}$. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red en X^* que converge en (X^*, T) a cierto $f_0 \in X^*$. Para cada $x \in X$ será $\lim_{\alpha\in I} \hat{x}(f_\alpha) = \hat{x}(f_0)$ es decir $\lim_{\alpha\in I} f_\alpha(x) = f_0(x)$ y por tanto $\lim_{\alpha\in I} f_\alpha = f_0$ en (X^*, T_{*-w}). Desde aquí se deduce que si A es cerrado para T_{*-w} lo será para T y por tanto $T_{*-w} \subset T$. ■

NOTA 6.1.4 Sea X un espacio normado n-dimensional, sabemos que en X todas las normas son equivalentes. Fijamos en X una base $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ y si $x \in X$ denotamos por $(x(1), \dots, x(n))$ sus coordenadas respecto de B. Es sencillo comprobar que $\|x\| = |x(1)| + \cdots + |x(n)|$ es una norma en X. Sea $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x^0 \in X$. Si $\lim_{k\to\infty} x^k = x^0$, para la topología de la norma, entonces $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^0\| = 0$ y como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que

$$0 \leq |x^k(i) - x^0(i)| \leq \|x^k - x^0\|,$$

deducimos que $\lim_{k\to\infty} x^k(i) = x^0(i)$ si $i \in \{1,\dots,n\}$. Supongamos ahora que para cada $i \in \{1,\dots,n\}$ es $\lim_{k\to\infty} x^k(i) = x^0(i)$. Entonces,

$$\lim_{k\to\infty}\left[|x^k(1) - x^0(1)| + \dots + |x^k(n) - x^0(n)|\right] = 0$$

y podemos deducir que $\lim_{k\to\infty}\|x^k - x^0\| = 0$.

TEOREMA 6.1.5 *Sea X un espacio normado, entonces en X^* se verifica que $T_{\|\cdot\|} = T_{*-w}$ si y sólo si X es finito dimensional.*

DEMOSTRACIÓN Si X es n-dimensional tenemos que X^* también será n-dimensional. Sea $\{g_1,\dots,g_n\}$ una base de X^*. Si $f \in X^*$ denotamos por $i(f)$ su coordenada i-ésima respecto de esta base. Sabemos que existe $\{e_1,\dots,e_n\}$, una base de X, tal que $g_i(e_j) = \delta_{ij}$ si $i,j \in \{1,\dots,n\}$ y esto significa que si $f \in X^*$ es $f(e_i) = i(f)$. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red en X^* que converge en T_{*-w} a f_0, entonces para cada $i \in \{1,2,\dots,n\}$ tendremos que $\lim_{\alpha\in I} f(e_i) = f_0(e_i)$; es decir, $\lim_{\alpha\in I} i(f_\alpha) = i(f_0)$. Por tanto, deducimos que $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge en norma a f_0. Desde aquí es sencillo probar que $T_{\|\,\|} \subset T_{*-w}$.

Supongamos que X es infinito-dimensional tendremos que X^* también será infinito-dimensional. Sea $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$ y consideremos el correspondiente $\{\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n\} \subset X^{**}$; probaremos que $\bigcap_{i=1}^n \ker \hat{x}_i \neq \{0\}$. En efecto, supondremos que $\{\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n\}$ es libre (ya que en otro caso trabajaremos con el consiguiente subconjunto libre maximal). Existe $\{f_1,\dots,f_n\} \subset X^*$ tal que $\hat{x}_i(f_j) = \delta_{ij}$, para $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Como $\dim X^* > n$, existirá $g \in X^*$ tal que $g \notin \mathcal{L}(f_1,\dots,f_n)$. Sea $h = g - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(g) f_i$, tenemos que $h \neq 0$ y si $j \in \{1,\dots,n\}$ se verifica $\hat{x}_j(h) = \hat{x}_j(g) - \hat{x}_j(g)\hat{x}_j(f_j) = 0$. Por tanto, $h \in \bigcap_{i=1}^n \ker \hat{x}_i$.

Tenemos que B_{X^*} es entorno de cero para la topología de la norma en X^* pero probaremos que no es entorno de cero para T_{*-w}. En efecto, si existe $B = B(0;x_1,\dots,x_n;\varepsilon) \subset B_{X^*}$ tenemos que B contiene a $E = \bigcap_{i=1}^n \ker \hat{x}_i$ que es un subespacio vectorial de X^* distinto de $\{0\}$ y que, por tanto, no es acotado; esto contradice que $E \subset B_{X^*}$. ∎

TEOREMA 6.1.6 *Si X es un espacio de Banach infinito dimensional entonces el espacio (X^*, T_{*-w}) no es primer axioma numerable (IAN); es decir, no satisface el primer axioma de numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que (X^*, T_{*-w}) es IAN. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto finito $D_n = \{x_{i_1},\cdots,x_{i_n}\}$ de X tal que

$$B(0;D_n) = B(0;x_{i_1},\cdots,x_{i_n}) = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1, x \in D_n\} \subset A_n.$$

Tenemos que $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ es un conjunto numerable que denotamos por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $x \in X$ y consideremos $B(0;x)$; es claro que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(0; x_1, \ldots, x_m) \subset B(0, x)$. Probaremos que si $F = \bigcap_{i=1}^m \ker \hat{x}_i$ entonces $F \subset \ker \hat{x}$; esto probará que $\hat{x} \in \mathcal{L}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$ y $x \in \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$, por lo que sería $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$ y esto, por el teorema de Baire, contradice la completitud de X (obsérvese que $F \subset B(0; x_1, \ldots, x_m)$).

Supongamos que $f \in \bigcap_{i=1}^{m} \ker \hat{x}_i$ y que $f(x) = \alpha \neq 0$. Tenemos que existe $\beta \in \mathbb{K}$ tal que $|f(\beta x)| = |\beta|\,|\alpha| > 1$, con lo cual sería $\beta f \in F$ y $\beta f \notin B(0; x)$, lo que no es posible. ∎

TEOREMA 6.1.7 *Sea X un espacio normado. Si Y es un subespacio vectorial de X^* entonces Y separa puntos de X si y sólo si Y es un $*$-w denso en X^*.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que Y separa puntos de X. Sea $f \in X^*$ y sea $B(f; x_1, \ldots, x_n)$ un entorno $*$-w de f; demostraremos que $B(f; x_1, \ldots, x_n) \cap Y \neq \emptyset$. Supongamos que $\{z_1, \ldots, z_m\}$ es un subconjunto libre maximal de $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sabemos que existe $\{h_1, \ldots, h_m\} \subset Y$ tal que $h_i(z_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Consideremos $g = \sum_{j=1}^{m} f(z_j) h_j$. Se tiene que $g \in Y$ y, para $j \in \{1, \ldots, m\}$, será $g(z_j) = f(z_j)$. Como los restantes x_i de $\{x_1, \ldots, x_n\} \backslash \{z_1, \ldots, z_m\}$ son combinación lineal de $\{z_1, \ldots, z_m\}$, podemos deducir que $g(x_i) = f(x_i)$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, $g \in B(f; x_1, \ldots, x_n)$.

Supongamos ahora que Y es un subespacio vectorial de X^* que es $*$-w denso en X^* y sea $x \in X$ con $x \neq 0$. Sea $f \in X^*$ tal que $|f(x)| = \alpha \neq 0$ y consideremos $B = B(f; x; \frac{\alpha}{2})$. Existe $g \in B \cap Y$ y se cumple $|g(x)| \geq |f(x)| - |f(x) - g(x)| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} \neq 0$. Así pues, Y separa puntos de X (obsérvese que no ha sido precisa la hipótesis de que Y es subespacio vectorial de X^*). ∎

NOTA 6.1.8 Sea X un espacio normado. Como X^{**} es el dual de X^* tenemos que en X^{**} podemos considerar la topología $*$-débil o topología $\sigma(X^{**}, X^*)$. Observemos que $\hat{X}$ es un subespacio vectorial de X^{**} que separa puntos de X^*. Por tanto, podemos afirmar que $\hat{X}$ es $*$-w denso en X^{**}. Observemos que si X es completo se cumple que $cl_{\|\ \|}(\hat{X}) = \hat{X}$ y que $cl_{*-w}(\hat{X}) = X^{**}$. Por tanto, si X no es reflexivo es $cl_{\|\ \|}(\hat{X}) \neq cl_{*-w}(\hat{X})$. Finalmente, observemos que, como X^* es un espacio de Banach, podemos afirmar que si X es infinito dimensional entonces (X^{**}, T_{*-w}) no es IAN.

TEOREMA 6.1.9 *Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto numerable de X^*.*

a) Si $\mathcal{L}(A)$ es $*$-w denso en X^* entonces (X^*, T_{*-w}) es separable.

b) Si A separa puntos de X entonces (X^*, T_{*-w}) es separable.

DEMOSTRACIÓN

a) Denotemos $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ y sea $M = \{\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : n \in \mathbb{N}$ y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in T_n\}$, donde, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$T_n = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n : Re\, \lambda_i \in \mathbb{Q}, \text{Im}\ \lambda_i \in \mathbb{Q}, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

y en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es $T_n = \mathbb{Q}^n$. Claramente tenemos que M es numerable. Sea $f \in X^*$ y sea $B = B(f; x_1, \ldots, x_n)$ un entorno $*$-w de f. Consideremos $B' = B(f; x_1, \ldots, x_n; \frac{1}{2})$ y, como B' es entorno $*$-w de f, tenemos que existe un elemento $h = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_m f_m$ de $\mathcal{L}(A)$ tal que $h \in B'$. Consideremos el conjunto de números

$$H = \left\{ \frac{1}{2m|f_j(x_i)|} : f_j(x_i) \neq 0, j \in \{1, \ldots, n\}, i \in \{1, \ldots, m\} \right\}$$

y sea $\varepsilon > 0$ tal que ε es menor que una cota inferior de H. Sea $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in T_m$ tal que si $j \in \{1, \ldots, m\}$ es $|\alpha_j - \lambda_j| < \varepsilon$.

Sea $k = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_m f_m$. Tenemos que $k \in M$ y, si $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned} |k(x_i) - f(x_i)| &\leq |f(x_i) - h(x_i)| + |h(x_i) - k(x_i)| \\ &\leq \frac{1}{2} + |\alpha_1 - \lambda_1|\, |f_1(x_i)| + \cdots + |\alpha_m - \lambda_m|\, |f_m(x_i)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $k \in B$.

b) Es consecuencia del teorema anterior y de a), ya que $\mathcal{L}(A)$ es un subespacio vectorial de X^* que separa puntos de X; por tanto, $\mathcal{L}(A)$ será $*$-w denso en X^* y, como A es numerable, podemos afirmar que (X^*, T_{*-w}) es separable. ▪

TEOREMA 6.1.10 *Sea X un espacio normado y sea $\mathcal{L}$ el conjunto de las aplicaciones $h : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ lineales y continuas. Se verifica entonces que $\mathcal{L} = \hat{X}$.*

DEMOSTRACIÓN

Es claro que $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial de X^{**} tal que $\hat{X} \subset \mathcal{L}$. Supongamos que $\varphi \in \mathcal{L}$ y que $\varphi \notin \hat{X}$, con lo que $\varphi \neq 0$. Para cada $x \in X$ tenemos que $\{\hat{x}, \varphi\}$ es libre y por tanto existe $f \in X^*$ tal que $\varphi(f) = 0$ y $\hat{x}(f) \neq 0$. Por consiguiente, existe $f \in \ker \varphi$ tal que $f(x) \neq 0$; esto significa que $\ker \varphi$ es un subespacio vectorial de X^* que separa puntos de X. Por tanto $\ker \varphi$ es $*$-w denso en X^*. Probaremos ahora que $\varphi : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ no es continua, lo que está en contradicción con que $\varphi \in \mathcal{L}$. Sea $f_0 \in X^*$ tal que $\varphi(f_0) \neq 0$. Existe una red $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ en $\ker \varphi$ tal que $*$-$w \lim\limits_{\alpha \in I} f_\alpha = f_0$. Por tanto, tenemos que $*$-$w \lim\limits_{\alpha \in I} \varphi(f_\alpha) = 0$ y $\varphi(f_0) \neq 0$. ▪

TEOREMA 6.1.11 *Sea X un espacio normado. Si F es un subespacio vectorial de X^* entonces $cl_{*-w}(F) = (F_0)^0$.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación canónica $p : X \to X/F_0$. Tenemos que p es lineal, continua y sobreyectiva y, por tanto, la aplicación dual $p^* : (X/F_0)^* \to (\ker p)^0 = (F_0)^0$ es un isomorfismo. Esto prueba que para cada $f \in (F_0)^0$ existe un único $\overline{f} \in (X/F_0)^*$ tal que $p^*(\overline{f}) = f$; es decir, $\overline{f} \circ p = f$. Los entornos $*$-w de $\overline{f}$ son de la forma $A = \{\overline{g} \in (X/F_0)^* : |\overline{g}(px_i) - \overline{f}(px_i)| \leq 1$, para $i \in \{1, \ldots, n\}\}$, donde $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Sea $B = \{g \in (F_0)^0 : |g(x_i) - f(x_i)| \leq 1$, para $i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Claramente B es entorno $*$-w de f en $(F_0)^0$. Si $\overline{g} \in A$ entonces $p^*(\overline{g}) = \overline{g} \circ p \in B$. Por tanto $p^*(A) \subset B$ y es también claro que $(p^*)^{-1}(B) \subset A$;

por consiguiente, p^* es un homeomorfismo de $((X/F_0)^*, T_{*-w})$ en $((F_0)^0, T_{*-w})$. Por otro lado, tenemos que $F \subset (F_0)^0$ y probaremos que $(p^*)^{-1}(F) = \{\overline{f} : f \in F\}$ separa puntos de X/F_0, por lo que es $*$-w denso en $(X/F_0)^*$. De aquí se deducirá que F es $*$-w denso en $(F_0)^0$ y por tanto $cl_{*-w}(F) = (F_0)^0$. Si $\overline{x} \in X/F_0$ y $\overline{x} \neq 0$, existe $x \in X \setminus F_0$ tal que $p(x) = \overline{x}$; así pues existe $f \in F$ tal que $f(x) \neq 0$ y, como $\overline{f}(px) = f(x) \neq 0$, hemos concluido la demostración. ▪

Como primera consecuencia del teorema anterior tendremos que, si F es un subespacio vectorial de X^* que es $*$-w cerrado y $f \in X^* \setminus F$, entonces existe $x_0 \in F_0$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Observemos que si F es subespacio vectorial de X^* entonces F es $*$-w cerrado si y sólo si F es el anulador en X^* de un subespacio vectorial de X (concretamente del anulador de F en X).

TEOREMA 6.1.12 *Sea X un espacio normado entonces X es separable si y sólo si (B_{X^*}, T_{*-w}) es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que X es separable y sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ subconjunto numerable y denso en B_X. Para cada $f, g \in B_{X^*}$ definimos

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f(x_n) - g(x_n)|.$$

Observemos que si $d(f,g) = 0$ será $f(x_n) = g(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $f = g$ en B_X; así pues, $f = g$. Es sencillo comprobar que d es una métrica en B_{X^*}.

Veamos que la topología inducida por esta métrica en B_{X^*} coincide con T_{*-w}.

Sea $W = B(f_0; z_1, \ldots, z_k) \cap B_{X^*}$ un entorno $*$-w de $f_0 \in B_{X^*}$. Sea $\alpha > max\{\|z_i\|, i \in \{1, \ldots k\}\}$ y, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $y_i = \dfrac{1}{\alpha} z_i$. Tenemos que si $\epsilon > 0$ y $\epsilon \leq \frac{1}{\alpha}$ se verifica $V = B(f_0; y_1, \ldots, y_k; \epsilon) \cap B_{X^*} \subset W$, ya que si $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $|f(y_i) - f_0(y_i)| \leq \epsilon$ se cumpliría $|f(z_i) - f_0(z_i)| \leq \alpha\epsilon \leq 1$; además, $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset B_X$. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ tenemos que existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\epsilon}{4}$. Sea $r > 0$ tal que $r < min\{\frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2^{n_i}} : i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Probaremos que si $U = \{f \in B_X : d(f, f_0) < r\}$ entonces $U \subset V$. En efecto, si $f \in U$ será $d(f, f_0) < r$ y, por tanto, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ será $\frac{1}{2^{n_i}} |f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| < r$. Por tanto, si $i \in \{1, \ldots, k\}$ será $|f(x_{n_i}) - f_0(x_{n_i})| < \frac{\epsilon}{2}$ y tendremos que

$$\begin{aligned} |f(y_i) - f_0(y_i)| &= |(f - f_0)(y_i)| \leq |(f - f_0)(y_i - x_{n_i})| + |(f - f_0)(x_{n_i})| \\ &\leq (\|f\| + \|f_0\|)\tfrac{\epsilon}{4} + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \epsilon; \end{aligned}$$

así pues $f \in V$. Por tanto la topología de la métrica es más fina que T_{*-w}.

Consideremos ahora $f_0 \in B_{X^*}$ y sea $U = \{f \in B_{X^*} : d(f, f_0) < r\} (r > 0)$ un entorno de f_0, para la métrica d. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{r}{2}$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$. Tenemos que $V = B(f_0; x_1, \ldots, x_k; \epsilon) \cap B_{X^*}$, es entorno $*$-w de f_0 y, si

$f \in V$,

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^i}|f(x_i) - f_0(x_i)| + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|f(x_i) - f_0(x_i)| \\ &\leq \epsilon + 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon + \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Por tanto, $V \subset U$. Esto prueba que (X^*, T_{*-w}) es metrizable.

Recíprocamente, supongamos que B_{X^*} es metrizable para la topología $*$-w y demostraremos que X es separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$U_n = \{f \in B_{X^*} : d(f, 0) < \frac{1}{n}\}$$

y sea V_n un entorno $*$-w de cero en B_{X^*} tal que $V_n \subset U_n$ y V_n es de la forma $V_n = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| \leq 1, x \in A_n\}$, donde $A_n \subset X$ es finito. Sea $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; tenemos que M es numerable. Se verifica que $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$. Por tanto, si $g \in B_{X^*}$ verifica $g(x) = 0$ para cada $x \in M$, tendremos que $g \in \cap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ y será $g = 0$. Es claro entonces que $\mathcal{L}(M)$ es denso en X y que, por tanto, X es separable. ∎

6.1.2 Conjuntos *-débil compactos. Teorema de Banach-Alaoglu

TEOREMA 6.1.13 **[Teorema de Banach-Alaoglu]**
Si X un espacio normado entonces B_{X^*} es $*$-débil compacto.

DEMOSTRACIÓN Para cada $x \in X$ sea $D_x = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|x\|\}$; tenemos que D_x es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}$. Consideremos el conjunto $D = \prod_{x\in X} D_x$ con la correspondiente topología producto; por el teorema de Tychonov, tenemos que D es compacto. Observemos que D es el conjunto de las aplicaciones de X en $\mathbb{K}$ que tienen la propiedad de que $|f(x)| \leq \|x\|$ si $x \in X$; así pues, B_{X^*} es exactamente el subconjunto de D formado por las aplicaciones que sean lineales.

En B_{X^*} podemos considerar la topología T_{*-w}, que hereda B_{X^*} de la topología $*$-débil de X^*. Además, en B_{X^*} también podemos considerar la topología T, que B_{X^*} hereda como subconjunto de D. Probaremos en primer lugar que $T = T_{*-w}$.

Sea $f \in B_{X^*}$ y sea $V = U(f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \cap B_{X^*}$ un entorno de f para T_{*-w}. Observemos que $V = \left(\prod_{x\in X} M_x\right) \cap B_{X^*}$, donde $M_x = D_x$, para $x \in X\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$, y $M_{x_i} = U(f(x_i), \epsilon)$, si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así pues, es claro que V es entorno de f para la topología T. Por otra parte, sabemos que todo entorno de f para la topología T contiene a un conjunto de la forma $W = \left(\prod_{x\in X} M_x\right) \cap B_{X^*}$, donde existe cierto subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de X de modo que $M_x = D_x$, si $x \in X\backslash\{x_1, \ldots, x_n\}$, y $M_{x_i} = U(f(x_i), \varepsilon_i)$, $\epsilon_i > 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \epsilon_i$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que $U = U(f; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) \cap B_{X^*}$ es un entorno de f para T_{*-w} y es claro que $U \subset W$.

Para finalizar la demostración bastará con probar que B_{X^*} es cerrado en D para la topología T. Sea $f \in \mathrm{cl}(B_{X^*})$. Para probar que $f \in B_{X^*}$ bastará con probar que f es lineal. Sean $x_0, y_0 \in X$ y sea $\epsilon > 0$. Consideremos $W = \prod_{x \in X} M_x$, donde $M_x = D_x$, si $x \in X \backslash \{x_0, y_0, x_0 + y_0\}$, $M_{x_0} = U(f(x_0), \varepsilon/3)$, $M_{y_0} = U(f(y_0), \varepsilon/3)$ y $M_{x_0+y_0} = U(f(x_0 + y_0), \varepsilon/3)$. Tenemos que W es un entorno de f y, por tanto, existe $g \in B_{X^*}$ tal que $g \in W$. Tenemos entonces que

$$|g(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3, \quad |g(y_0) - f(y_0)| < \epsilon/3, \quad |g(x_0 + y_0) - f(x_0 + y_0)| < \epsilon/3.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&|f(x_0) + f(y_0) - f(x_0 + y_0)| \\
&\quad = |f(x_0) + f(y_0) - g(x_0) - g(y_0) + g(x_0 + y_0) - f(x_0 + y_0)| \\
&\quad \leq |f(x_0) - g(x_0)| + |f(y_0) - g(x_0)| + |g(x_0 + y_0) - f(x_0 + y_0)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $f(x_0 + y_0) = f(x_0) + f(y_0)$. De manera similar se demostraría que si $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ es $f(\alpha x_0) = \alpha f(x_0)$. ∎

NOTA 6.1.14 1.- Sea X un espacio normado. Si $f \in B_{X^*}$ y $\alpha > 0$ tenemos que $B(f, \alpha) = f + \alpha B_{X^*}$ es $*$-w compacto. Si $M \subset X^*$ es acotado, para la norma, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M \subset mB_{X^*}$ y por tanto $cl_{*-w}(M) \subset mB_{X^*}$ y será $cl_{*-w}(M)$ un conjunto acotado y $*$-w compacto. Por tanto *todo conjunto acotado que sea $*$-w cerrado será $*$-w compacto.*

Observemos que $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_{X^*}$ y, como nB_{X^*} es $*$-w compacto, deducimos que (X^*, T_{*-w}) *es de Lindelöf y por tanto también será normal* (los espacios regulares de Lindelöf son normales).

2.- Consideremos B_{l_1} con la topología T_{*-w}, que induce la topología $*$-débil de l_1, como dual de c_0. Por otro lado, como B_{l_1} está contenido en l_∞, podemos considerar en B_{l_1} la topología T que induce la topología $*$-débil de l_∞, como dual de l_1. Probaremos que B_{l_1} es cerrado en l_∞.

Consideremos la aplicación identidad $i : (B_{l_1}, T_{*-w}) \to (B_{l_1}, T)$. Un entorno de $i(x) = x$ en el espacio final es un conjunto de la forma

$$B(x; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) = \{y \in B_{l_1} : |y(x_i) - x(x_i)| < \epsilon, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Como $l_1 \subset c_0$ es fácil entender que la contraimagen por i de este conjunto es un entorno de x en el espacio inicial. Por tanto i es continua y deducimos que B_{l_1} es $*$-w compacto en l_∞; por tanto será $*$-w cerrado y también cerrado.

6.2 La topología débil en un espacio normado

Sea X un espacio normado. Por medio de X hemos definido en el espacio dual X^* la topología $*$-débil, que hemos denotado por T_{*-w} o por $\sigma(X^*, X)$. También podemos definir por medio de X^* en su dual X^{**} la topología $*$-débil, que denotaremos por T_{*-w} o bien por $\sigma(X^{**}, X^*)$. Por medio de la aplicación canónica

$j : X \to X^{**}$, tenemos que la topología $*$-débil de X^{**} inducirá en X una topología, que denominaremos **topología débil de** X, y denotaremos por T_w o bien por $\sigma(X, X^*)$.

Sea $x_0 \in X$, una base de entornos de x_0 en la topología débil estará formada por conjuntos de la forma.

$$B(x_0; f_1, \cdots, f_n; \epsilon) = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \epsilon, i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

donde $\epsilon > 0$ y $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$. Denotaremos por $U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$ al conjunto que se obtiene al sustituir el anterior $\leq$ por $<$. Los conjuntos de esta forma constituyen también una base de entornos para x_0 en T_w. Observemos que todos estos conjuntos son convexos. Si $\epsilon = 1$ denotaremos a estos conjuntos por $B(x_0; f_1, \ldots, f_n)$, o bien por $U(x_0; f_1, \cdots, f_n)$. Es fácil comprender que tanto $\{B(x_0; f_1, \cdots, f_n) : \{f_1, \cdots, f_n\} \subset X^*, n \in \mathbb{N}\}$ como $\{U(x_0; f_1, \cdots, f_n) : \{f_1, \cdots, f_n\} \subset X^*, n \in \mathbb{N}\}$ son base de entornos de x_0 para T_w. Por tanto, *los polares en X de los subconjuntos finitos de X^* constituyen una base de entornos de $0 \in X$ para la topología débil.*

Observemos que si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una red en X entonces $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a $x_0 \in X$ para la topología débil (es débil convergente) si y sólo si $\lim_{\alpha \in I} f(x_\alpha) = f(x_0)$ para cada $f \in X^*$. En esta situación pondremos $w \lim_{\alpha \in I} x_\alpha = x_0$.

Es fácil comprobar que todo conjunto de la forma $B(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$ es débil-cerrado y que los conjuntos de la forma $U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon)$ son débil-abiertos.

Si A es un subconjunto de X^* entonces su polar en X, es decir, $A_0 = \{x \in X : |f(x)| \leq 1, f \in A\}$ es débil cerrado ya que $A_0 = \cap_{f \in A} B(0; f)$.

Si $f \in X^*$ es claro que la aplicación $f : (X, T_w) \to \mathbb{K}$ es continua.

Sea $a \in X$ y consideremos la aplicación traslación

$$\tau_a : (X, T_w) \to (X, T_w),$$

definida por $\tau_a(x) = x + a$. Es sencillo ver que τ_a es un homeomorfismo. Análogamente, si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\alpha \neq 0$, entonces la aplicación homotecia, $H_\alpha : (X, T_w) \to (X, T_w)$, $H_\alpha(f) = \alpha f$, es también un homeomorfismo.

TEOREMA 6.2.1 *Sea X un espacio normado entonces se verifica que $T_w \subset T_{\|\,\|}$. Si $A \subset X$ se verifica que $cl_{\|\,\|}(A) \subset cl_w(A)$, $Int_w(A) \subset Int_{\|\,\|}(A)$.*

DEMOSTRACIÓN Este resultado es consecuencia de que la topología débil de X es la inducida por la topología $*$-débil de X^{**}. Sin embargo, nos parece conveniente razonarlo directamente.

Si $A \subset X$ es débil-cerrado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de A que converge en norma a $x \in X$ tenemos que para cada $f \in X^*$ es $\lim f(x_n) = f(x)$. Por tanto, $w \lim x_n = x$ y será $x \in A$. Observemos que si $x_0 \in X$, entonces todo entorno de x_0 en la topología débil contiene a un conjunto de la forma

$$U(x_0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U(f_i(x_0); \varepsilon)).$$

Es claro que este conjunto es un entorno abierto de x_0 para la topología de la norma. ∎

TEOREMA 6.2.2 *Sea X un espacio normado entonces la topología débil es una topología vectorial en X.*

DEMOSTRACIÓN Si $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ es una red en $(X,T_w)\times(X,T_w)$ que converge a (x_0, y_0), tenemos que $w\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = x_0$ y $w\lim\limits_{\alpha\in I} y_\alpha = y_0$. Entonces si $f\in X^*$ se verifica que

$$\lim_{\alpha\in I} f(x_\alpha+y_\alpha) = \lim_{\alpha\in I} f(x_\alpha) + \lim_{\alpha\in I} f(y_\alpha) = f(x_0)+f(y_0) = f(x_0+y_0).$$

Por tanto tenemos que $w\lim\limits_{\alpha\in I}(x_\alpha+y_\alpha) = x_0+y_0$.

Si $\{\lambda_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una red en $\mathbb{K}\times(X,T_w)$ que converge a (λ, x_0) tenemos que si $f\in X^*$ es

$$\lim_{\alpha\in I} f(\lambda_\alpha, x_\alpha) = \left(\lim_{\alpha\in I}\lambda_\alpha\right)\left(\lim_{\alpha\in I} f(x_\alpha)\right) = \lambda f(x_0) = f(\lambda x_0).$$

Por consiguiente, $w\lim\limits_{\alpha\in I}\lambda_\alpha x_\alpha = \lambda x_0$. ∎

TEOREMA 6.2.3 *Sea X un espacio normado y consideremos la familia de aplicaciones $H=\{f: X\to\mathbb{K} : f\in X^*\}$. La topología T_w de X coincide con la topología inicial T en X para la familia H.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que, para cada $f\in X^*$, la aplicación $f:(X,T_w)\to\mathbb{K}$ es continua. Por tanto $T\subset T_w$. Consideremos una red, $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, en X que converge para T a $x_0\in X$; entonces, para cada $f\in X^*$, como $f:(X,T)\to\mathbb{K}$ es continua, deducimos que $\lim_{\alpha\in I} f(x_\alpha) = f(x_0)$ y por tanto que $\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha = x_0$. Desde aquí se deduce que si $A\subset X$ es cerrado en (X,T_w) será cerrado en (X,T); por tanto $T_w\subset T$. ∎

NOTA 6.2.4 Es usual encontrar textos donde la topología débil en X se define como la topología inicial T en X para la familia de aplicaciones X^*.

Consideremos el conjunto $\mathcal{L}$ de las aplicaciones $f:(X,T_w)\to\mathbb{K}$ lineales y continuas. Tenemos que $X^*\subset\mathcal{L}$. Sea $f\in\mathcal{L}$, si consideramos la composición fI, donde $I:(X,T_{\|\ \|})\to(X,T_w)$ es la aplicación identidad, deducimos que $f:(X,T_{\|\ \|})\to\mathbb{K}$ es lineal y continua, por tanto $f\in X^*$. Así pues, $\mathcal{L}=X^*$.

TEOREMA 6.2.5 *Sea X un espacio normado, entonces X es finito dimensional si y sólo si $T_w = T_{\|\cdot\|}$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $dimX = n$ y fijemos una base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de X. Para $i\in\{1,\dots,n\}$ y $x\in X$, denotamos por $i(x)$ a la i-ésima coordenada de x respecto de $\{e_1,\dots,e_n\}$. Tenemos que $i: X\to\mathbb{K}$ es una aplicación lineal y también será continua. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red en X que converge débilmente a x_0.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\lim_{\alpha \in I} i(x_\alpha) = i(x_0)$ y podemos deducir que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge en norma a x_0. De aquí se deduce que $T_{\|\ \|} \subset T_w$ y, por tanto, $T_w = T_{\|\cdot\|}$.

Si X es un espacio normado infinito dimensional tenemos que B_X es un entorno de cero para la topología de la norma. Demostraremos que B_X no es entorno de cero para la topología débil. En efecto, supongamos que existe $B = B(0; f_1, \ldots, f_n; \epsilon) \subset B_X$, tenemos que, como $dimX > n$, $E = \bigcap_{i=1}^n \ker f_i \neq \{0\}$ y por tanto E es un subespacio vectorial de X distinto de $\{0\}$ y contenido en B_X, lo que no es posible. ▪

TEOREMA 6.2.6 *Sea X un espacio normado, si X es infinito dimensional entonces (X, T_w) no es IAN.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que el espacio (X, T_w) es IAN, con lo que existiría una base numerable $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de entornos de cero. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $D_n \subset X^*$ finito tal que $B_n = B(0; D_n) = \{x \in X : |f(x)| \leq 1, \text{ si } f \in D_n\}$ está contenido en A_n. Es claro que $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base de entornos de cero para T_w. Sea $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$; como D es numerable, lo podemos denotar por $D = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $f \in X^*$, como $B(0; f)$ es entorno de cero, es sencillo comprobar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(0; f_1, \ldots, f_m)$ está contenido en $B(0; f)$. Tenemos que $F = \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \subset B(0; f)$. Sea $y \in F$, si fuese $f(y) \neq 0$ existirá $k \in \mathbb{N}$ tal que $|f(ky)| > 1$. Entonces $ky \in F$ y $ky \notin B(0; f)$; así pues, $f(y) = 0$, $F \subset \ker f$ y deducimos que $f \in \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_m)$. Por consiguiente, será $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}(f_1, \ldots, f_n)$. Como X^* es infinito dimensional tenemos que $Int\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_n) = \emptyset$ y como X^* es completo contradecimos el teorema de Baire. ▪

TEOREMA 6.2.7 *Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ entonces si A es convexo se verifica:*

i) $cl_{\|\cdot\|}(A) = cl_w(A)$.

ii) A es cerrado en norma si y sólo si A es cerrado débil.

DEMOSTRACIÓN i) Sabemos que $cl_{\|\ \|}(A) \subset cl_w(A)$. Si $x_0 \notin cl_{\|\ \|}(A)$ sabemos que existe $f \in X^*$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x_0) - f(a)| > \delta$ si $a \in A$. Por tanto, $B(x_0; f; \delta) \cap A = \emptyset$ y esto prueba que $x_0 \notin cl_w(A)$. ii) es consecuencia de i). ▪

NOTA 6.2.8 Sea X un espacio normado.

1.- Del teorema anterior se deduce, en particular, que si A es un subespacio vectorial de X entonces $cl_{\|\ \|}(A) = cl_w(A)$. Si para cada $A \subset X$ fuese $cl_{\|\ \|}(A) = cl_w(A)$ deduciríamos que $T_w = T_{\|\ \|}$. Por tanto, si X es infinito dimensional la afirmación del teorema no es cierta para cualquier subconjunto de X.

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de X tal que $w \lim x_n = x$ entonces tenemos que $x \in cl_w(co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}) = cl_{\|\ \|}(co\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ y deducimos que existe una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $co\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\lim y_n = x$.

Consideremos en X^{**} la topología $*$-débil y supongamos que X es completo y no es reflexivo. Entonces $cl_{\| \|}(\hat{X}) = \hat{X}$. Como sabemos que $cl_{*-w}(\hat{X}) = X^{**}$, resultaría que el teorema anterior no sería válido si se enunciase para la topología $*$-débil de un espacio dual.

2.- En X^* podemos considerar tanto la topología $T_{*-w} = \sigma(X^*, X)$ como la topología $T_w = \sigma(X^*, X^{**})$. Si $(x_\alpha^*)_{\alpha\in I}$ es una red en X^* tal que $w \lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha^* = x_0^*$ tendremos que, para cada $x^{**} \in X^{**}$, será $\lim\limits_{\alpha\in I} x^{**}(x_\alpha^*) = x^{**}(x_0^*)$. Por tanto, si $x \in X$ tenemos que $\lim\limits_{\alpha\in I} \hat{x}(x_\alpha^*) = \hat{x}(x_0^*)$; es decir, $\lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha^*(x) = x_0^*(x)$. Por consiguiente, podemos afirmar que $*$-$w \lim\limits_{\alpha\in I} x_\alpha^* = x_0^*$. Es ya sencillo deducir que $T_{*-w} \subset T_w \subset T_{\| \|}$ y, si $A \subset X$, tenemos que $cl_w(A) \subset cl_{*-w}(A)$ y $Int_{*-w}(A) \subset Int_w(A)$ (todo entorno $*$-débil es entorno débil).

Si X es reflexivo entonces, como $X^{**} = \hat{X}$, es claro que en X^* es $T_{*-w} = T_w$. Supongamos que en X^* fuese $T_{*-w} = T_w$, consideremos el conjunto $\mathcal{L}$ de las aplicaciones $f : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ lineales y continuas. Sabemos que $\mathcal{L} = \{\hat{x} : x \in X\}$, pero entonces si $x^{**} \in X^{**}$ tenemos que $x^{**} : (X^*, T_w) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua. Como $T_{*-w} = T_w$ deducimos que $x^{**} \in \mathcal{L}$. Por tanto será X reflexivo, ya que $X^{**} = \hat{X}$.

3.- Sea (X, T) un espacio vectorial topológico y sea A un subconjunto de X. Se dice que A es acotado si para cada entorno V de 0 existe $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha V$.

Sea X un espacio normado, si $A \subset X$ diremos que A es débil acotado si A es acotado para (X, T_w). Si $B \subset X^*$ diremos que B es $*$-débil acotado si B es acotado para (X^*, T_{*-w}). Recordemos que un subconjunto A de X es acotado si y sólo si $f(A)$ es acotado para cada $f \in X^*$.

Si $A \subset X$ es acotado en norma demostraremos que A es débil acotado. En efecto, sea $H > 0$ tal que si $a \in A$ es $\|a\| < H$. Sea $B = B(0; f_1, \ldots, f_n)$ un entorno débil de cero, sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha > max(\|f_1\|H, \ldots, \|f_n\|H)$. Es evidente que $A \subset \alpha B$.

Supongamos que $A \subset X$ es débil acotado y que $f \in X^*$. Existe $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha B(0; f)$; esto significa que $|f(a)| \leq \alpha$ si $a \in A$. Por tanto $f(A)$ es acotado.

Ha quedado probado que *si $A \subset X$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A es acotado en norma;

ii) A es débil acotado y

iii) $f(A)$ es acotado para cada $f \in X^*$.

Si B es un subconjunto de X^* entonces B es $*$-débil acotado si y sólo si B está puntualmente acotado en X. Es decir, para cada $x \in X$ el conjunto $\{|f(x)| : f \in B\}$ es acotado. En efecto, supongamos que B es $*$-débil acotado y sea $x \in X$. Existe $\alpha > 0$ tal que $B \subset \alpha B(0; x)$; así pues, si $f \in B$ será $|f(x)| \leq \alpha$. Supongamos ahora que B está puntualmente acotado y sea $B(0; x_1, \ldots, x_n)$ un entorno $*$-débil de cero. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\alpha_i > 0$ tal que $|f(x_i)| \leq \alpha_i$ si $f \in B$. Sea $\alpha = max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Es evidente que $B \subset \alpha B(0; x_1, \ldots, x_n)$.

Si $B \subset X^*$ es débil acotado tendremos que $x^{**}(B)$ es acotado para cada $x^{**} \in X^{**}$. En concreto, será $\hat{x}(B)$ acotado si $x \in X$. Por tanto B es puntualmente acotado en X y deducimos que B es $*$-débil acotado.

Así pues, si $B \subset X^*$ es acotado en norma también será $*$-débil acotado. Es sencillo deducir que *un espacio normado X será tonelado si y sólo si cada subconjunto de X^* que sea $*$-débil acotado también es acotado en norma.* Por tanto, si X no es tonelado existirá $B \subset X^*$ que es $*$-débil acotado pero no es débil acotado.

4.- Sea X un espacio normado y supongamos que existe $U \subset X$ no vacío acotado y tal que $U \in T_w$. Demostraremos que X es finito dimensional. Sea $a \in U$ y sea $V = -a + U$. Tenemos que $V \in T_w$ y, como V es acotado, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in V \subset mB_X$. Esto significa que B_X tiene que ser entorno de cero para T_w, y ya vimos que esto no es posible en un espacio infinito dimensional.

Supongamos ahora que existe $U \subset X^*$ no vacío acotado y tal que $U \in T_{*-w}$ entonces necesariamente X tiene que ser finito dimensional. En efecto, sea $a \in U$ y $V = -a + U$, tenemos que $V \in T_{*-w}$ y como V es acotado existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V \subset mB_{X^*}$. Deducimos entonces que B_{X^*} es entorno de cero para T_{*-w}, y sabemos que esto no puede suceder en un espacio infinito dimensional.

5.- Sea X un espacio normado y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en X tal que $w - \lim_{\alpha \in I} x_\alpha = x$. Demostraremos que entonces $\|x\| \leq \liminf_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|$. Supongamos que $x \neq 0$ y que $\liminf_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| = t \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\liminf_{\alpha \in I} \|x_\alpha\| = \lim_{\alpha \in I} (\inf\{\|x_\beta\| : \beta \geq \alpha\}) = \sup\{\inf\{\|x_\beta\| : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in I\}.$$

Sea $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Se verifica que $\|x\| = \lim_{\alpha \in I} f(x_\alpha)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha_\epsilon \in I$ tal que $\|x\| - \epsilon \leq |f(x_\alpha)| \leq \|x_\alpha\|$ si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$. Tenemos que $\|x\| - \epsilon \leq \inf\{\|x_\alpha\| : \alpha_\epsilon \leq \alpha\| \leq t$ y esto prueba que $\|x\| \leq t$.

Recordemos que una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$, donde ahora X es un espacio topológico arbitrario, es semicontinua inferiormente en X si para cada red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ que sea convergente a cierto $x \in X$ se verifica que $f(x) \leq \liminf_{\alpha \in I} f(x_\alpha)$. La discusión anterior prueba que si X es un espacio normado entonces la aplicación norma es una aplicación semicontinua inferiormente para la topología débil.

De manera similar se puede probar que la aplicación norma definida en X^* es también semicontinua inferiormente cuando sobre X^* se considera la topología *-débil.

6.3 Aplicaciones lineales débilmente continuas

TEOREMA 6.3.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces la aplicación $T : X \to Y$ es continua si y sólo si la aplicación $T : (X, T_w) \to (X, T_w)$ es continua (T es débil - débil continua).*

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $T : X \to Y$ es continua y $x_0 \in X$. Considerando un entorno débil de Tx_0 dado por $B = B(Tx_0; g_1, \ldots, g_n)$, tendremos que

$$T^{-1}(B) = \{x \in X : |g_i(Tx) - g_i(Tx_0)| \leq 1, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Si observamos que $\{g_1T, \ldots, g_nT\} \subset X^*$, deducimos que $T^{-1}(B)$ es entorno débil de x_0.

Supongamos que $T : (X, T_w) \to (Y, T_w)$ es continua, entonces para cada $g \in Y^*$ tenemos que $g : (Y, T_w) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua. Por tanto $gT : (X, T_w) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua y será $gT \in X^*$. Esto significa que $T : X \to Y$ es continua ya que $g(TB_X)$ es acotado para cada $g \in Y^*$, y será TB_X acotada en Y. ■

NOTA 6.3.2

1.- Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Es evidente que $T : X \to Y$ es isomorfismo si y sólo si $T : (X, T_w) \to (Y, T_w)$ es isomorfismo.

2.- Si la aplicación $T : X \to Y$ es continua es sencillo comprobar que la aplicación $T : X \to (Y, T_w)$ es también continua.

3.- Si la aplicación $T : (X, T_w) \to Y$ es continua demostraremos que TX es finito dimensional. En efecto, tenemos que $T^{-1}(B_Y)$ es entorno débil de cero, por tanto existe $B = B(0; f_1, \ldots, f_n) \subset T^{-1}(B_Y)$. Veremos que $F = \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker T$. Si $x \in F$ será $x \in B$ y por tanto $Tx \in B_Y$. Si fuese $Tx \neq 0$ existiría $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\|\alpha Tx\| > 1$. Como $\alpha x \in F$, sería $T(\alpha x) \in B_Y$, y esto no es posible.

Podemos suponer que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es libre y entonces existe $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset X$ tal que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $x \in X$ y consideremos $z = x - (f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n)$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple $f_j(z) = 0$. Por tanto $X = F \oplus \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_n)$ y, si $x \in X$, será $Tx \in \mathcal{L}(Te_1, \ldots, Te_n)$.

4.- Si $T : X \to (Y, T_w)$ es lineal y continua demostraremos que $T : X \to Y$ es continua.

En efecto, si T no fuese continua para las topologías normadas entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in B_X$ tal que $\|Tx_n\| > n^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n = \frac{1}{n}x_n$. Se verifica que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ y $\|T(y_n)\| > n$ si $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, tenemos que $\lim_{n\to\infty} Ty_n = 0$ y el conjunto $\{T(y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, lo cual es una contradicción.

5.- Finalmente obsérvese que si $T : (X, T_w) \to Y$ es continua también serían continuas las aplicaciones $T : X \to Y$, $T : (X, T_w) \to (Y, T_w)$ y $T : X \to (Y, T_w)$.

A continuación trataremos de estudiar la relación entre la topología débil sobre un espacio normado complejo y la correspondiente topología cuando se considera el espacio normado real subyacente.

Sea X un espacio normado complejo y sea $X_{\mathbb{R}}$ el correspondiente espacio normado real. Sea T_w la topología débil de X y sea T'_w la topología débil de $X_{\mathbb{R}}$. Probaremos que $T_w = T'_w$.

Supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red en X que converge a x_0 para T_w. ea $f : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua. Sea g la aplicación definida en X por $g(x) = f(x) - if(ix)$. Tenemos que $g \in X^*$ y que $Reg = f$. Por tanto $\lim_{\alpha} g(x_\alpha) = g(x_0)$ y deducimos que $\lim_{\alpha} f(x_\alpha) = f(x_0)$.

Recíprocamente, supongamos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red en $X_{\mathbb{R}}$ que converge a x_0 para T'_w. Consideremos la aplicación $\varphi : X_{\mathbb{R}} \to X_{\mathbb{R}}$ definida por $\varphi(x) = ix$.

Es sencillo ver que φ es lineal ($\mathbb{R}$-lineal) y continua (es isometría). Por tanto tenemos que $(ix_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red en $X_\mathbb{R}$ que converge a ix_0 para T'_w. Sea $g : X \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal y continua (es decir $g \in X^*$). Tenemos que $f = Reg$ es una aplicación lineal y continua de X en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x_0)$ y $\lim_\alpha f(ix_\alpha) = f(ix_0)$. Como $g(x) = f(x) - if(ix)$ si $x \in X$, deducimos que $\lim_\alpha g(x_\alpha) = g(x_0)$. Por tanto la red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es convergente a x_0 para T_w.

TEOREMA 6.3.3 *Sean X, Y dos espacios normados, se verifica que:*

i) Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal y continua entonces la aplicación $T^* : (Y^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w}), T^*g = gT$, es lineal y continua ($*w - *w$ continua)

ii) Si $\varphi : (Y^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w})$ es una aplicación lineal y continua entonces existe una aplicación $T : X \to Y$ lineal y continua tal que $\varphi = T^*$. Además la aplicación $\varphi : Y^* \to X^*$ es continua.

DEMOSTRACIÓN i) Sea $g_0 \in Y^*$ y sea $B = B(T^*g_0; x_1, \ldots, x_n)$ un entorno $*$-débil de T^*g_0. Tenemos que $(T^*)^{-1}(B) = B(g_0; Tx_1, \ldots, Tx_n)$ y es, por tanto, un entorno $*$-débil de g_0.

ii) Sea $\varphi : (Y^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w})$ una aplicación lineal y continua y sea $x \in X$. Tenemos que $\hat{x}\varphi$ es una aplicación lineal y continua de (Y^*, T_{*-w}) en $\mathbb{K}$ y por tanto existe un único $y \in Y$ tal que $\hat{x}\varphi = \hat{y}$; denotemos $Tx = y$. Tenemos así definida una aplicación $T : X \to Y$, $Tx = y$. Es fácil comprobar que T es lineal. Veremos que T es continua demostrando que TB_X es acotado en Y. Si $g \in Y^*$ y $x \in B_X$ tenemos que $|g(Tx)| = |(\hat{x}\varphi)(g)| = |(\varphi g)(x)| \leq \|\varphi g\|$. Esto significa que, para $g \in Y^*$, $g(TB_X)$ es acotado, y por tanto TB_X es acotado.

Si $g \in Y^*$ y $x \in X$ tenemos que $(T^*g)(x) = g(Tx) = (\hat{Tx})(g) = (\hat{x}\varphi)(g) = (\varphi(g))(x)$. Esto prueba que $T^*g = \varphi(g)$ y que $T^* = \varphi$. ∎

6.4 Convergencia $*$-débil y débil de sucesiones

Sea X un espacio normado. Es fácil comprobar que toda sucesión débil convergente de X es acotada y que toda sucesión $*$-débil convergente de X^* es también acotada, si X es tonelado.

Del teorema de Banach-Steinhauss se deduce que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X^* que converge puntualmente en X, entonces existe $f_0 \in X^*$ tal que $*\text{-}w \lim f_n = f_0$. Si el espacio X es tonelado podremos afirmar que toda sucesión de X^* que sea puntualmente convergente es acotada y $*$-débil convergente a cierto $f_0 \in X^*$.

Supongamos que M es un subconjunto denso en X. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de X^* y sea $H > 0$ tal que $\|f_n\| \leq H$, para $n \in \mathbb{N}$. En esta situación se verifica que:

i) *Si* $\lim f_n(y) = 0$ *para cada* $y \in M$ *entonces* $*\text{-}w \lim f_n = 0$.

En efecto, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Existe $y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{2}H$. Como $\lim f_n(y) = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq n_0$. Por tanto, $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y)| \leq \epsilon$, si $n \geq n_0$.

ii) *Si existe* $f_0 \in X^*$ *tal que* $\lim f_n(y) = f_0(y)$, *para* $y \in M$, *entonces* $*$-$w \lim f_n = f_0$. En efecto, tenemos que $\lim(f_n - f_0)(y) = 0$ si $y \in M$. Por tanto, si $x \in X$ será $\lim(f_n - f_0)(x) = 0$ y deducimos que $*$-$w \lim f_n = f_0$.

iii) *Si* (f_n) *es puntualmente convergente en* M *entonces* (f_n) *es puntualmente convergente en* X *y, por tanto, es* $*$*-débil convergente a cierto* $f_0 \in X^*$.

En efecto, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Existe $y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \frac{\epsilon}{3}H$. Como $(f_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_p(y) - f_q(y)| \leq \frac{\epsilon}{3}$, para $p, q \geq n_0$. Por tanto

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f_p(y)| + |f_p(y) - f_q(y)| + |f_q(y) - f_q(x)| \leq \epsilon,$$

para $p, q \geq n_0$. Así pues, existe el límite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Supongamos ahora que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X^*. Tenemos que existirá $\alpha > 0$ tal que $f_n \in \alpha B_{X^*}$, si $n \in \mathbb{N}$. De la compacidad $*$-débil de αB_{X^*} no podemos deducir que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tenga una subsucesión que sea $*$-débil convergente, ya que no tenemos garantías de que (B_{X^*}, T_{*-w}) sea secuencialmente compacto (Si X fuese separable entonces $(B_{X^*}, * - w)$ sería métrico compacto y por tanto secuencialmente compacto); lo único que podemos afirmar en nuestro caso es que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene punto $*$-débil de aglomeración y, por tanto, posee alguna subred que es $*$-débil convergente.

La siguiente noción es aplicable a un espacio vectorial topológico arbitrario (Z, T). sea $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Z, se dice que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si para cada entorno V de cero existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_p - z_q \in V$, para $p, q \geq n_0$.

Supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que es $*$-débil de Cauchy. Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$ tenemos que $B(0; x; \epsilon)$ es entorno $*$-débil de cero; por tanto existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon$, si $p, q \geq n_0$. Esto significa que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente convergente en X y por tanto, si X es tonelado, deducimos que (f_n) es $*$-débil convergente a cierto $f_0 \in X^*$. Si la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $*$-débil de Cauchy entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es $*$-débil convergente a cierto $f_0 \in X^*$. Es fácil comprobar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión de X^* que es puntualmente convergente en X entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es $*$-débil de Cauchy.

Sea X un espacio normado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, para cada $f \in X^*$. Tenemos que $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión de X^{**} que es puntualmente convergente en X^*. Por tanto, existe $x_0^{**} \in X^{**}$ tal que $*$-$w \lim \hat{x}_n = x_0^{**}$. También podemos afirmar que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada; sin embargo, en general, no podemos afirmar que exista $x_0 \in X$ tal que $w \lim x_n = x_0$.

En efecto, sea $X = c_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = e_1 + \cdots + e_n$. Sea $f \in X^*$, tenemos que existe $y \in l_1$ tal que $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$, para $x \in X$. Es claro que $\lim f(x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} y(i)$. Supongamos que $x_0 \in X$ es tal que $w \lim x_n = x_0$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $f_i : X \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $f_i(x) = x(i)$, si $x \in X$. Claramente, se verifica que $f_i \in X^*$ y $x_0(i) = \lim_n f_i(x_n) = 1$, pero esto contradice que $x_0 \in c_0$.

Supongamos que N es un subconjunto denso en X^*. En esta situación, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X es fácil comprobar que se verifica:

1) Si $\lim g(x_n) = 0$ para cada $g \in N$ entonces $w \lim x_n = 0$.

2) Si existe $x_0 \in X$ tal que $\lim g(x_n) = g(x_0)$ si $g \in N$ entonces $w \lim x_n = x_0$.

3) Si la sucesión $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, para cada $g \in N$, entonces es convergente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $f \in X^*$.

Supongamos que ahora es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de X para la norma y que $w \lim x_n = x_0$. Demostraremos que entonces $\lim x_n = x_0$. En efecto, si fuese falso que $\lim x_n = x_0$ existirían $\epsilon > 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) de modo que $\|x_{n_k} - x_0\| > \epsilon$ para $k \in \mathbb{N}$. Como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_{k_0}} - x_{n_k}\| < \epsilon/2$, si $k \geq k_0$. Como $B(x_{n_{k_0}}, \epsilon/2)$ es débil-cerrado deducimos que $x_0 \in B(x_{n_{k_0}}, \epsilon/2)$, en contradicción con que $\|x_{n_{k_0}} - x_0\| > \epsilon$.

Es sencillo comprobar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en norma entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil Cauchy. Proponemos que se pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil Cauchy si y sólo si para cada $f \in X^*$ se verifica que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Es sencillo comprobar que en X^* toda sucesión débil de Cauchy también será $* - w$ de Cauchy.

Ejemplo 6.4.1 *Supongamos que F es cualquiera de los espacios de sucesiones de escalares c_0 o l_p, con $p \in [1 + \infty)$. Sabemos que en cada uno de estos espacios es denso el subespacio c_{00}. Si x, y son dos sucesiones de escalares y $\sum_{i=1}^{\infty} y(i)x(i)$ es convergente denotaremos a la suma por $\overline{y}(x)$.*

Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de F y sea $x^0 \in F$. Si para cada $y \in c_{00}$ se verifica $\lim_{n\to\infty} \overline{y}(x^n) = \overline{y}(x^0)$ deducimos que, para $i \in \mathbb{N}$, se cumple $\lim_{n\to\infty} \overline{e}_i(x^n) = \overline{e}_i(x^0)$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$ si $i \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, supongamos que para cada $i \in N$ se verifica $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$ y sea $y \in c_{00}$. Tenemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $y(i) = 0$, para $i > j$. Entonces, $\overline{y}(x^n) = y(1)x^n(1) + \cdots + y(j)x^n(j)$, para $n \in \mathbb{N}$, y es claro que $\lim_{n\to\infty} \overline{y}(x^n) = \overline{y}(x^0)$.

Partiendo de los resultados anteriores es sencillo deducir que son ciertas las siguientes afirmaciones:

i.- Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de c_0 y sea $x^0 \in c_0$. Entonces $w \lim x^n = x^0$ si y sólo si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$, para $i \in \mathbb{N}$.

ii.- Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de l_1. Sea $x^0 \in l_1$ y consideremos en l_1 la topología $\sigma(l_1, c_0)$. Entonces, $*$-$w \lim x^n = x^0$ si y sólo si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$.

iii.- *Consideremos un espacio* l_p, *con* $p > 1$. *Sea* q *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Sabemos que el dual de* l_p *es* l_q *y que el dual de* l_q *es* l_p. *También sabemos que* l_q *es reflexivo y, por tanto, en* l_p *coinciden la topología débil y la topología* $*$*-débil. Sea* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* l_p *y sea* $x^0 \in l_p$. *entonces* $w\lim x^n = x^0$ *si y sólo si* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y* $\lim\limits_{n\in\infty} x^n(i) = x^0(i)$, *para* $i \in \mathbb{N}$.

iv.- *Consideremos* l_∞ *con la topología* $*$*-débil* $\sigma(l_\infty, l_1)$. *Sea* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* l_∞ *y sea* $x^0 \in l_\infty$. *Entonces* $*\text{-}w\lim x^n = x^0$ *si y sólo si* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es sucesión acotada y* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$, *para* $i \in \mathbb{N}$.

No estamos en condiciones de estudiar la convergencia débil de sucesiones de l_∞ *pero haremos las siguientes observaciones. Sea* $x \in l_\infty$ *y, para* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $x^n = (x(1), \ldots, x(n), 0, \ldots)$. *Tenemos que* $\|x^n\| \le \|x\|$, *si* $n \in \mathbb{N}$, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n(i) = x(i)$, *si* $i \in \mathbb{N}$. *Así pues* $*\text{-}w\lim x^n = x$; *sin embargo, en general, es falso que sea* $\lim x^n = x$ *o bien* $w\lim x^n = x$. *Por ejemplo, si* $x = e$, *(la sucesión constante 1) y, para* $n \in \mathbb{N}$, *definimos* $e^n = e_1 + \cdots + e_n$, *entonces es falso que* $\lim e^n = e$.

Si consideramos la aplicación $l : c \to \mathbb{K}$, $l(x) = \lim x(i) = x(\infty)$, *tenemos, por el teorema de Hahn-Banach, que existe una aplicación lineal y continua* $\bar{l} : l_\infty \to \mathbb{K}$ *tal que* $\bar{l} = l$ *en* c *y* $\|\bar{l}\| = \|l\| = 1$. *Es claro que* $\bar{l}(e^n) = l(e^n) = 0$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *pero* $\bar{l}(x) = \bar{l}(e) = 1$; *Por consiguiente, es también falso que* $w\lim e^n = e$.

En su momento se demostró que si $f : l_\infty \to \mathbb{K}$ *es lineal y continua entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \le \|f\|$. *Por tanto será* $\lim\limits_{n\to\infty} f(e_n) = 0$, *con lo que* $w\lim e_n = 0$. *Sin embargo, es falso que* $\lim e_n = 0$.

Finalmente observemos que c_{00} *es un subespacio de* l_∞ *que separa puntos de* l_1. *Por consiguiente, tanto* c_{00} *como* c_0 *son subespacios de* l_∞ *que son* $*$*-débil densos. Consideremos* $B = B(e; \bar{l}; 1/2)$, *tenemos que* B *es un entorno débil de* e *pero que* $B \cap c_0 = \emptyset$. *Por tanto* c_0 *no es débil denso en* l_∞.

v.- *Consideremos el espacio* c *de las sucesiones convergentes. Recordemos que si* $f \in c^*$ *entonces existe un único* $y \in l_1$ *tal que* $f(x) = y(1)x(\infty) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} y(i+1)x(i)$, *para* $x \in X$. *Esta suma será denotada aquí por* $\overline{y}(x)$.

Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* c *y sea* $x^0 \in c$. *Supongamos que para cada* $y \in c_{00}$ *se verifica* $\lim \overline{y}(x^n) = x^0$. *Entonces* $\lim \overline{e}_1(x^n) = \overline{e}_1(x_0)$ *y* $\lim \overline{e}_{i+1}(x^n) = \overline{e}_{i+1}(x_0)$, *para* $i \in \mathbb{N}$; *es decir,* $\lim x^n(\infty) = x_0(\infty)$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$, *para* $i \in \mathbb{N}$. *Recíprocamente, supongamos que* $\lim x^n(\infty) = x_0(\infty)$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$ *si* $i \in \mathbb{N}$. *Entonces, para* $y \in c_{00}$, *existe* $j \in \mathbb{N}$ *tal que* $y(i) = 0$ *si* $i > j$. *Se tiene que* $\overline{y}(x^n) = y(1)x^n(\infty) + y(2)x^n(1) + \cdots + y(j)x^n(j-1)$ *y es claro* *que* $\lim_{n\to\infty} \bar{y}(x^n) = \bar{y}(x_0)$. *Por tanto* $w\lim x^n = x^0$ *si y sólo si* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada,* $\lim_{n\to\infty} x^n(\infty) = x^0(\infty)$ *y* $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$, *para* $i \in \mathbb{N}$.

Observemos que si, para $n \in \mathbb{N}$, *definimos* $x^n = e_1 + \cdots + e_n$ *y* x^0 *es la sucesión constante* 1, *entonces* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada y* $\lim_{n\to\infty} x^n(i) = x^0(i)$. *Sin embargo, es falso que* $w\lim x^n = x^0$. *En efecto, consideremos la aplicación lineal y continua* $l : c \to \mathbb{K}$, $l(x) = x(\infty)$, *tenemos que* $l(x^n) = 0$, *para* $n \in \mathbb{N}$, *pero* $l(x^0) = 1$.

TEOREMA 6.4.2 *Sea* X *un espacio de Banach y sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de* X *tal que* $w\lim x_n = 0$. *Se verifica que* $M = \{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{l_1}\}$ *es un subconjunto débil compacto de* X.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, consideremos la aplicación $T : (l_1, T_{*-w}) \to (X, T_w)$ definida en cada $a \in B_{l_1}$ por $T(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n$. Es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x_n \in X$, ya que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y X es completo. Claramente T es lineal; veremos que T es continua. Sea $a \in l_1$ y sea $B = B(Ta; f_1, \ldots, f_m; \epsilon)$ un entorno débil de Ta en X. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ tenemos que $y^i = (f_i(x_n)) \in c_0$, ya que $w\lim x_n = 0$. Consideremos en l_1 el entorno $*$-débil de a definido por $V = B(a; y^1, \ldots, y^m; \epsilon)$, para $b \in V$. Tenemos que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_i(x_n)(a(n) - b(n))\right| < \epsilon$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Por tanto $|f_i(Tb - Ta)| < \epsilon$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$. Esto significa que $Tb \in B$. Así pues, T es continua y, como B_{l_1} es $*$-débil compacto, deducimos que $M = T(B_{l_1})$ es débil compacto.

En particular, si consideramos $X = l_\infty$ y la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $w\lim e_n = 0$. Consideremos la aplicación $T : (l_1, T_{*-w}) \to (l_\infty, T_w)$definida por $Ta = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)e_i$; es claro que $Ta = a$. Como T es continua, deducimos que B_{l_1}, como subconjunto de l_∞, es débil compacto (por tanto es cerrado). ▪

6.5 Convergencia débil de sucesiones en l_1. Teorema de Schur

Todavía no nos hemos ocupado de la convergencia débil de sucesiones de l_1. El siguiente teorema es sencillamente sorprendente.

TEOREMA 6.5.1 **[Teorema de Schur]**

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* l_1 *entonces* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge débilmente si y sólo si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en norma. En esta situación se verifica* $w\lim x_n = \lim x_n$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a z_0 pero no lo hace en norma. Existe $\delta > 0$ y cierta subsucesión $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|z_{n_k} - z_0\| > \delta$, si $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $x_k = \frac{1}{\delta}(z_{n_k} - z_0)$. Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a cero pero $\|x_n\| \geq 1$ si $n \in \mathbb{N}$.

Trataremos de obtener un elemento $a \in l_\infty$ y una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que

$$|\overline{a}(x_{n_j})| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_{n_j}(i)\right| \geq \frac{1}{5},$$

para $j \in \mathbb{N}$. Esto estará en contradicción con que $w\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = 0$.

Para $n_1 = 1$ escogemos $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{k_1} |x_1(i)| \geq \|x_1\| - \frac{1}{5} \geq \frac{4}{5}$. Para $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ definimos $a(i)$ de la siguiente forma: $a(i) = \frac{|x_1(i)|}{x_1(i)}$, si $x_1(i) \neq 0$, $a(i) = 0$, si $x_1(i) = 0$. Se verifica $a(i)x_1(i) = |x_1(i)|$ y $|a(i)| \leq 1$, para $i \in \{1, \ldots, k_1\}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n(1) = 0, \ldots, \lim_{n\to\infty} x_n(k_1) = 0$, existirá $n_2 > 1$ tal que, para $i \in \{1, \ldots, k_1\}$, se verifica $|x_{n_2}(i)| \leq \frac{1}{5k_1}$, y por tanto $\sum_{i=1}^{k_1} |x_{n_2}(i)| \leq \frac{1}{5}$. Escogemos $k_2 > k_1$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k_2} |x_{n_2}(i)| \geq \|x_{n_2}\| - \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_2}(i)| - \frac{1}{5} \geq \frac{4}{5}.$$

Observemos que entonces $\sum_{i=k_2+1}^{\infty} |x_{n_2}(i)| \leq \frac{1}{5}$ y además

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_2} |x_{n_2}(i)| = \sum_{i=1}^{k_2} |x_{n_2}(i)| - \sum_{i=1}^{k_1} |x_{n_2}(i)| \geq \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Para $i \in \{k_1 + 1, \ldots, k_2\}$ definimos $a(i) = \frac{|x_{n_2}(i)|}{x_{n_2}(i)}$, si $x_{n_2}(i) \neq 0$, y $a(i) = 0$, si $x_{n_2}(i) = 0$. Se cumple que $a(i)x_{n_2}(i) = |x_{n_2}(i)|$ y $|a(i)| \leq 1$, para $i \in \{k_1 + 1, \ldots, k_2\}$.

Aunque no sea necesario, y por si todavía no nos hemos enterado, daremos un tercer paso. Como $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = 0$, si $i \in \{1, \ldots, k_2\}$, existe $n_3 > n_2$ tal que $|x_{n_3}(i)| \leq \frac{1}{5k_2}$, para $i \in \{1, \ldots, k_2\}$. Se tiene entonces que $\sum_{i=1}^{k_2} |x_{n_3}(i)| \leq \frac{1}{5}$. Escogemos $k_3 > k_2$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k_3} |x_{n_3}(i)| \geq \|x_{n_3}\| - \frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{n_3}(i)| - \frac{1}{5} \geq \frac{4}{5}.$$

Observemos que entonces $\sum_{i=k_3+1}^{\infty} |x_{n_3}(i)| \leq \frac{1}{5}$ y

$$\sum_{i=k_2+1}^{k_3} |x_{n_3}(i)| = \sum_{i=1}^{k_3} |x_{n_3}(i)| - \sum_{i=1}^{k_2} |x_{n_3}(i)| \geq \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Reiterando este proceso se obtienen, inductivamente, dos sucesiones estrictamente crecientes, (n_j) y (k_j), de números enteros, y una sucesión $a = (a(i))_{i\in\mathbb{N}}$ de B_{l_∞} de modo que:

1. Para cada $j \in \mathbb{N}$ con $j > 1$ es $\sum_{i=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j}(i)| \leq \frac{1}{5}$,

2. $\sum_{i>k_j} |x_{n_j}(i)| \leq \frac{1}{5}$,

3. $\sum_{k_{j-1}+1}^{k_j} |x_{n_j}(i)| \geq \frac{3}{5}$.

Además, $a(i)x_{n_j}(i) = |x_{n_j}(i)|$, si $k_{j-1} < i \leq k_j$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, con $j > 1$, se verifica

$$\begin{aligned}
|\overline{a}(x_{n_j})| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_{n_j}(i)\right| = \left|\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a(i)x_{n_j}(i) + \sum_{i\notin[k_{j-1}+1,k_j]} a(i)x_{n_j}(i)\right| \\
&\geq \left|\sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a(i)x_{n_j}(i)\right| - \left|\sum_{i\notin(k_{j-1}+1,k_j]} a(i)x_{n_j}(i)\right| \\
&\geq \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_{n_j}(i)| - \sum_{i=1}^{k_{j-1}} |x_{n_j}(i)| - \sum_{i>k_j} |x_{n_j}(i)| \\
&\geq \frac{3}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

■

NOTA 6.5.2 1.- Sea X un espacio normado y supongamos que X es isomórfico a un subespacio E de l_1. Sea $T : X \to E$ el correspondiente isomorfismo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X que es débil convergente a $x_0 \in X$. Para $f \in l_1^*$, tenemos que $fT \in X^*$ y, por tanto, $\lim_{n\to\infty} f(Tx_n) = f(Tx_0)$. Así pues, $w\lim Tx_n = Tx_0$ y también será $\lim Tx_n = Tx_0$. Como T es isomorfismo deducimos que $\lim x_n = x_0$. Por tanto, en X toda sucesión que es débil convergente a cierto $x_0 \in X$ será también convergente, en la topología de la norma, a x_0. Recordemos que en c_0, l_∞ y l_p, con $p > 1$, se verifica que la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil convergente a cero pero no converge en norma. Por tanto estos espacios no pueden ser isomórficos a un subespacio de l_1; es decir l_1 *no puede tener una copia de estos espacios.*

2.- Sea X un espacio normado. Se dice que X tiene la **propiedad de Schur** si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $w\lim x_n = x \in X$ se verifica que $\lim x_n = x$.

Una propiedad similar, pero más débil que la de Schur, es la conocida como **propiedad** H (también denominada **propiedad de Radon-Riesz** o de Kadets-Klee). Se dice que X tiene la propiedad H si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $w\lim x_n = x \in X$ y $\lim \|x_n\| = \|x\|$ se verifica que $\lim x_n = x$.

Es claro que un espacio con la propiedad de Schur tiene la propiedad H. Tenemos que l_2 no tiene la propiedad de Schur, ya que si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de los vectores canónicos se verifica que $w\lim e_n = 0$. Sin embargo, es claro que (e_n) no converge en norma a cero.

Demostraremos que l_2 tiene la propiedad H. Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de l_2 tal que $w\lim x^n{=}x^0{\in}l_2$ y $\lim \|x^n\|{=}\|x^0\|$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|x^n - x^0\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}(x^n(i) - x^0(i))\overline{(x^n(i) - x^0(i))}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|x^n(i)|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x^n(i)\overline{x^0(i)} - \sum_{i=1}^{\infty}\overline{x^n(i)}x^0(i) + \sum_{i=1}^{\infty}|x^0(i)|^2\\ &= \|x^n\|^2 - f(x^n) - \overline{f}(x^n) + \|x^0\|^2,\end{aligned}$$

donde f es el elemento del dual de l_2 definido por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\overline{x^0(i)}x(i)$. Queda claro entonces que $\lim \|x^n - x^0\|^2 = \|x^0\|^2 - f(x^0) - \overline{f}(x_0) + \|x^0\|^2 = 0$.

3.- Sea (Z,T) un espacio vectorial topológico y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red de Z. Se dice que la red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una **red de Cauchy** si para cada V entorno de cero existe $\alpha_0 \in I$ tal que $x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in V$ si α_1, $\alpha_2 \in I$ con $\alpha_1 \geq \alpha_0$ y $\alpha_2 \geq \alpha_0$.

Se dice que (Z,T) es **completo** si cada red de Cauchy es convergente. Se dice que (Z,T) es **secuencialmente completo** si cada sucesión de Cauchy es convergente. En el capítulo que dedicaremos al estudio de los espacios vectoriales topológicos propondremos que se pruebe que todo espacio vectorial topológico que verifique el primer axioma de numerabilidad y sea secuencialmente completo es necesariamente completo. Por tanto, para un espacio normado, los conceptos de completo y secuencialmente completo son equivalentes. No obstante, cuando finalice esta nota quedará claro que los conceptos de completo y secuencialmente completo no son equivalentes en el marco de los espacios vectoriales topológicos generales.

4.- Sea X un espacio normado. Demostraremos que (X,T_w) *es completo si y sólo si* X *es finito dimensional.*

Si X es finito dimensional es $T_w = T_{\|\ \|}$ y queda claro que (X,T_w) es completo.

Supongamos ahora que X es infinito dimensional. Tenemos que también X^* será infinito dimensional. Por tanto existe una aplicación lineal $\varphi : X^* \to \mathbb{K}$ que no es continua.

Sea $F \subset X^*$ un subconjunto finito. Demostraremos que podemos escoger un elemento x_F de X de modo que $f(x_F) = \varphi(f)$, para $f \in F$. Supongamos que $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Tenemos que φ es continua en el espacio $\mathcal{L}(f_1, \ldots, f_n)$ y si M es la correspondiente norma de φ se verifica que

$$|\alpha_1\varphi(f_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(f_n)| = |\varphi(\alpha_1)f_1 + \cdots + \alpha_n f_n)| \leq M\|\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\|,$$

para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Por el lema de Helly sabemos que existe $x_F \in X$ tal que $f_i(x_F) = \varphi(f_i)$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea I la familia de los subconjuntos finitos de X^* y consideremos en I el orden: $F_1 \leq F_2$ si y sólo si $F_1 \subset F_2$. Tenemos que $(x_F)_{F\in I}$ es una red en X y demostraremos que esta red es de Cauchy.

Sea $f \in X^*$ y veamos que $\lim\limits_{F\in I} f(x_F) = \varphi(f)$. En efecto, si $F \in I$ y $F \geq \{f\}$ se verifica $f(x_F) = \varphi(f)$.

Demostraremos ahora que la red $(x_F)_{F\in I}$ no es convergente para T_w. Supongamos que $\lim\limits_{F\in I} x_F = x_0$. Para $f \in X^*$ tenemos que $\hat{x}_0(f) = f(x_0) = \lim\limits_{F\in I} f(x_F) = \varphi(f)$. Por tanto, $\varphi = \hat{x}_0$, lo que contradice que φ sea no continua.

5.- Sea X un espacio normado. Demostraremos que (X^*, T_{*-w}) es completo si y sólo si X es finito dimensional.

Si X es finito dimensional se verifica, en X^*, que $T_{*-w} = T_{\|\ \|}$ y, por tanto, X^* con T_{*-w} es completo.

Supongamos que X es infinito dimensional. Sabemos que existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ que es lineal y no es continua.

Sea I la familia de los subconjuntos finitos de X y consideremos en I el orden: $F_1 \leq F_2$ si y sólo si $F_1 \subset F_2$.

Sea $F \in I$, tenemos que la restricción de f a $\mathcal{L}(F)$ es lineal y continua. Sea f_F la correspondiente extensión lineal y continua. Consideremos en X la red $(f_F)_{F\in I}$ y vamos a demostrar que esta red es $*-w$ Cauchy, probando que $\lim\limits_{F\in I} f_F(x) = f(x)$, para $x \in X$. En efecto, si $F \in I$ y $F \geq \{x\}$ será $f_F(x) = f(x)$.

Finalmente, demostraremos que la red $(f_F)_{F\in I}$ no converge para T_{*-w}. Si existiese $g \in X^*$ tal que $* - w \lim f_F = g$ tendremos que $g(x) = \lim\limits_{F\in I} f_F(x) = f(x)$, para $x \in X$. Por tanto será $g = f$, lo que contradice que f sea no continua.

6.- Consideremos el espacio l_1. Tenemos que (l_1, T_w) no es completo; sin embargo, demostraremos que sí es secuencialmente completo. Sea $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débil Cauchy de l_1. Tenemos que la sucesión es acotada y existe $M > 0$ tal que $\|x^n\| \leq M$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $x^0(i) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n(i)$. Demostraremos que $x^0 = (x^0(i))$ pertenece a l_1. En efecto, fijado $N \in \mathbb{N}$ tenemos, para $n \in \mathbb{N}$, que $\sum\limits_{i=1}^{N} |x^n(i)| \leq \|x^n\| \leq M$. Tomando límite para $n \to \infty$, se deduce que $\sum\limits_{i=1}^{N} |x^0(i)| \leq M$. De aquí se deduce que $\sum_{i=1}^{\infty} |x^0(i)| \leq M$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z^n = x^n - x^0$, tenemos que $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de l_1 tal que $\lim z^n(i) = 0$ si $i \in \mathbb{N}$. Reproduciendo la demostración del teorema de Schur, se prueba que $\lim z^n = 0$ y, por tanto, que $\lim x^n = x^0$. También es cierto que $w \lim x^n = x^0$ y queda probado que (l_1, T_w) es secuencialmente completo.

6.- Finalmente, no es difícil comprobar que si X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur entonces X es débilmente secuencialmente completo.

Tema 7

Espacios de Hilbert

7.1 Formas sesquilineales y hermíticas

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y sea $u : E \to F$ una aplicación. Se dice que u es una **aplicación semilineal** si para cada $x, y \in E$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

i) $u(x + y) = u(x) + u(y)$.

ii) $u(\alpha x) = \overline{\alpha} u(x)$.

Observemos que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el concepto de aplicación semilineal coincide con el de lineal.

Una aplicación $B : E \times E \to \mathbb{K}$ se dice que es una **forma sesquilineal** si es lineal respecto de la primera componente y semilineal respecto de la segunda, es decir, para cada $x, x', y, y' \in E$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:

i) $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y')$;

ii) $B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$;

iii) $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$;

iv) $B(x, \alpha y) = \overline{\alpha} B(x, y)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el concepto de sesquilineal coincide con el de bilineal.

Si la aplicación $B : E \times E \to \mathbb{K}$ es una **forma sesquilineal** se dice que es **hermítica** si para cada $x, y \in E$ se verifica que $B(x, y) = \overline{B(y, x)}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el concepto de hermítica coincide con el concepto de simétrica.

Vamos a demostrar que si E es complejo y B es una forma sesquilineal que es simétrica, entonces $B(x, y) = 0$ para cada $x, y \in E$. En efecto, $B(x, y) = B(-i(ix), y) = -iB(ix, y)$. Por otra parte, $B(x, y) = B(-i(ix), y) = B(y, -i(ix)) = \overline{-i} B(y, ix) = iB(ix, y)$ y deducimos que $B(x, y) = 0$.

Análogamente, si $B : E \times E \to \mathbb{C}$ es bilineal y hermítica entonces $B = 0$. En efecto, $B(x,y) = B(-i(ix),y) = \overline{B(y,-i(ix))} = \overline{-iB(y,ix)} = i\overline{B(y,ix)} = iB(ix,y) = -B(x,y)$. Así pues, $B(x,y) = 0$.

Si $B : E \times E \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal entonces es sencillo comprobar que para cada $x, y \in E$ se verifica que

$$4B(x,y) = B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) + iB(x+iy,x+iy) - iB(x-iy,x-iy).$$

Por tanto B queda totalmente determinada por sus valores en la diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in E\}$. Esto no sucede en el caso de las formas bilineales. Por ejemplo, $B((x_1,y_1)(x_2,y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$ es una forma bilineal en $\mathbb{R}^2$ que no es nula pero es nula en la diagonal. No obstante, si $B : E \times E \to \mathbb{R}$ es bilineal y simétrica entonces sí que B queda determinada por sus valores en la diagonal Δ ya que $2B(x,y) = B(x+y,x+y) - B(x,x) - B(y,y)$.

Sea $B : E \times E \to \mathbb{K}$ una forma sesquilineal hermítica entonces

$$B(x+y,x+y) = B(x,x)+B(y,y)+B(x,y)+B(y,x) = B(x,x)+B(y,y)+2ReB(x,y).$$

Análogamente será $B(x-y,x-y) = B(x,x) + B(y,y) - 2Re\, B(x,y)$. Por tanto, deducimos que

$$\begin{aligned} B(x+y,x+y) + B(x-y,x-y) &= 2B(x,x) + 2B(y,y), \\ B(x+y,x+y) - B(x-y,x-y) &= 4Re\, B(x,y). \end{aligned}$$

Teorema 7.1.1 *Sea E un espacio vectorial complejo y sea B una forma sesquilineal sobre E. Entonces B es hermítica si y sólo si para cada $x \in E$ es $B(x,x)$ real.*

Demostración Si B es hermítica, es claro que si $x \in E$ entonces $\overline{B(x,x)} = B(x,x)$ y será $B(x,x) \in \mathbb{R}$.

Supongamos ahora que para cada $x \in E$ es $B(x,x) \in \mathbb{R}$. Sean $x, y \in E$; entonces $B(x+y,x+y) = B(x,x) + B(y,y) + B(x,y) + B(y,x)$ y será $\alpha = B(x,y) + B(y,x) \in \mathbb{R}$. Análogamente $B(ix+y,ix+y) = B(ix,ix) + B(y,y) + B(ix,y) + B(y,ix)$ y será $\beta = B(ix,y) + B(y,ix) = i(B(x,y) - B(y,x)) \in \mathbb{R}$. Por tanto, deducimos que $B(y,x) = \dfrac{\alpha + i\beta}{2}$ y $B(x,y) = \dfrac{\alpha - i\beta}{2}$. Esto prueba que $B(y,x)$ y $B(x,y)$ son conjugados. ∎

Definición 7.1.2 *Sea E un espacio vectorial y sea B una forma sesquilineal y hermítica sobre E. Si para cada $x \in E$ se verifica $B(x,x) \geq 0$ entonces se dirá que B es **positiva** y si además es $x = 0$ cuando $B(x,x) = 0$ se dice que B es **definida positiva**.*

Teorema 7.1.3 (**Desigualdad de Cauchy-Schwarz**.)

Sea E un espacio vectorial. Sea B una forma sesquilineal hermítica y positiva sobre E. Se verifica, para $x, y \in E$, que

$$|B(x,y)| \leq B(x,x)^{1/2}B(y,y)^{1/2}.$$

DEMOSTRACIÓN Si $x, y \in E$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq B(x+\lambda y, x+\lambda y) = B(x,x) + \lambda\overline{\lambda}B(y,y) + B(x,\lambda y) + B(\lambda y, y) \\ &= B(x,x) + |\lambda|^2 B(y,y) + B(x,\lambda y) + \overline{B(x,\lambda y)} \\ &= B(x,x) + |\lambda|^2 B(y,y) + 2ReB(x,\lambda y) = B(x,x) + |\lambda|^2 B(y,y) + 2Re\overline{\lambda}B(x,y). \end{aligned}$$

Si escribimos $B(x,y) = |B(x,y)|e^{i\theta}$, sea $\lambda = te^{-i\theta}$, donde $t \in \mathbb{R}$. De esta forma obtenemos $0 \leq B(x,x) + t^2B(y,y) + 2t|B(x,y)|$. Si consideramos que tenemos un polinomio de segundo grado en t deducimos que $4|B(x,y)|^2 \leq 4B(x,x)B(y,y)$. Por tanto, $|B(x,y)| \leq (B(x,x))^{1/2}(B(y,y))^{1/2}$. ■

Observemos que si x e y son linealmente dependientes la desigualdad, en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, sería una igualdad. Si x, y son linealmente independientes la desigualdad sería estricta en el caso en que B sea definida positiva, ya que al ser $x + \lambda y \neq 0$, para $\lambda \in \mathbb{K}$, podemos afirmar que $0 < B(x+\lambda y, x+\lambda y)$.

7.2 Espacios prehilbertianos

DEFINICIÓN 7.2.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un* ***producto escalar*** *o* ***producto interior*** *en X es una forma sesquilineal hermítica definida positiva B sobre $X \times X$. Para $(x,y) \in X \times X$, se suele denotar $(x|y) = B(x,y)$ o bien por $\langle x,y\rangle = B(x,y)$. Si X está dotado de un producto escalar diremos que X es un espacio prehilbertiano.*

En esta situación, si definimos en cada $x \in X$, $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, demostraremos que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

1. Claramente es $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

2. Tenemos que $\|\alpha x\| = (\alpha\overline{\alpha}\langle x,x\rangle)^{1/2} = |\alpha|\,\|x\|$, para $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

3. Si $x, y \in X$ es

$$\begin{aligned} \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\langle x,y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|. \end{aligned}$$

   Por tanto, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cuando digamos que X es un espacio prehilbertiano entendemos que X está dotado de la topología definida por la norma correspondiente. En este sentido, podemos decir que todo espacio prehilbertiano es un espacio normado pero el recíproco es falso, como después veremos.

Se dice que X es un **espacio de Hilbert** si X es un espacio prehilbertiano y completo. Así pues, *todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach.*

Sea X un espacio prehilbertiano. El producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ es continuo. En efecto, supongamos que $\lim_n(x_n, y_n) = (x,y)$. Entonces, $\lim_n(x_n) = x$ y $\lim_n(y_n) = y$. Para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq \|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Es claro que el límite, para $n \to \infty$, del último miembro es cero.

En concreto, tenemos que, para $y \in X$, la aplicación $\langle \cdot, y\rangle : X \to \mathbb{K}$ definida en cada $x \in X$ por $\langle x, y\rangle$ es lineal y continua. Análogamente para cada $x \in X$ la aplicación $\langle x, \cdot\rangle : X \to \mathbb{K}$ definida en cada $y \in X$ por $\langle x, y\rangle$ es semilineal y continua.

Observemos que para cada $x, y \in X$ se verifica que

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Esta desigualdad es conocida como la **identidad del paralelogramo**. El teorema que sigue muestra que esta propiedad caracteriza a los espacios prehilbertianos.

TEOREMA 7.2.2 **[Teorema de Von Newmann]**

Si X es un espacio normado cuya norma $\|\cdot\|$ verifica la identidad del paralelogramo entonces la norma deriva de un producto escalar sobre X.

DEMOSTRACIÓN Primero estudiemos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, observemos que entonces se verifica que $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ y esto induce a pensar que si la norma deriva de un producto escalar este tiene que ser $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2]$.

Observemos que $\langle u+v, w\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v+w\|^2 - \|u+v-w\|^2]$ y $\langle u-v, w\rangle = \frac{1}{4}[\|u-v+w\|^2 - \|u-v-w\|^2]$. Así pues,

$$\begin{aligned}\langle u+v, w\rangle + \langle u-v, w\rangle &= \tfrac{1}{4}[2\|u+w\|^2 + 2\|v\|^2 - 2\|u-w\|^2 - 2\|w\|^2] \\ &= \tfrac{1}{2}[\|u+w\|^2 - \|u-w\|^2] = 2\langle u, w\rangle.\end{aligned}$$

Si ahora escribimos $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$ y $w = z$, deducimos que $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Por otra parte es claro que $\langle x, x\rangle \geq 0$ y que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$. Observemos que $0 = \langle x-x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$; por tanto $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Además es sencillo probar por inducción que si $n \in \mathbb{N}$ es $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$ por tanto $\langle -nx, y\rangle = -\langle nx, y\rangle = -n\langle x, y\rangle$, además $\langle x, y\rangle = \langle n\frac{1}{n}x, y\rangle = n\langle \frac{1}{n}x, y\rangle$ y será $\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$. Podemos afirmar, por tanto, que si $p \in \mathbb{Q}$ entonces es $\langle px, y\rangle = p\langle x, y\rangle$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión de $\mathbb{Q}$ con $\lim_n \alpha_n = \alpha$ se verifica que $\langle \alpha x, y\rangle = \lim_n \langle \alpha_n x, y\rangle = \lim_n \alpha_n \langle x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$. Tenemos, por consiguiente, demostrado que $\langle x, y\rangle$ es un producto escalar en X. Veamos cual es la norma $\|\,\|'$ que induce:

$$(\|x\|')^2 = \langle x, x\rangle = \frac{1}{4}[\|2x\|^2] = \|x\|^2.$$

Por tanto, $\|x\|' = \|x\|$.

Supongamos ahora que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y que tenemos en X un producto escalar. Sabemos que se verifica que $4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$. Esto induce a pensar que si la norma deriva de un producto escalar este será $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2]$. Es evidente que si definimos $\langle x, y\rangle$ de esta manera se verifica que $\langle x, x\rangle \geq 0$ para cada $x \in X$.

Comprobaremos las restantes propiedades: $\langle y,x\rangle = \frac{1}{4}[\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|y+ix\|^2 - i\|y-ix\|^2]$ y tenemos que

$$\|y+ix\|^2 = \left\|i\left(\frac{y}{i}+x\right)\right\|^2 = \left\|\frac{y}{i}+x\right\|^2 = \|x-iy\|^2.$$

Análogamente, $\|y-ix\|^2 = \|x+iy\|^2$. Por tanto $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$.

De forma similar al caso real, podemos comprobar, haciendo uso de la identidad del paralelogramo, que $\langle u+v,w\rangle + \langle u-v,w\rangle = 2\langle u,w\rangle$. Por tanto, si $u = \frac{1}{2}(x+y)$, $v = \frac{1}{2}(x-y)$ y $w = z$, deducimos que $\langle x+z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$. La igualdad $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ se deduce como en el caso real. ∎

NOTA 7.2.3

1.- Sabemos que, en el plano, la suma de los lados al cuadrado de un cuadrilátero no tiene porqué coincidir con la suma de los cuadrados de las diagonales, esto se pone de manifiesto en la siguiente igualdad que es válida para un espacio prehilbertiano X. Si $a,b,c,d \in X$ entonces $\|b-a\|^2+\|c-b\|^2+\|d-c\|^2+\|a-d\|^2 = \|c-a\|^2 + \|d-b\|^2 + \|a+c-b-d\|^2$, vamos a demostrarlo.

Si ponemos $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(b-a)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(c-b)$, por la identidad del paralelogramo deducimos que

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|b-a\|^2 + \|c-b\|^2 = \frac{1}{2}\|c-a\|^2 + \frac{1}{2}\|2b-a-c\|^2.$$

Análogamente, si $x = \frac{d-c}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{a-d}{\sqrt{2}}$, deducimos que

$$\|d-c\|^2 + \|a-d\|^2 = \frac{1}{2}\|c-a\|^2 + \frac{1}{2}\|2d-a-c\|^2.$$

Por tanto, sumando tenemos que

$$\|b-a\|^2+\|c-b\|^2+\|d-c\|^2+\|a-d\|^2 = \|c-a\|^2+\frac{1}{2}[\|2b-(a+c)\|^2+\|2d-(a+c)\|^2].$$

Si $x+y = 2b-(a+c)$ y $x-y = 2d-(a+c)$, deducimos que $x = (b+d)-(a+c)$, $y = b-d$. Por la identidad del paralelogramo tenemos que

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|b-d\|^2 + \|(a+c)-(b+d)\|^2.$$

2.- El producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ se define por $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x(i)y(i)$. Este producto escalar puede ser extendido al caso de l_2. En efecto si $x,\ y \in l_2$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x(i)|\cdot|y(i)| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x(i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y(i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|x\|_2\cdot\|y\|_2.\end{aligned}$$

Por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|\,|y(i)|$ es convergente y también lo será $\sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$. Es sencillo comprobar que en l_2 se verifica que $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i)$ es un producto escalar cuya norma asociada es precisamente $\|\cdot\|_2$.

El producto escalar usual de $\mathbb{C}^n$ es $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x(i)\overline{y(i)}$. Este producto escalar puede ser extendido al caso del l_2 complejo. En efecto, de la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|\,|y(i)|$ se deduce la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)}$. Es igualmente sencillo probar que $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\overline{y(i)}$ es un producto escalar en el l_2 complejo cuya norma asociada es $\|\cdot\|_2$

TEOREMA 7.2.4 *Sean X, Y dos espacios preHilbert y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, entonces son equivalentes*

i) $\|T(x)\| = \|x\|$, *para* $x \in X$;

ii) $\langle Tx, Tx'\rangle = \langle x, x'\rangle$, *para* $x, x' \in X$.

DEMOSTRACIÓN Es claro que ii) implica i). Demostraremos que $i)$ implica $ii)$. Sean $x, x' \in X$, entonces $\langle Tx + Tx', Tx + Tx'\rangle = \langle x + x', x + x'\rangle$ pero

$$\langle Tx + Tx', Tx + Tx'\rangle = \langle Tx, Tx\rangle + \langle Tx', Tx'\rangle + \langle Tx, Tx'\rangle + \langle Tx', Tx\rangle$$

y $\langle x + x', x + x'\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x', x'\rangle + \langle x, x'\rangle + \langle x', x\rangle$. Por tanto,

$$\langle Tx', Tx\rangle + \langle Tx, Tx'\rangle = \langle x', x\rangle + \langle x, x'\rangle. \tag{7.2.1}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ deducimos que $\langle Tx, Tx'\rangle = \langle x, x'\rangle$. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aplicamos (11.3.1) al par ix, x' y se obtiene $\langle Tix, Tx'\rangle + \langle Tx', Tix\rangle = \langle ix, x'\rangle + \langle x', ix\rangle$. Dividiendo por i se obtiene

$$\langle Tx, Tx'\rangle - \langle Tx' - Tx\rangle = \langle x, x'\rangle - \langle x', x\rangle \tag{7.2.2}$$

Sumando (11.3.1) y (11.3.2) deducimos que $\langle Tx, Tx'\rangle = \langle x, x'\rangle$. ∎

7.3 Ortogonalidad

DEFINICIÓN 7.3.1 *Sea X un espacio preHilbert y sean $x, y \in X$. Se dirá que x es **ortogonal** a y si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Observemos que entonces $\langle y, x\rangle = 0$ y será y ortogonal a x. Esta situación la denotaremos por $x \perp y$.

Se dirá que $x \in X$ es ortogonal a $A \subset X$ si $x \perp a$, para cada $a \in A$.

El conjunto ortogonal de A es, por definición, el conjunto

$$A^{\perp} = \{x \in X : x \text{ es ortogonal a } A\}.$$

Es sencillo comprobar que $A^{\perp}$ es subespacio vectorial de X.

NOTA 7.3.2 *Sea X un espacio prehilbertiano. Si $x \perp y$ entonces*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Esta igualdad es conocida como **teorema de Pitágoras**. Tenemos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son n elementos de X ortogonales dos a dos, es también sencillo comprobar que $\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$.

Algunas consecuencias inmediatas de las definiciones anteriores son:

1. Si $A \subset X$ es claro que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$.

2. Si $A, B \subset X$ entonces $A \subset B^{\perp}$ si y sólo si $B \subset A^{\perp}$.

3. Si $A \subset B$ entonces $B^{\perp} \subset A^{\perp}$ y $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

4. Para cada $A \subset X$ se verifica que $A^{\perp}$ es cerrado y que $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$.

   En efecto, si $x \in \mathrm{cl}(A^{\perp})$ y $a \in A$ tenemos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A^{\perp}$ tal que $\lim_n x_n = a$ pero entonces $\langle x, a\rangle = \lim\langle x_n, a\rangle = 0$. Por otra parte como $A \subset \overline{A}$ será $(\overline{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$. Si $z \in A^{\perp}$ será $A \subset \{z\}^{\perp}$, por tanto como $\{z\}^{\perp}$ es cerrado será $\overline{A} \subset \{z\}^{\perp}$ y por tanto $z \in (\overline{A})^{\perp}$.

5. Si A es denso en X será $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp} = \{0\}$, ya que $X^{\perp} = \{0\}$. Por tanto, si A es denso en X y $x, y \in X$ son tales que $\langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle$, para $a \in A$, tendremos que también es $\langle a, x - y\rangle = 0$, si $a \in A$, así pues $x = y$.

Sean (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Sea $x \notin A$ se denomina **proyección de x en A** a cada punto $a \in A$ tal que $d(x, a) = d(x, A)$. En general, la proyección de un elemento sobre algún conjunto puede que no exista y, en caso de existir, puede que no sea única. El próximo resultado muestra que esto no ocurre si el conjunto es cerrado y convexo.

TEOREMA 7.3.3 *Sean X un espacio de Hilbert y $A \subset X$ un conjunto convexo y cerrado. Si $x \in X$ entonces existe una única proyección de x en A (que es usual denominar como proyección ortogonal de x en A).*

DEMOSTRACIÓN Si $x \in A$ es claro que la correspondiente proyección es x. Supondremos que $x \notin A$, con lo que será $d(x, A) = \delta > 0$. Para cada $a, b \in A$ deducimos de la identidad del paralelogramo que $2\|x-a\|^2+2\|x-b\|^2 = \|2x-a-b\|^2+\|a-b\|^2$.

Por otro lado, tenemos que $\frac{1}{2}(a+b) \in A$ y, por tanto, $\|2x-a-b\|^2 = 4\|x-\frac{1}{2}(a+b)\|^2 = 4\delta^2$. Por consiguiente, $\|a-b\|^2 \leq 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\delta^2$.

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $a_n \in A$ tal que $\|x-a_n\|^2 \leq \delta^2 + \frac{1}{4n^2}$. Si $n > m$ tendremos que

$$\|a_m - a_n\|^2 \leq \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{m^2}$$

y será $\|a_m - a_n\| \leq \frac{1}{m}$ si $n > m$. Esto prueba que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y que, por tanto, existe $a = \lim_n a_n$. Tenemos que $x \in A$ y $\|x-a\| = \lim_n \|x-a_n\| = \delta$. Si ahora $b \in A$ es tal que $\|x-b\| = \delta$, deducimos, de

$$\|a-b\|^2 \leq 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\delta^2,$$

que $\|a-b\| = 0$ y que por tanto $a = b$. ∎

NOTA 7.3.4

1.- El teorema anterior es válido en el caso de que X sea un espacio prehilbertiano, siempre que A sea completo.

Observemos que si X es de Hilbert y $A \subset X$ es cerrado y convexo entonces existe un único $a \in A$ tal que si $b \in A$ y $b \neq a$ es $\|a\| < \|b\|$.

2.- *Supongamos ahora que X es un espacio de Hilbert y que $A \subset X$ es cerrado, convexo y no vacío. Sea $x \notin A$, entonces $a \in A$ es la proyección de x en A si y sólo si $Re\langle x-a, b-a\rangle \leq 0$, para cada $b \in A$.*

En efecto, supongamos primero el caso en que $a = 0$. Si $a = 0$ es la proyección de x sobre A será $0 \in A$ y para cada $b \in A$ y cada $t \in [0,1]$ será $tb \in A$ así pues $\|x - tb\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|b\|^2$, para cada $t \in [0,1]$. Por tanto, $Re\langle x, b\rangle \leq 0$. Recíprocamente si $Re\langle x, b\rangle \leq 0$ para cada $b \in A$, tenemos que $a = 0$ es la proyección de x en A, ya que $\|x-b\|^2 = \|x\|^2 + \|b\|^2 - 2Re\langle x, b\rangle \geq \|x-a\|^2$.

Supongamos ahora el caso $a \neq 0$, observemos que $\|x-a\| \leq \|x-b\|$ si y sólo si $\|x-a-0\| \leq \|(x-a)-(b-a)\|$. Esto prueba que a es la proyección de x en A si y sólo si 0 es la proyección de $x-a$ en $A-a$ y esto sucederá si y sólo si $Re\langle x-a, b-a\rangle \leq 0$ para cada $b \in A$.

TEOREMA 7.3.5 **(Proyección sobre un subespacio)**

Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \subset X$ un subespacio vectorial cerrado, consideremos la aplicación $P_A : X \to X$ que a cada $x \in X$ le hace corresponder la proyección $P_A(x)$ de x en A. Se verifica:

i) Para cada $x \in X$ es $P_A(x)$ el único elemento de A tal que $x - P_A(x) \in A^\perp$.

ii) Si $x \in A$ es $P_A(x) = x$ y $P_A^2 = P_A$.

iii) P_A es lineal y continua y $\|P_A\| = 1$, si $A \neq \{0\}$.

iv) $\ker P_A = A^\perp$. *Se verifica además que A y $A^\perp$ son complementos algebraicos de X.*

DEMOSTRACIÓN i) Si $x \in X$ tenemos que $Re\langle x - P_A(x), y - P_A(x)\rangle \leq 0$, para cada $y \in A$. Si $y \in A$ tenemos que $y + P_A(x) \in A$ y deducimos que $Re\langle x - P_A(x), y\rangle \leq 0$, para cada $y \in A$. Como también se tiene que $Re\langle x - P_A(x), -y\rangle \leq 0$, deducimos que $Re\langle x - P_A(x), y\rangle = 0$ si $y \in A$. Por otra parte, si $y \in A$ será

$$0 = Re\langle x - P_A(x), iy\rangle = Re(-i\langle x - P_A(x), y\rangle) = \mathrm{Im}\langle x - P_A(x), y\rangle = 0.$$

Por tanto, $x - P_A(x) \in A^{\perp}$.

Supongamos ahora que $z \in A$ es tal que $x - z \in A^{\perp}$. Para cada $y \in A$ se verifica $(x - z) \perp (-y)$ y $\|x - z - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|y\|^2$. Por tanto, $\|x - z\|^2 \leq \|x - (z + y)\|^2$. Como A es subespacio vectorial de X y $z + y \in A$, deducimos que $\|x - z\|^2 \leq \|x - t\|^2$ para cada $t \in A$. Como la proyección es única, será $z = x$.

ii) Si $x \in A$ es claro que $P_A(x) = x$. De todas formas, obsérvese que $x - P_A(x) \in A \cap A^{\perp}$. Por tanto, $\langle x - P_A(x), x - P_A(x)\rangle = \|x - P_A(x)\|^2 = 0$ y $P_A(P_A(x)) = P_A(x)$.

iii) Sean $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Si $z \in A$ se verifica que

$$0 = \alpha\langle x - P_A(x), z\rangle + \beta\langle y - P_A(y), z\rangle = \langle \alpha x + \beta y - (\alpha P_A(x) + \beta P_A(y)), z\rangle.$$

Además, $\alpha P_A(x) + \beta P_A(y) \in A$ y $P_A(\alpha x + \beta y)$ es el único vector u de A tal que $\langle \alpha x + \beta y - u, z\rangle = 0$ si $z \in A$. Por tanto, $P_A(\alpha x + \beta y) = \alpha P_A(x) + \beta P_A(y)$. Si $x \in X$ tenemos que $\|x\|^2 = \|x - P_A(x) + P_A(x)\|^2 = \|x - P_A(x)\|^2 + \|P_A(x)\|^2$. Por consiguiente, $\|P_A(\frac{x}{\|x\|})\| \leq 1$ y deducimos que $\|P_A\| = 1$.

iv) Probaremos que $\ker P_A = A^{\perp}$. En efecto, si $x \in A^{\perp}$, para cada $y \in A$ es $\langle x, y\rangle = 0$, con lo que $\langle x - 0, y\rangle = 0$. Como $\langle x - P_A(x), y\rangle = 0$, por la unicidad de la proyección, deducimos que $P_A(x) = 0$. ∎

Observemos que si $A \subset X$ es un subespacio vectorial cerrado y $x \in A$ se puede escribir x en la forma $x = z + y$ con $z \in A$, $y \in A^{\perp}$ y $P_A(x) + P_{A^{\perp}}(x) = z + y = x$; es decir, $P_A + P_{A^{\perp}} = I$.

Estudiaremos ahora algunas propiedades elementales sobre el ortogonal. Es claro que $B \subset B^{\perp\perp}$ y para $B = A^{\perp}$ deducimos que $A^{\perp} \subset A^{\perp\perp\perp}$. Si $B = A$ es $A \subset A^{\perp\perp}$ y, por tanto, $A^{\perp\perp\perp} \subset A^{\perp}$. Por consiguiente, $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.

En su momento, hemos demostrado que $A^{\perp}$ era un subespacio cerrado; ahora probaremos que *si F es un subespacio cerrado de X entonces* $F^{\perp\perp} = F$. En efecto, tenemos que $F \subset F^{\perp\perp}$. Como F es cerrado será $X = F \oplus F^{\perp}$ y también será $X = F^{\perp\perp} \oplus F^{\perp\perp\perp}$. Como $F^{\perp\perp\perp} = F^{\perp}$, resulta que $X = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}$ y de aquí se puede deducir que $F^{\perp\perp} = F$. En efecto, si, por ejemplo, $y \in F^{\perp\perp}$ será $y = z + z'$ con $z \in F$ y $z' \in F^{\perp}$; entonces $\langle y, z'\rangle = \langle z, z'\rangle + \langle z', z'\rangle$ y será $\langle z', z'\rangle = 0$. Por tanto, $y = z \in F$.

Si F es subespacio vectorial cerrado tal que $A \subset F \subset A^{\perp\perp}$ tenemos que $F^{\perp} \subset A^{\perp}$ y será $F = F^{\perp\perp} \supset A^{\perp\perp}$. Por tanto, $F = A^{\perp\perp}$, y esto prueba que $A^{\perp\perp}$ es el subespacio vectorial cerrado engendrado por A.

Si $(F_i)_{i\in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de X es sencillo comprobar que $(\bigcup_{i\in I} F_i)^{\perp} = \bigcap_{i\in I} F_i^{\perp}$. Si cada F_i es un subespacio vectorial cerrado de X, tenemos que

$$(\bigcup_{i\in I} F_i^{\perp})^{\perp} = \bigcap F_i^{\perp\perp} = \bigcap_{i\in I} F_i$$

y deducimos que

$$(\bigcap_{i\in I} F_i)^{\perp} = (\bigcup_{i\in I} F_i^{\perp})^{\perp\perp}.$$

Este último conjunto es el subespacio vectorial cerrado generado por $\bigcup_{i\in I} F_i^{\perp}$.

7.4 Otras propiedades de los espacios prehilbertianos

7.4.1 La compleción de un espacio prehilbertiano

Sea X un espacio prehilbertiano y recordemos que la inyección canónica $j : X \to X^{**}, j(x) = \hat{x}$ es una isometría y que si $\tilde{X} = \overline{j(X)}$ (clausura en X^{**}) entonces $(\tilde{X}, j)$ es una compleción de X. Definimos en $\tilde{X}$:

$$\begin{array}{lll} \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle & = \frac{1}{4}[\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}-\tilde{y}\|^2 + i\|\tilde{x}+i\tilde{y}\| - i\|\tilde{x}-i\tilde{y}\|^2], & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle & = \frac{1}{2}(\|\tilde{x}+\tilde{y}\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 - \|\tilde{y}\|^2), & \text{si} \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{array}$$

Si $\tilde{x} = \hat{x}, \tilde{y} = \hat{y}$ es claro que $\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle$ coincide con $\langle x, y\rangle$, ya que $\|\tilde{x}+\tilde{y}\| = \|\hat{x}+\hat{y}\| = \|x+y\|$. Por la continuidad de la norma en $\tilde{X}$, es fácil deducir que si $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ y $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\hat{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de $\hat{X}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \hat{x}_n = \tilde{x}$, $\lim_{n\to\infty} \hat{y}_n = \tilde{y}$ entonces $\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle$. Desde aquí ya es elemental comprobar que $\langle \tilde{x}, \tilde{y}\rangle$ es una forma sesquilineal, hermítica y definido positiva. Además, si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es tal que $\lim \hat{x}_n = \tilde{x}$ tenemos que

$$\langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle = \lim_n \langle x_n, x_n\rangle = \lim_n \|x_n\|^2 = \lim_n \|\hat{x}_n\|^2 = \|\tilde{x}\|^2.$$

Por tanto, el producto escalar que hemos definido en $\tilde{X}$ induce en $\tilde{X}$ exactamente la norma de compleción.

7.4.2 Extensión de aplicaciones lineales

Sean X un espacio de Hilbert y $E \subset X$ un subespacio vectorial. Sean Y un espacio de Banach y $f : E \to Y$ una aplicación lineal y continua. Demostraremos que entonces existe una aplicación lineal y continua $\overline{f} : X \to Y$ tal que $\overline{f} = f$ en X y $\|\overline{f}\| = \|f\|$. En efecto, podemos considerar, por densidad, que f está definida en $F = \overline{E}$, que será subespacio vectorial cerrado. Entonces se verifica $X = F \oplus F^{\perp}$ y definimos, para cada $x = x' + x''$ con $x' \in F$ y $x'' \in F^{\perp}$, $\overline{f}(x) = f(x')$. Es claro que f es lineal y que $\overline{f} = f$ en F. Además,

$$\|\overline{f}(x)\| = \|f(x')\| \leq \|f\| \, \|x'\| \leq \|f\| \, \|x' + x''\| = \|f\| \, \|x\|.$$

Por tanto, $\|f\| = \|\overline{f}\|$. Es sencillo observar que la aplicación $\overline{f}$ no es, en general, necesariamente única.

Observemos también que este resultado es válido si X es prehilbertiano. En este caso hubiéramos trabajado con la compleción $\tilde{X}$ de X. Mas adelante demostraremos que si $Y = \mathbb{K}$ entonces la extensión $\overline{f}$ de f tal que $\|\overline{f}\| = \|f\|$ es única.

7.4.3 Espacios Cociente

Sean X un espacio de Hilbert y sea $F \subset X$ un subespacio vectorial cerrado. Consideremos el isomorfismo canónico $\varphi : X/F \to F^{\perp}$. Por medio de φ definimos, para $\overline{x}, \overline{y} \in X/F$,

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \varphi(\overline{x}), \varphi(\overline{y}) \rangle.$$

Es claro que tenemos un producto escalar en X/F y que si se considera la correspondiente norma inducida φ, ésta es isometría de X/F sobre $F^{\perp}$.

Veamos que ese producto escalar induce en X/F precisamente la norma cociente. Sea $\overline{x} \in X/F$ tenemos que

$$\|\overline{x}\| = d(x, F) = \|x - P_F(x)\| = \|\varphi(\overline{x})\| = \langle \varphi(\overline{x}), \varphi(\overline{x}) \rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Así pues, X/F es un espacio de Hilbert.

7.5 El dual de un espacio de Hilbert. Teorema de Frechet-Riesz

Sean X un espacio de Hilbert y $a \in X$. Consideremos la aplicación $f_a : X \to \mathbb{K}$ definida en cada $x \in X$ por $f_a(x) = \langle x, a \rangle$. Claramente f_a es lineal y $|f_a(x)| \leq \|a\| \, \|x\|$. Por tanto, $\|f_a\| \leq \|a\|$. Como $f_a(\frac{a}{\|a\|}) = \langle \frac{a}{\|a\|}, a \rangle = \|a\|$, resulta que $\|f_a\| = \|a\|$.

En el siguiente teorema probaremos que para cada $f \in X^*$ existe $a \in X$ tal que $f = f_a$.

TEOREMA 7.5.1 **[Teorema de Frechet-Riesz]**

Sea X un espacio de Hilbert y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Existe un único $a \in X$ tal que $f = f_a$.

DEMOSTRACIÓN Para $f = 0$ basta tomar $a = 0$. Si $f \neq 0$ buscamos $a \in X$ tal que $f(x) = \langle x, a \rangle$, para $x \in X$. Debería verificarse que $\langle x, a \rangle = 0$ para cada $x \in H = ker f$. Por tanto, sería $a \in H^{\perp}$. Para construir tal elemento, escogemos $b \in H^{\perp}$ con $b \neq 0$. Como $\dim H^{\perp} = 1$, existiría $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $a = \lambda b$. Entonces tendría que suceder que $f(b) = \langle b, a \rangle = \overline{\lambda} \langle b, b \rangle = \overline{\lambda} \|b\|^2$ y sería $\overline{\lambda} = \frac{f(b)}{\|b\|^2}$ y $\lambda = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2}$.

Por consiguiente, tomaremos $a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b$. Veamos que este elemento verifica el enunciado. Tenemos que si $x \in X$ será de la forma $x = y + \alpha b$, con $y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Por tanto, $f(x) = \alpha f(b)$. Por otra parte $\langle x, a \rangle = \langle y + \alpha b, a \rangle = \alpha \langle b, a \rangle = \alpha f(b)$. Por consiguiente, $f(x) = \langle x, a \rangle$.

Si $a' \in X$ es tal que $f(x) = \langle x, a' \rangle$, para $x \in X$, deducimos que $\langle x, a - a' \rangle = 0$ para cada $x \in X$ y por tanto que $a = a'$. ∎

NOTA 7.5.2 1.- Sean X un espacio de Hilbert y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Si Y es un espacio de Banach y $f : F \to Y$ es lineal y continua sabemos que existe $\overline{f} : X \to Y$ lineal y continua tal que $\|\overline{f}\| = \|f\|$. Probaremos ahora que en el caso en que sea $Y = \mathbb{K}$ la extensión $\overline{f}$, con la condición $\|\overline{f}\| = \|f\|$, es única. Después será fácil comprobar que esta afirmación es también cierta si $Y = \mathbb{K}^n$. En efecto, sea $f : F \to \mathbb{K}$ lineal y continua. Existe un único $a \in F$ tal que $f(x) = \langle x, a \rangle$ si $x \in F$, y será $\|f\| = \|a\|$. Sea $g : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua tal que $g = f$ en F y $\|g\| = \|f\| = \|a\|$. Existe $b \in X$ tal que $g(x) = \langle x, b \rangle$ si $x \in X$ y será $\|g\| = \|b\| = \|a\|$. Podemos poner $b = b' + b''$, con $b' \in F$ y $b'' \in F^{\perp}$. Por tanto, $\|b\|^2 = \|b'\|^2 + \|b''\|^2$. Para cada $x \in F$ se verifica $\langle x, a \rangle = f(x) = g(x) = \langle x, b \rangle = \langle x, b' \rangle + \langle x, b'' \rangle = \langle x, b' \rangle$. Por tanto, para cada $x \in F$ se tiene $\langle x, a - b' \rangle = 0$ y $a = b'$. Entonces, de la igualdad $\|b\|^2 = \|a\|^2 + \|b''\|^2$ deducimos que $b'' = 0$ y que $b = b' = a$. Así pues, tiene que ser $g(x) = \langle x, a \rangle$, para $x \in X$.

2.- Si consideramos la aplicación $\varphi : X \to X^*$ definida en cada $a \in X$ por $\varphi(a) = f_a$ tenemos que φ es una isometría biyectiva, además $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ y $\varphi(\alpha a) = \overline{\alpha}\varphi(a)$. Por tanto φ es semilineal.

Por medio de φ podemos definir, para $f_a, f_b \in X^*$, $\langle f_a, f_b \rangle = \langle b, a \rangle$. Es sencillo comprobar que queda definido un producto escalar en X^* y además $\langle f_a, f_a \rangle = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = \|f_a\|^2$. Por tanto, este producto escalar induce la norma del dual y tenemos pues que X^* *es también un espacio de Hilbert.* Por tanto, si $\varphi : X^* \to \mathbb{K}$ es lineal y continua existirá $f_a \in X^*$ tal que $\varphi(f) = \langle f, f_a \rangle$, si $f \in X^*$. Entonces, para $f_b \in X^*$, tenemos que $\varphi(f_b) = \langle f_b, f_a \rangle = \langle a, b \rangle = f_b(a) = \hat{a}(f_b)$. Por consiguiente, $\varphi = \hat{a}$ y queda probado que X es reflexivo.

3.- Sean X, Y espacios de Hilbert y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Consideremos la correspondiente aplicación dual $T^* : Y^* \to X^*$. Tenemos que $\|T^*\| = \|T\|$. Dado $y \in Y$ tenemos que $f_y \in Y^*$ y $T^*(f_y) \in X^*$. Por tanto, existe un único $a \in X$ tal que $T^*(f_y)(x) = \langle x, a \rangle = f_a(x)$, para $x \in X$ y será $T^* f_y = f_a$. Además, $T^*(f_y)(x) = f_y(Tx) = \langle Tx, y \rangle$. Consideremos ahora la aplicación $T^{**} : X^{**} \equiv X \to Y^{**} \equiv Y$. Si $x \in X$ se tiene que $T^{**}(\hat{x}) \in Y^{**}$ y $T^{**}(\hat{x})(f_y) = \hat{x}(T^* f_y) = (T^* f_y)(x) = f_y(Tx) = (\hat{Tx})(f_y)$. Por tanto, $T^{**}(\hat{x}) = (\hat{Tx})$.

7.6 Conjuntos ortogonales

DEFINICIÓN 7.6.1 *Sean X un espacio prehilbertiano y $A \subset X$. Se dice que A es un* ***conjunto ortogonal*** *si para cada $x, y \in A$ con $x \neq y$ se verifica que $x \perp y$. Si además para cada $x \in A$ se verifica que $\|x\| = 1$ se dirá que A es un* ***conjunto ortonormal.***

Es claro que si A es ortogonal y cada $x \in A$ es distinto de cero entonces $A' = \{\frac{a}{\|a\|} : a \in A\}$ es ortonormal. Cuando digamos que una familia $(a_i)_{i \in I}$ de elementos de X es ortogonal entenderemos que $a_i \neq 0$ para cada $i \in I$. En esta situación veamos que $(a_i)_{i\in I}$ es libre: si

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{i_j} = 0, \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I,$$

tenemos que, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, es $\langle \sum_{h=1}^{n} \alpha_h a_{i_h}, a_{i_j} \rangle = \alpha_j \|a_{i_j}\|^2 = 0$ y deducimos que $\alpha_j = 0$.

Teorema 7.6.2 **(Desigualdad de Bessel)**

Sean X un espacio de prehilbertiano y $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal. Para cada $x \in X$ la familia $(|\langle x, a_i\rangle|^2)_{i\in I}$ es sumable y

$$\sum_{i\in I} |\langle x, a_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración Es sencillo comprobar que una familia de números reales positivos es sumable si y sólo si el conjunto de sumas finitas está acotado. Probaremos que para cada $J \subset I$ finito se verifica que $\sum_{i\in J} |\langle x, a_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Para cada familia $(\lambda_i)_{i\in J}$ de escalares se verifica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| x - \sum_{i\in J} \lambda_i a_i \|^2 = \langle x - \sum_{i\in J} \lambda_i a_i, x - \sum_{i\in J} \lambda_i a_i \rangle \\ &= \|x\|^2 - \langle x, \sum_{i\in J} \lambda_i a_i\rangle - \langle \sum_{i\in J} \lambda_i a_i, x\rangle + \langle \sum_{i\in J} \lambda_i a_i, \sum_{i\in J} \lambda_i a_i\rangle \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in J} \overline{\lambda_i}\langle x, a_i\rangle - \sum_{i\in J} \lambda_i \overline{\langle x, a_i\rangle} + \sum_{i\in J} |\lambda_i|^2. \end{aligned}$$

Si, para $i \in J$, elegimos $\lambda_i = \langle x, a_i\rangle$, deducimos que $\sum_{i\in J} |\langle x, a_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. ∎

Nota 7.6.3 Sean X un espacio de Hilbert y $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal. Probaremos que si $x \in X$ entonces $(\langle x, a_i\rangle a_i)_{i\in I}$ es sumable en X. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe $J_0 \in P_F(I)$ tal que $\sum_{i\in J} |\langle x, a_i\rangle|^2 < \varepsilon$ si $J \in P_F(I)$ y $J \cap J_0 = \emptyset$. Por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$\|\sum_{i\in J} \langle x, a_i\rangle a_i\|^2 = \sum_{i\in J} |\langle x, a_i\rangle|^2 < \varepsilon.$$

Como X es un espacio de Hilbert, deducimos que $\sum_{i\in I} \langle x, a_i\rangle a_i$ es sumable.

Si ahora $y \in X$ demostraremos que la familia $(\langle x, a_i\rangle\langle a_i, y\rangle)$ es sumable y su suma es $\langle\sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i, y\rangle$. En efecto, si $J \subset I$ es finito tenemos que

$$\sum_{i\in J}\langle x, a_i\rangle\langle a_i, y\rangle = \langle\sum_{i\in J}\langle x, a_i\rangle a_i, y\rangle$$

y, de la continuidad del producto escalar, deducimos que

$$\sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle\langle a_i, y\rangle = \langle\sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i, y\rangle.$$

Finalmente demostraremos que $\sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i$ es la proyección ortogonal de x sobre el subespacio vectorial cerrado G engendrado por $(a_i)_{i\in I}$. En efecto, para cada $j \in I$ es

$$\langle x - \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i, a_j\rangle = \langle x, a_j\rangle - \langle x, a_j\rangle = 0.$$

Por tanto, es sencillo deducir que $x - \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle\ a_i$ es ortogonal al subespacio vectorial generado por $(a_i)_{i\in I}$.

DEFINICIÓN 7.6.4 *Sean X un espacio de Hilbert y $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal en X. Si el subespacio vectorial cerrado generado por $(a_i)_{i\in I}$ es X diremos que $(a_i)_{i\in I}$ es una* ***base ortonormal de*** X.

TEOREMA 7.6.5 *Sean X un espacio de Hilbert y $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.- $(a_i)_{i\in I}$ es una base ortonormal de X;

2.- Para cada $x \in X$ se verifica $x = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i$;

3.- Para cada $x, y \in X$ es $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle\langle a_i, y\rangle$;

4.- Para cada $x \in X$ es $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, a_i\rangle|^2$ (identidad de Parseval),

5.- $(a_i)_{i\in I}$ es una familia, o sistema, ortonormal maximal.

DEMOSTRACIÓN $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $x - \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i$ es ortogonal a todo vector del subespacio vectorial cerrado generado por $(a_i)_{i\in I}$, que en este caso es todo X. Por tanto, $x - \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i = 0$, por ser ortogonal a sí mismo. Como consecuencia, $x = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Tenemos que $x = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i$, $y = \sum_{i\in I}\langle y, a_i\rangle a_i$. Si $J \subset I$ es finito se verifica

$$\begin{aligned}\langle \sum_{i\in J}\langle x, a_i\rangle a_i, \sum_{i\in J}\langle y, a_i\rangle a_i\rangle &= \sum_{i\in J}\langle x, a_i\rangle \overline{\langle y, a_i\rangle}\\ &= \sum_{i\in J}\langle x, a_i\rangle\langle a_i, y\rangle.\end{aligned}$$

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Basta tomar $x = y$.

$\boxed{4 \Rightarrow 5}$ Si $x \in X$ es tal que $x \perp a_i$ para cada $i \in I$, tendremos que $\|x\|^2 = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle a_i = 0$ y, por tanto, $x = 0$. Esto prueba que $(a_i)_{i\in I}$ es un sistema ortonormal maximal.

$\boxed{5 \Rightarrow 1}$ Sea G el subespacio vectorial cerrado generado por $(a_i)_{i\in I}$. Si fuese $G \neq X$ existirá $z \in X$ tal que $\|z\| = 1$ y $z \in G^{\perp}$. Entonces, $(a_i)_{i\in I} \cup \{z\}$ es ortonormal lo que es contradictorio. ∎

Se puede comprobar que el teorema anterior es válido en el caso de que X sea prehilbertiano, con la salvedad de $5 \Rightarrow 1$ que no es cierto en general.

Demostraremos ahora que

TEOREMA 7.6.6 *En un espacio prehilbertiano todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal*

DEMOSTRACIÓN En efecto, sea $(a_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal y sea

$$\mathcal{L} = \{A \subset X : A \text{ es ortonormal y } a_i \in A, i \in I\}.$$

Consideremos en $\mathcal{L}$ la relación $A \leq B$ si y sólo si $A \subset B$. Esta relación es de orden. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in H}$ es una cadena en $(\mathcal{L}, \leq)$ veamos que $A = \cup_{\alpha\in H}A_\alpha$ es ortonormal. Si $x \in A$ existe $\alpha \in H$ tal que $x \in A_\alpha$, por lo que $\|x\| = 1$. Si $x, y \in A$ y $x \neq y$ tenemos que existen $\alpha, \beta \in H$ tal que $x \in A_\alpha, y \in A_\beta$. Podemos suponer que, por ejemplo, es $A_\alpha \subset A_\beta$. Se verifica entonces $x, y \in A_\beta$ y por tanto $\langle x, y\rangle = 0$. Como toda cadena de $(\mathcal{L}, \leq)$ está acotada superiormente deducimos, del lema de Zorn, que existe en $\mathcal{L}$ un elemento maximal. ∎

TEOREMA 7.6.7 *Si X es un espacio de Hilbert entonces X tiene alguna base ortonormal.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, suponemos que $X \neq \{0\}$ y sea $x_0 \in X$ tal que $\|x_0\| = 1$. Tenemos que $\{x_0\}$ es ortonormal; así pues, existe un sistema ortonormal maximal que contiene a $\{x_0\}$. Por ser X un espacio de Hilbert, tenemos que este sistema será una base ortonormal. ∎

NOTA 7.6.8 1.- **El método de ortonormalización de Gram-Schmidt.**

Sea X un espacio de Hilbert y sea $\{a_1, \dots, a_n\} \subset X$ ortogonal. Consideremos $F = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$. Si $x \in X$ tenemos que $P_F(x)$ será de la forma $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ y entonces $x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ será ortogonal a cada a_i. Por tanto, si $i \in \{1, \dots, n\}$ será $\langle x, a_i \rangle - \lambda_i \|a_i\|^2 = 0$ y $\lambda_i = \frac{\langle x, a_i \rangle}{\|a_i\|^2}$. Por consiguiente, $P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, a_i \rangle}{\|a_i\|^2} a_i$.

Supongamos ahora que tenemos una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos linealmente independientes de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$. Buscamos una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que sea ortogonal y tal que $F_n = \mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$, para $n \in \mathbb{N}$. Tomaremos $b_1 = a_1$. Buscamos b_2 tal que $b_2 \perp b_1$ y $\mathcal{L}(b_1, b_2) = \mathcal{L}(a_1, a_2)$. Claramente b_2 debe ser de la forma $b_2 = \alpha_1 a_1 + a_2$. Como queremos que $\langle b_2, b_1 \rangle = 0$, debe ser $\alpha_1 = -\frac{\langle a_2, b_1 \rangle}{\|a_1\|^2}$.

Supuesto obtenidos $\{b_1, \dots, b_n\}$ ortogonales y con $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$, buscamos b_{n+1} tal que $b_{n+1} \perp b_i$, para $i \in \{1, \dots, n\}$ y

$$\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n, b_{n+1}) = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}).$$

Claramente, b_{n+1} debe ser de la forma

$$b_{n+1} = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n + a_{n+1}.$$

Como queremos que $\langle b_{n+1}, b_i \rangle = 0$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, deducimos que debe ser $\alpha_i = -\frac{\langle a_{n+1}, b_i \rangle}{\|b_i\|^2}$. Por tanto, la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estará definida por $b_1 = a_1$ y

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle a_{n+1}, b_i \rangle}{\|b_i\|^2} a_i = a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1}), \qquad n \geq 1.$$

Es sencillo comprobar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica lo deseado.

El procedimiento descrito se conoce con el nombre de **método de ortogonalización de Gram-Schmidt**. Es claro que dicho método puede ser aplicado a cualquier sistema libre finito. Finalmente, si para cada $i \in \mathbb{N}$ escribimos $c_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$, tenemos que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal y que $\mathcal{L}(c_1, \dots, c_n) = F_n$, si $n \in \mathbb{N}$. Observemos también que $\mathcal{L}(c_i : i \in \mathbb{N}) = \mathcal{L}(a_i : i \in \mathbb{N})$.

2.- Si X es un espacio prehilbertiano de dimensión n entonces X es isométrico a $\mathbb{K}^n$, con el producto escalar usual. En efecto, a partir de cualquier base de X obtenemos una base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$. Definimos $T : \mathbb{K}^n \to X$ por $T(a) = \sum_{i=1}^{n} a(i) z_i$. Claramente T es lineal y

$$\|T(a)\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{n} a(i) z_i, \sum_{i=1}^{n} a(i) z_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} |a(i)|^2 = \|a\|^2.$$

7.7 Isometrías entre espacios de Hilbert

Observemos que, en la situación de la nota anterior, X es un espacio de Hilbert separable. Recordemos que l_2 es un espacio de Hilbert separable, que no es finito dimensional.

TEOREMA 7.7.1 *Si X es un espacio de Hilbert separable e infinito dimensional entonces X es linealmente isométrico a l_2.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que es linealmente independiente y tal que $\overline{\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})} = X$. A partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ podemos obtener, por el método de Gram-Schmidt una sucesión ortogonal $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\overline{\mathcal{L}(z_n : n \in \mathbb{N})} = X$. Se tiene que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de X. Para cada $a \in l_2$ y cada $q \rangle p$ se tiene

$$\|\sum_{i=p+1}^{q} a(i)z_i\|^2 = \sum_{i=p+1}^{q} |a(i)|^2.$$

Por tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a(i)z_i$ converge a un elemento de X y podemos considerar la aplicación $T : l_2 \to X$ definida por $T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)z_i$. Es claro que T es lineal y que

$$\|Ta\|^2 = \langle \sum_{i=1}^{\infty} a(i)z_i, \sum_{i=1}^{\infty} a(i)z_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |a(i)|^2 = \|a\|^2.$$

Por tanto, T es isometría. Veamos que T es sobreyectiva. Sea $x \in X$, sabemos que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, z_i\rangle z_i$ y que $a = (\langle x, z_i\rangle)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$. Por consiguiente, $T(a) = x$. ∎

NOTA 7.7.2 1.- En la situación del teorema anterior, deducimos que todo subespacio cerrado infinito dimensional de X (o de l_2) es isométrico a l_2.

2.- Sea I un conjunto. A las aplicaciones de I en $\mathbb{K}$ las denotamos por $(x_i)_{i\in I}$ y definimos

$$l_2(I) = \{(x_i)_{i\in I} : \sum_{i\in I} |x_i^2| < \infty\}.$$

Veamos que $l_2(I)$ es un espacio vectorial con las operaciones $a + b = (a_i + b_i)_{i\in I}$ y $\alpha a = (\alpha a_i)_{i\in I}$, $\alpha \in \mathbb{K}$. En efecto, para cada $J \subset I$ finito tenemos que

$$\sum_{i\in J} |a_i + b_i|^2 \leq 2(\sum_{i\in J} |a_i|^2 + \sum_{i\in J} |b_i|^2) \leq 2(\sum_{i\in I} |a_i|^2 + \sum_{i\in I} |b_i|^2).$$

Por tanto, $\sum_{i\in I} |a_i + b_i|^2$ es sumable. Análogamente, puede comprobarse que $\sum_{i\in I} |\alpha_i a_i|^2$ es sumable. Si $x, y \in l_2(I)$, para cada $J \subset I$ finito, tenemos que

$$\sum_{i\in J}(x_i\overline{y}_i) = \frac{1}{4}\sum_{i\in J}|(x_i+\overline{y}_i)^2 - (x_i-\overline{y}_i)^2| \leq \frac{1}{4}\sum_{i\in I}|x_i+\overline{y}_i|^2 + \frac{1}{4}\sum_{i\in I}|x_i-\overline{y}_i|^2.$$

Por consiguiente, $\sum_{i\in I}|x_i\overline{y}_i|$ es sumable y podemos definir, para $x, y \in l_2(I)$, la operación

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}|x_i\overline{y}_i|.$$

Es sencillo comprobar que $\langle x, y\rangle$ es un producto escalar en $l_2(I)$. Sea, para $j \in I$, el elemento $e_j = (e_j(i))_{i\in I}$, donde $e_j(i) = \delta_{ij}$. Es claro que $(e_j)_{j\in I}$ es una base ortonormal de $l_2(I)$.

3.- Sea X un espacio de Hilbert con base ortonormal $(a_i)_{i\in I}$. Para cada $i \in I$ consideremos la aplicación $f_{a_i}(x) = \langle x, a_i\rangle$, es claro que $(f_{a_i})_{i\in I}$ es ortonormal en X^*, ya que $\langle f_{a_i}, f_{a_j}\rangle = \langle a_j, a_i\rangle$. Por el teorema de Frechet-Riesz, si $f \in X^*$ será $f = f_a$, para algún $a \in X$. Si $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f_a(x) = \langle x, a\rangle = \langle x, \sum_{i\in I}\langle a, a_i\rangle a_i\rangle = \sum_{i\in I}\overline{\langle a, a_i\rangle}\langle x, a_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\langle a_i, a\rangle\langle x, a_i\rangle = \sum_{i\in I}\langle f_a, f_{a_i}\rangle f_{a_i}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, $f_a = \sum_{i\in I}\langle f_a, f_{a_i}\rangle f_{a_i}$ y tenemos que $(f_{a_i})_{i\in I}$ es una base ortonormal de X^* que se denomina **base dual.**

TEOREMA 7.7.3 *Sean X un espacio de Hilbert y $(a_i)_{i\in I}$ una base ortonormal de X. La aplicación $T : X \to l_2(I)$ definida por $T(x) = (\langle x, a_i\rangle)_{i\in I}$ es una isometría lineal y biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que, para $x \in X$, es $\sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle^2 = \|x\|^2$. Por tanto, $T(x) \in l_2(I)$ y $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2$. Además, si $x, y \in X$, también tenemos que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, a_i\rangle\langle\overline{y, a_i}\rangle = \langle Tx, Ty\rangle.$$

Por otra parte, $(e_i)_{i\in I} \subset \text{Im } T$ y, de la completitud de X, se deduce que Im T es completo y por tanto cerrado. Es claro, entonces, que Im $T = l_2(I)$.

Obsérvese que si la hipótesis fuese que X es un espacio de prehilbertiano entonces, con la misma demostración, la conclusión sería que T es una isometría tal que Im T es denso en $l_2(I)$. ∎

TEOREMA 7.7.4 *a) Sea X un espacio de Hilbert. Todas las bases ortonormales de X tienen el mismo cardinal y este cardinal es denominado* ***dimensión hilbertiana de X.***

b) Sean X, Y dos espacios de Hilbert entonces X e Y son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión hilbertiana.

DEMOSTRACIÓN a) Si X es de dimensión finita entonces el resultado es trivial. Supongamos que $(a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J}$ son bases ortonormales de X. Sea A el conjunto de los elementos de la forma $\sum_{j\in H} \lambda_j a_j$, donde $H \subset I$ es finito y los escalares λ_j son de $\mathbb{Q}$ en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o bien de la forma $\lambda_j = t_j + ir_j$ con $t_j, r_j \in \mathbb{Q}$ en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es claro que A es denso en X y tenemos que $Card(A) = Card(\mathbb{Q}) \times Card(\text{Partes finitas de } I) = Card I$. Por otra parte, si $j, j' \in J$ y $j \neq j'$ es $\|b_j - b_{j'}\| = \sqrt{2}$. Por tanto, $(U(b_j, \frac{1}{2}))_{j\in J}$ es una familia de abiertos disjuntos luego $Card(J) \leq Card(A) = Card(I)$. Razonando de manera similar se prueba que $Card(I) \leq Card(J)$.

b) Primero observemos que si $Card(I) = Card(J)$ entonces existe una biyección $\varphi = Y \to J$ y por medio de φ definimos $T : l_2(I) \to l_2(J)$, en cada $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, por $Tx = \sum_{i\in I} x_i e_{\varphi(i)}$. Es claro que T es una isometría lineal y biyectiva. Recíprocamente, si existe una isometría lineal y biyectiva $T : l_2(I) \to l_2(J)$ es fácil comprobar que $(T(e_i))_{i\in I}$ es base ortonormal de $l_2(J)$; por tanto, $Card(I) = Card(J)$.

Sean X, Y dos espacios de Hilbert con la misma dimensión hilbertiana. Consideremos un conjunto I tal que su cardinal sea esta dimensión. Tenemos que tanto X como Y son linealmente isométricos a $l_2(I)$ y por tanto X e Y serán linealmente isométricos. Supongamos ahora que X e Y son linealmente isométricos y sean I, J conjuntos tales que $Card(I) = dim\, X$ y $Card(J) = dim\, Y$, entonces X y $l_2(I)$, y también Y y $l_2(J)$, son linealmente isométricos. Deducimos que $l_2(J)$ será linealmente isométrico a $l_2(I)$. Por tanto, $Card(I) = Card(J)$. ∎

NOTA 7.7.5 La dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert X no coincide, salvo si X tiene dimensión finita, con la dimensión algebraica de X. Como consecuencia del teorema de Baire, un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una dimensión algebraica numerable. Sin embargo, l^2 sí tiene dimensión hilbertiana numerable. Si no hay lugar a confusión, la dimensión hilbertiana de un espacio de Hilbert X será denominada simplemente como dimensión de X.

7.8 Aplicaciones bilineales y sesquilineales. Teorema de Lax-Milgran

TEOREMA 7.8.1 *Sean X, Y, Z tres espacios normados y $u : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) u es continua en $(0,0)$;

ii) existe $M > 0$ tal que $\|u(x,y)\| \leq M\|x\|\ \|y\|$ para cada $(x,y) \in X \times Y$,

iii) u es continua en $X \times Y$.

DEMOSTRACIÓN En efecto: $\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}$ Dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta\rangle 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$, $\|y\| \leq \delta$ será $\|u(x,y)\| \leq 1$. Entonces, si $x \neq 0$, $y \neq 0$ serán $\|\frac{\delta x}{\|x\|}\| \leq \delta$, $\|\frac{\delta y}{\|y\|}\| \leq \delta$. Por tanto $\|u(\frac{\delta x}{\|x\|}, \frac{\delta y}{\|y\|})\| \leq 1$. Tenemos así:

$$\|u(x,y)\| \leq \frac{1}{\delta^2}\|x\|\ \|y\|$$

$\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}$ Sea $(a,b) \in X \times Y$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|u(x,y) - u(a,b)\| &= \|u(x,y) - u(a,y) + u(a,y) - u(a,b)\| \\ &\leq \|u(x-a,y)\| + \|u(a,y-b)\| \\ &\leq M\|x-a\|\ \|y\| + M\|a\|\ \|y-b\|.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon\rangle 0$, consideremos $\delta_2\rangle 0$ de modo que sea $\delta_2\langle\frac{\varepsilon}{2M\|a\|}$, si $a \neq 0$. Si $\|y-b\|\langle\delta_2$ será $\|y\| \leq \|b\| + \delta_2$ y elegimos $\delta_1\rangle 0$ tal que $\delta_1\langle\frac{\varepsilon}{2M(\|b\|+\delta_2)}$. Entonces, si $\|x-a\|\langle\delta_1$ y $\|y-b\|\langle\delta_2$ es $\|u(x,y)-u(a,b)\|\langle\varepsilon$. Es sencillo comprobar que un resultado similar se verifica también en el caso de una aplicación sesquilineal. ∎

Al conjunto de las aplicaciones bilineales y continuas de $X \times Y$ en Z lo denotamos por $C\mathcal{L}_2(X,Y;Z)$. Con las operaciones usuales, $u+v$ y $\alpha u (\alpha \in \mathbb{K})$, es $C\mathcal{L}_2(X,Y;Z)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Es sencillo comprobar que si $u \in C\mathcal{L}_2(X,Y:Z)$ entonces se verifica que

$$\begin{aligned}&inf\{M\rangle 0 : \|u(x,y)\| \leq M\|x\|\ \|y\|, (x,y) \in X \times Y\} \\ &= sup\{\tfrac{\|u(x,y)\|}{\|x\|\ \|y\|} : (x,y) \in X \times Y, (x,y) \neq (0,0)\} \\ &= sup\{\|u(x,y)\| : (x,y) \in S_X \times S_Y\} = sup\{\|u(x,y)\| : (x,y) \in B_X \times B_Y\}.\end{aligned}$$

Si a este número real lo denotamos por $\|u\|$ se verifica que $\|\ \|$ es una norma en $C\mathcal{L}_2(X,Y:Z)$.

TEOREMA 7.8.2 *Si X e Y son espacios normados y Z es un espacio de Banach entonces $C\mathcal{L}_2(X,Y;Z)$ es también un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Si $(x,y) \in X \times Y$ y $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ entonces

$$\|u_m(x,y) - u_n(x,y)\| \leq \|u_m - u_n\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

De aquí deducimos que $(u_n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Z y, como Z es Banach, existe $u(x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y)$. Es sencillo comprobar que u es bilineal.

Veremos que u es continua. Sea $\varepsilon \rangle 0$, como (u_n) es de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_m - u_n\| \langle \varepsilon$ si $m, n \geq n_0$. Para cada $(x, y) \in X \times Y$ tendremos que $\|u_n(x, y) - u_m(x, y)\| \langle \varepsilon \|x\| \, \|y\|$. Fijando $n \geq n_0$ y tomando límite cuando $m \to \infty$, deducimos que

$$\|u_n(x, y) - u(x, y)\| \leq \varepsilon \|x\| \, \|y\|. \tag{7.8.1}$$

Esto prueba que $u_n - u$ es continua y por tanto, como u_n también es continua, será u continua y, de (7.8.1), deducimos que $\|u_n - u\| \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ en $C\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$. ■

Sea ahora $u \in C\mathcal{L}_2(X, Y; Z)$. Definimos $u_1 : X \to C\mathcal{L}(Y, Z)$ como la aplicación que a cada $x \in X$ le hace corresponder la aplicación $u_1(x) : Y \to Z$ definida, para $y \in Y$, por $u_1(x)(y) = u(x, y)$. Es evidente que u_1 está bien definida y que u_1 es lineal. Además, para $y \in Y$, se verifica

$$\|u_1(x)(y)\| = \|u(x, y)\| \leq \|u\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

Por tanto, $u_1(x) \in C\mathcal{L}(Y, Z)$ y $\|u_1(x)\| \leq \|u\| \, \|x\|$ y $\|u_1\| \leq \|u\|$. Como, para $(x, y) \in X \times Y$, se cumple

$$\|u(x, y)\| = \|u_1(x)(y)\| \leq \|u_1(x)\| \, \|y\| \leq \|u_1\| \, \|x\| \, \|y\|,$$

resulta que $\|u\| = \|u_1\|$. Es ahora sencillo comprobar que la aplicación

$$\varphi : C\mathcal{L}_2(X, Y; Z) \to C\mathcal{L}(X, C\mathcal{L}(Y, Z))$$

definida por $\varphi(u) = u_1$ es lineal y que es una isometría.

Veamos que φ es sobreyectiva. Sea $u_1 \in C\mathcal{L}(X, C\mathcal{L}(Y, Z))$ y definimos $u : X \times Y \to Z$ por $u(x, y) = u_1(x)(y)$. Es sencillo comprobar que u es bilineal y continua y que $\varphi(u) = u_1$.

Finalmente no es difícil comprobar que la aplicación $\phi : \mathcal{L}(X, Y) \times X \to Y$ definida por $\phi(u, x) = u(x)$ es bilineal continua y de norma 1. Análogamente, no es complicado comprobar que la aplicación $\phi : \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z) \to \mathcal{L}(X, Z)$ definida por $\phi(u, v) = v \cdot u$ es bilineal continua y de norma 1.

TEOREMA 7.8.3 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $B : X \times X \to \mathbb{K}$ una forma sesquilineal y continua. Existe una única aplicación lineal y continua $f : X \to X$ tal que $B(x, y) = \langle x, f(y) \rangle$ para cada $(x, y) \in X \times X$.*

DEMOSTRACIÓN Fijado $y \in X$ definimos $g_y : X \to \mathbb{K}$ por $g_y(x) = B(x, y)$. Es claro que g_y es lineal y que también es continua, ya que $|g_y(x)| = |B(x, y)| \leq \|B\| \, \|y\| \, \|x\|$. Por consiguiente, existe un único $z \in X$ tal que, para $x \in X$, se verifica $g_y(x) = \langle x, z \rangle$. Consideremos la aplicación $f : X \to X$ definida por este procedimiento; es decir, $f(y) = z$. Veamos que f es lineal. Sean $y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Para cada $x \in X$ es

$$\begin{aligned} \langle x, f(\alpha y + \beta z) \rangle &= B(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} B(x, y) + \overline{\beta} B(x, z) \\ &= \overline{\alpha} \langle x, f(y) \rangle + \overline{\beta} \langle x, f(z) \rangle = \langle x, \alpha f(y) + \beta f(z) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $f(\alpha y+\beta z) = \alpha f(y)+\beta f(z)$. Veamos que f es continua, para cada $x, y \in X$ tenemos que $|\langle x, f(y)\rangle| = |B(x,y)| \leq \|B\|\ \|x\|\,\|y\|$. Así pues, en particular, para $x = f(y)$, será $\|f(y)\|^2 \leq \|B\|\ \|f(y)\|\ \|y\|$ y deducimos que $\|f(y)\| \leq \|B\|\ \|y\|$. Obsérvese que $\|f\| \leq \|B\|$. Como también $|B(x,y)| = |\langle x, f(y)\rangle| \leq \|x\|\ \|f\|\ \|y\|$ y deducimos que $\|B\| = \|f\|$. ∎

TEOREMA 7.8.4 **[Teorema de Lax - Milgram]**

Sean X un espacio de Hilbert y $B : X\times X \to \mathbb{K}$ una forma sesquilineal, continua y coerciva (i.e. existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha\|x\|^2 \leq |B(x,x)|$ si $x \in X$). Entonces para cada $f \in X^*$ existe un único $a \in X$ tal que $f(x) = B(x,a)$ para cada $x \in E$.

DEMOSTRACIÓN Tenemos que existe $g : X \to X$ lineal y continua tal que $B(x,y) = \langle x, g(y)\rangle$, para $(x,y) \in X \times X$. Se verifica que

$$\alpha\|x\|^2 \leq |B(x,x)| = |\langle x, g(x)\rangle| \leq \|x\|\ \|g(x)\|.$$

Por tanto, $\alpha\|x\| \leq \|g(x)\| \leq \|g\|\ \|x\|$ para $x \in X$; esto prueba que g es inyectiva. Probaremos que g es sobreyectiva. Es claro que $g(X)$ es cerrado y que si $g(X) \neq X$ entonces existe $z \in X$ con $z \neq 0$ y $z \in (g(X))^\perp$. Por tanto, $\alpha\|z\|^2 \leq |B(z,z)| = |\langle z, g(z)\rangle| = 0$ y será $z = 0$, lo cual es una contradicción. Dada $f \in X^*$ sabemos que existe un único $b \in X$ tal que $f(x) = \langle x, b\rangle$ para cada $x \in X$. Como también existe un único $a \in X$ tal que $g(a) = b$, resulta que, para $x \in X$, $f(x) = \langle x, g(a)\rangle = B(x,a)$. Finalmente, si existe $c \in X$ tal que para cada $x \in X$ se verifica que $B(x,a) = B(x,c)$ tendríamos que, para $x = c-a$, $\alpha\|c-a\|^2 \leq |B(x, c-a)| = 0$. Por tanto, $a = c$. ∎

Obsérvese que, para el caso en que B sea positiva, esencialmente el teorema de Lax-Milgram es el teorema de Fréchet-Riesz: si B es una forma bilineal hermítica, positiva y coerciva, entonces la aplicación $(x,y) \mapsto B(x,y)$ define sobre X un producto escalar que puede ser denotado por $\langle x,y\rangle_B$. Como

$$\alpha\|x\|^2 \leq |B(x,x)| = B(x,x) = \langle x,x\rangle_B \leq \|B\| \cdot \|x\|^2,$$

resulta que $\|\cdot\|_B$ (es decir, la norma inducida por el producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$) es una norma equivalente a $\|\cdot\|$ y $(X, \|\cdot\|_B)$ es un espacio de Hilbert. Según el teorema de Fréchet-Riesz, la forma f está definida por un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x,y\rangle_B = B(x,y)$.

7.9 Espacios uniformemente convexos

1.- Sea X un espacio de Banach. Se dice que X es **uniformemente convexo** si, para cada par de sucesiones $(x_n), (y_n)$ de S_X, la igualdad $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$. Vamos a demostrar que esto es equivalente a afirmar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$ y $\|x-y\| \geq \epsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$. En efecto, si X es uniformemente convexo y esta propiedad no se verifica entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta = \frac{1}{n}$ existen

$x_n, y_n \in S_X$ con $\|x_n - y_n\| \geq \epsilon$ y $\|x_n + y_n\| \geq 2(1 - \frac{1}{n})$. Se tendría entonces que $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ pero $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\|$ no es nulo.

Recíprocamente, si X tiene la referida propiedad, pero X no es uniformemente convexo, entonces existen un par de sucesiones, (x_n) e (y_n), de S_X, con $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ pero tales que $\lim \|x_n - y_n\|$ no es cero. Existen pues dos subsucesiones, que denotamos igual, y un $\varepsilon > 0$ tales que $\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon$, si $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo que si $x, y \in S_X$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ se verifica que $\|x + y\| \geq 2(1 - \delta)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ será $\|x_n + y_n\| < 2(1 - \delta) < 2$, lo que es contradictorio.

Demostraremos ahora que si X es un espacio de Hilbert entonces X es uniformemente convexo. En efecto, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un par de sucesiones de S_X con $\lim_n \|x_n + y_n\| = 2$. Para $n \in \mathbb{N}$, se verifica $\|x_n - y_n\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2 - \|x_n + y_n\|^2$ y por tanto $\lim \|x_n - y_n\| = 0$.

2.- Sea X un espacio normado se dice que X es **uniformemente convexo en** $x \in S_X$ si para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X con $\lim \|x_n + x\| = 2$ se verifica que $\lim \|x_n - x\| = 0$; es decir, $\lim(x_n) = x$. Se dice que X es **localmente uniformemente convexo** si es uniformemente convexo en cada $x \in S_X$. Es evidente que si X es uniformemente convexo entonces X es localmente uniformemente convexo. Es fácil demostrar que X es localmente uniformemente convexo si para cada $x \in S_X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta_x > 0$ tal que si $y \in S_X$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ entonces $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta_x$.

Vamos a demostrar que si X es localmente uniformemente convexo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de X tal que $w \lim x_n = x$ y $\lim \|x_n\| = \|x\|$ entonces $\lim(x_n) = x$ (es decir X tiene la propiedad H). En efecto, si $x = 0$ el resultado es claro. Si $x \neq 0$, podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x_n \neq 0$. Es sencillo comprobar que si $y = \frac{x}{\|x\|}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ es $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ entonces $w \lim y_n = y$. Probaremos que $\lim y_n = y$ y de aquí se deduce fácilmente que $\lim(x_n) = x$.

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $y^* \in S_{X^*}$ tal que $y^*(y) = 1$. Sabemos que existe $\delta_y > 0$ tal que si $x \in S_X$ y $\|y - x\| \geq \varepsilon$ se verifica $\|\frac{y+x}{2}\| \leq 1 - \delta_y$. Como $y^*(y) > 1 - \delta_y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y^*(y_n) > 1 - \delta_y$, si $n \geq n_0$. Por tanto, $y^*(\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y) > 1 - \delta_y$. Por consiguiente, $\|\frac{y_n+y}{2}\| > 1 - \delta_y$ y $\|y_n - y\| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

Es sencillo comprobar que el resultado que acabamos de demostrar es también válido para redes.

Finalmente demostraremos el teorema de Milman - Pettis:

TEOREMA 7.9.1 **[Teorema de Milman - Pettis]**

Cada espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.

DEMOSTRACIÓN

En efecto, supongamos que X es uniformemente convexo y sea $x^{**} \in S_{X^{**}}$. Sabemos que existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ en B_X tal que $*$-$w \lim_{\alpha\in D} \hat{x}_\alpha = x^{**}$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que si $x, y \in S_X$ y $\|x - y\| \geq \varepsilon$ es $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$. Sea $x^* \in X^*$ tal que $x^{**}(x^*) > 1 - \delta$. Como

$$\lim_{\alpha\in D} \hat{x}_\alpha(x^*) = \lim_{\alpha\in D} x^*(x_\alpha) = x^{**}(x^*),$$

existe $\alpha_0 \in D$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0$, $\alpha \in D$, se verifica $x^*(x_\alpha) > 1-\delta$. Entonces, para cada $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$ es $x^*(\frac{1}{2}x_\alpha + \frac{1}{2}x_{\alpha'}) > 1-\delta$ y será

$$\|\frac{x_\alpha + x'_\alpha}{2}\| > 1-\delta.$$

Por consiguiente, $\|x_\alpha - x_{\alpha'}\| \leq \varepsilon$ y la red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ es de Cauchy. Esto prueba que existe $x \in X$ tal que $\lim\limits_{\alpha\in D}(x_\alpha) = x$ y tenemos que en X^{**} es $*$-$w \lim\limits_{\alpha\in D} \hat{x}_\alpha = \hat{x}$, $*$-$w \lim\limits_{\alpha\in D} \hat{x}_\alpha = x^{**}$. Por tanto, $\hat{x} = x^{**}$ ∎

En capítulos posteriores se estudiaran con más profundidad conceptos similares a los que acabamos de ver.

Tema 8

Introducción a los espacios de sucesiones y a los espacios de funciones continuas

8.1 Espacios de sucesiones

Si x, y son dos sucesiones de números reales. Escribiremos $x \leq y$ si y sólo si $x(n) \leq y(n)$, para $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por $(E, \| \ \|_E)$ a cualquier espacio normado de sucesiones de números reales que verifique la siguiente condición:

m) Si $x \in E$ y $0 \leq x$ entonces para cada sucesión real y tal que $0 \leq y \leq x$ se verifica que $y \in E$ y $\|y\|_E \leq \|x\|_E$.

Observemos que c_0, l_∞ y $l_p (p \geq 1)$ cumplen esta condición m).

Consideremos ahora un espacio normado $(X, \| \ \|)$. Sobre el conjunto de las sucesiones en X podemos definir las operaciones usuales:

$$x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \alpha x = (\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \alpha \in \mathbb{K},$$

donde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dada una sucesión x en X, denotaremos por $N(x)$ a la sucesión de números reales $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$. Si $(E, \| \ \|_E)$ es un espacio normado de sucesiones reales con la condición m) denotaremos por $E(X)$ al conjunto de las sucesiones en X tales que $N(x) \in E$. Si $x \in E(X)$ denotaremos por $\|x\|_E$ al número definido por $\|N(x)\|_E$.

Por ejemplo, si $x \in l_\infty(X)$ entonces $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ y

$$\|x\|_\infty = \|(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que de la condición m) de E se deduce lo siguiente:

Si $a \in E$ y $0 \leq a$ entonces para cada sucesión $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $N(x) \leq a$ se verifica que $N(x) \in E$ y, por tanto, $x \in E(X)$ con $\|x\|_E = \|N(x)\|_E \leq \|a\|_E$.

Si denotamos por 0 a la sucesión constante cuyos elementos son el cero de X, es claro que $0 \in E(X)$ y que $0 + x = x$ si $x \in E(X)$; además, $\|0\|_E = 0$. Si $x \in E(X)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ y, como $N(x) \in E$, se verifica $N(\alpha x) \in E$. Por tanto, $\alpha x \in E(X)$; además

$$\|\alpha x\|_E = \|N(\alpha x)\|_E = |\alpha|\ \|N(x)\|_E = |\alpha|\ \|x\|_E.$$

Sean x, y dos elementos de $E(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\|x_n + y_n\| \leq \|x_n\| + \|y_n\|$ y $N(x+y) \leq N(x)+N(y)$. Por tanto, $N(x+y) \in E$ y $x+y \in E(X)$. Además se verifica

$$\|x+y\|_E = \|N(x+y)\|_E \leq \|N(x)+N(y)\|_E \leq \|N(x)\|_E+\|N(y)\|_E = \|x\|_E+\|y\|_E.$$

Con todo esto ha quedado probado que $E(X)$ con la norma $\|x\|_E$ es un espacio normado.

Es importante que resaltemos algunos casos particulares de espacios $E(X)$.

- $l_\infty(X)$, el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Este espacio se dota con la norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

- $l_p(X)$, $p \geq 1$, es el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p < \infty$. Este espacio se dota con la norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- $c_0(X)$, el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $\lim \|x_n\| = 0$. Este espacio se dota con la norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

El espacio de sucesiones c no cumple la propiedad m). A pesar de esto, podíamos intentar generalizar y considerar $c(X)$ como el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tales que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, pero el hecho de que la sucesión de las normas sea convergente no da apenas información sobre el comportamiento topológico de la sucesión. Además, observemos que pudiera ser que las sucesiones $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\|y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ fuesen convergentes pero que $(\|x_n + y_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ no fuese una sucesión convergente. Lo usual es considerar que $c(X)$ es el siguiente espacio:

- $c(X)$, el conjunto de las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tales que $\lim x_n$ existe en X. Este espacio se dota con la norma

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Hemos de entender que en este caso $c(X)$ no es exactamente un espacio del tipo $E(X)$. Observemos que $c_0(X)$ es subespacio de $c(X)$ y $c(X)$ es subespacio de $l_\infty(X)$.

- $\mathbb{R}(X)$ es simplemente X con su propia norma. $\mathbb{R}^2(X)$ es $X \times X$ con una norma que dependerá de la escogida en $\mathbb{R}^2$ (pero que en definitiva siempre inducirá en $X \times X$ la topología producto).

- $E(\mathbb{R})$ es el conjunto de las sucesiones reales $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ está en E. Por tanto $l_\infty(\mathbb{R}) = l_\infty$, $c_0(\mathbb{R}) = c_0$ y $l_p(\mathbb{R}) = l_p$ si $p \geq 1$.

Los espacios del tipo $E(X)$ admiten una generalización que es la siguiente. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios normados. Denotamos por $E(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al espacio de las sucesiones $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \in X_n$ si $n \in \mathbb{N}$ y $N(x) = (\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ (en cada X_n la norma es denotada de la misma forma por $\|\cdot\|$).

En los casos en que $E = l_p$, $p \in [1, +\infty]$ es usual denotar a estos espacios por $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_p$. No entraremos aquí en el estudio de este tipo de espacios pero más adelante propondremos que se estudien cuestiones relativas a ellos.

Nos parece conveniente proponer que se estudien las condiciones que garanticen el que $E(X)$ sea un espacio de Banach.

Nota 8.1.1 Sea $\gamma\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de $\mathbb{N}$, con la topología discreta. Consideremos el espacio $C(\gamma\mathbb{N}, X)$, de las funciones continuas definidas en $\gamma\mathbb{N}$ y con valores en X, dotado de la norma del supremo. Consideremos la aplicación $\varphi : c(X) \to C(\gamma\mathbb{N}, X)$ definida de la siguiente forma: para cada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$ sea $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ la aplicación de $\gamma\mathbb{N}$ en X definida por $f(n) = x_n$ si $n \in \mathbb{N}$ y $f(\infty) = \lim x_n$. Es sencillo comprobar que φ es una isometría lineal sobreyectiva.

Teorema 8.1.2 *Sean X, Y dos espacios normados. Si X e Y son isomórficos entonces también lo serán $E(X)$ y $E(Y)$.*

Demostración Sea T un isomorfismo de X sobre Y y sean $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que, para $x \in X$, $\alpha\|x\| \leq \|Tx\| \leq \beta\|x\|$. Definimos, para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(X)$, $\tilde{T}x = (Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Veremos que $\tilde{T}x \in E(Y)$. Es claro que $\alpha N(x) \leq N(\tilde{T}x) \leq \beta N(x)$. Por tanto, como $\beta N(x) \in E$, será $N(\tilde{T}x) \in E$ y $\tilde{T}x \in E(Y)$. Además,

$$\alpha\|x\|_E = \alpha\|N(x)\|_E \leq \|\tilde{T}x\|_E = \|N(\tilde{T}x)\|_E \leq \beta\|N(x)\|_E = \beta\|x\|_E.$$

Por tanto sólo queda probar que $\tilde{T}$ es sobreyectiva.

Sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(Y)$ y sea $x_n \in X$ tal que $Tx_n = y_n$; es decir, $T^{-1}y_n = x_n$. Razonando con T^{-1}, como hicimos con T, deducimos que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(X)$ y que $\tilde{T}x = y$. ■

TEOREMA 8.1.3 *Sean X, Y dos espacios normados entonces $E(X \times Y)$ es isomórfico a $E(X) \times E(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN Usaremos tanto en $X \times Y$ como en $E(X) \times E(Y)$ la norma $\| \|_1$. Definimos la aplicación $T : E(X) \times E(Y) \to E(X \times Y)$ de la siguiente forma: si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(X)$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(Y)$ entonces $z = T(x,y) = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $N(z) = (\|(x_n, y_n)\|)_{n\in\mathbb{N}} = (\|x_n\| + \|y_n\|)_{n\in\mathbb{N}} = N(x) + N(y)$. Por tanto $N(z) \in E$ y será $z \in E(X \times Y)$ y

$$\begin{aligned}\|T(x,y)\|_E &= \|z\|_E = \|N(z)\|_E = \|N(x) + N(y)\|_E \leq \|N(x)\|_E + \|N(y)\|_E \\ &= \|x\|_E + \|y\|_E.\end{aligned}$$

Además, como $N(x) \leq N(z)$ y $N(y) \leq N(z)$, será $\|x\|_E = \|N(x)\|_E \leq \|N(z)\|_E = \|z\|_E = \|T(x,y)\|_E$ y análogamente $\|y\|_E \leq \|T(x,y)\|_E$. Por consiguiente, $\|(x,y)\| \leq 2\|T(x,y)\|_E$.

Sólo nos queda probar que T es sobreyectiva. Sea $z = ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in E(X \times Y)$ y denotemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $N(x) \leq N(z) \in E$ y $N(y) \leq N(z) \in E$. Por consiguiente, $x \in E(X)$, $y \in E(Y)$ y $(x,y) \in E(X) \times E(Y)$, además $T(x,y) = z$.

Observemos finalmente que, como consecuencia del teorema anterior, podemos afirmar lo siguiente:

Supongamos que en $X \times Y$ se utiliza otra norma $\| \|'$ equivalente a $\| \|_1$, y que en $E(X) \times E(Y)$ se utiliza $\| \|''$ equivalente a $\| \|_1$. Tenemos que $(X \times Y, \| \|')$ es isomórfico a $(X \times Y, \| \|_1)$. Por tanto $E(X \times Y, \| \|')$ es isomórfico $E(X \times Y, \| \|_1)$, que es isomórfico a $(E(X) \times E(Y), \| \|_1)$ y que, a su vez, es isomórfico a $(E(X) \times E(Y), \| \|'')$. Así pues la afirmación del enunciado no depende de la norma utilizada en la demostración. ∎

TEOREMA 8.1.4 *Sea E cualquiera de los espacios l_∞, c_0 o $l_p (p \geq 1)$ entonces para cada espacio normado X tenemos que $E(X) \times X$ es isomórfico a $E(X)$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que E es estable y consideremos el isomorfismo $S : E \times \mathbb{K} \to E$ definido por $S(x, \alpha) = z$, donde $z(1) = \alpha$ y $z(n) = x(n-1)$, para $n > 1$. Consideremos en $E \times \mathbb{K}$ la norma $\| \|_1$. Existen $\lambda > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\lambda(\|a\|_E + |\alpha|) \leq \|S(a, \alpha)\|_E \leq \beta(\|a\|_E + |\alpha|)$, para $a \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Considerando en $E(X) \times X$ la norma $\| \|_1$, definimos T: $E(X) \times X \to E(X)$ de la siguiente forma: $T(x, x_0) = y$ donde $y_1 = x_0$ e $y_n = x_{n-1}$, para $n > 1$. Entonces $N(y) = S(N(x), \|x_0\|) \in E$, ya que $N(x) \in E$. Por tanto, $y \in E(X)$ y

$$\begin{aligned}\lambda\|(x, x_0)\|_1 &= \lambda(\|x\|_E + \|x_0\|) \leq \|S(N(x), \|x_0\|)\|_E = \|N(y)\|_E = \|y\|_E \\ &= \|T(x, x_0)\|_E \leq \beta(\|x\|_E + \|x_0\|) = \beta\|(x_1, x_0)\|_1.\end{aligned}$$

Sólo queda por probar que T es sobreyectiva. Sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(X)$ y sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = y_{n+1}$ si $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $x \in E(X)$ y que $T(x, y_1) = y$. ∎

Los dos siguientes teoremas son sencillamente sorprendentes:

TEOREMA 8.1.5 *Sea E cualquiera de los espacios l_∞, c_0 ó $l_p(p \geq 1)$ entonces $E(E)$ es isométrico a E.*

DEMOSTRACIÓN Sea $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un elemento de $E(E)$. Definimos la sucesión de escalares y de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lcll} y(1) & = & x_1(1) & \text{(primer escalón)} \\ y(2) & = & x_2(1), y(3) = x_1(2) & \text{(segundo escalón)} \\ y(4) & = & x_3(1), y(5) = x_2(2), y(6) = x_1(3) & \text{(tercer escalón)} \end{array}$$

Supuesto que hayamos subido $n-1$ escalones tendremos definidas las $1+2+\cdots+n-1 = \frac{1}{2}n(n-1)$ primeras coordenadas de y y las n siguientes, las que van de $y(\frac{1}{2}n(n-1)+1)$ a $y(\frac{1}{2}n(n+1))$, se definen sucesivamente por $x_n(1)$, $x_{n-1}(2), \ldots, x_1(n)$.

Observemos que en el escalón n se habrán utilizado ya las n primeras coordenadas de x_1 y la primera de x_n. Así pues, una coordenada j cualquiera de cierto x_m habrá sido utilizada como coordenada de y, si ya hemos recorrido $m+j-1$ escalones; $x_{m+j-1}(1)$, $x_{m+j-2}(2), \ldots, x_m(j), \ldots, x_1(m+j-1)$. Por tanto, para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}$ es $x_m(j) = y(k)$, donde $k = 1+2+\cdots+(m+j-2)+j$.

Tenemos pues establecida una aplicación $T : E(E) \to E$ que supondremos que está bien definida. Más adelante probaremos que efectivamente T está bien definida. Por su construcción, es claro que T es lineal e inyectiva. Veamos que T es sobreyectiva. Sea $y \in E$ y recorramos el camino de las anteriores relaciones al revés; es decir, $x_1(1) = y(1)$, $x_1(2) = y(3), \ldots, x_m(j) = y(k)$, donde $k = 1+2+\cdots+(m+j-2)+j$. Es claro que $x_n \in E$, para $n \in \mathbb{N}$, ya que x_n es una subsucesión de un elemento de E.

En el caso en que $E = c_0$ ó $E = l_\infty$ deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|x_n\|_E \leq \|y\|_E$, ya que x_n es subsucesión de y. Por tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(E)$ y $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_E = \sup\{\|x_n\|_E : n \in \mathbb{N}\} \leq \|y\|_E$ (obsérvese que $\|x_n\| \leq sup\{\|y_j\| : j \geq 1+2+\cdots+n\}$).

En el caso en que $E = l_p, p \geq 1$, tenemos que si $N \in \mathbb{N}$ es

$$\|x_1\|_p^p + \cdots + \|x_N\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_1(i)|^p + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty} |x_N(i)|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |y(i)|^p = \|y\|_p^p.$$

Por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(E)$ y $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_E \leq \|y\|_E$.

Es evidente que $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = y$ y ha quedado probado que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_E \leq \|T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_E$.

Demostraremos ahora que T está bien definida y que es una isometría. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E(E)$ y sea $y = T((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Demostraremos que $y \in E$ y que $\|y\|_E \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_E$.

Supongamos que $E = l_\infty$. Tenemos que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup\{\|x_n\|_\infty : n \in \mathbb{N}\}$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}$ se verifica $|x_n(j)| \leq \|x_n\|_\infty \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$. Por tanto, para $i \in \mathbb{N}$, también será $|y(i)| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$ y tendremos que $\|y\|_\infty \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$.

Supongamos que $E = c_0$, probaremos que $y \in c_0$. Tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ es $\|x_n\| \leq \varepsilon$. Si consideramos $x_1, \dots, x_N$, es evidente que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $i > M$ es $|x_n(i)| \leq \varepsilon$, para cada $n \in \{1, \dots, N\}$. Si $j > 1 + 2 + \cdots + (N + M - 2) + M$ es claro que $y(j)$ es o bien una coordenada de x_n para $n > N$ (y entonces $|y(j)| < \varepsilon$) o bien $y(j)$ es del tipo $x_n(i)$, con $n \in \{1, \dots, N\}$ pero $i > M$. Así pues, también $|y(j)| < \varepsilon$. La demostración de que $\|y\| \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|$ es similar al caso $E = l_\infty$.

Finalmente, supongamos que $E = l_p$. Veamos que $y \in l_p$. Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos $\sum_{i=1}^{N} |y(i)|^p$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 + 2 + \cdots + n > N$ y esto significa que $y(1), \dots, y(N)$ han sido obtenidos con coordenadas de $x_1, \dots, x_n$. Así pues,

$$\sum_{i=1}^{N} |y(i)|^p \leq \|x_1\|_p^p + \cdots + \|x_n\|_p^p \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p^p.$$

Por tanto $y \in l_p$ y $\|y\|_p \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p$. ∎

DEFINICIÓN 8.1.6 *Sean X, Y dos espacios normados, se dice que X es un factor de Y si existe un espacio normado X_1 tal que Y es isomórfico a $X \times X_1$.*

TEOREMA 8.1.7 **[Teorema de Pelczynski]**.

Sea E cualquiera de los espacios l_∞, c_0 o $l_p (p \geq 1)$. Supongamos que X es un espacio normado tal que $E(X)$ es isomórfico a X. Sea Y otro espacio normado tal que X es factor de Y e Y es factor de X. Entonces X e Y son isomórficos.

DEMOSTRACIÓN Como Y es factor de X existe un espacio normado Y_1 tal que $X \cong Y \times Y_1$. Como X es factor de Y, existe un espacio normado X, tal que $Y \cong X \times X_1$. Probaremos que tanto X como Y son isomórficos a $X \times Y$.

Tenemos que

$$X \cong E(X) \cong E(Y \times Y_1) \cong E(Y) \times E(Y_1) \cong E(Y) \times Y \times E(Y_1).$$

Como $E(Y) \times E(Y_1) \cong X$, deducimos que $X \cong X \times Y$. También tenemos $Y \cong X \times X_1 \cong E(X) \times X_1 \cong E(X) \times X \times X_1$. Como $E(X) \times X_1$ es isomórfico a Y, deducimos que $Y \cong X \times Y$. ∎

NOTA 8.1.8 1.- En el teorema anterior, puede ser complicado el conocer en detalle la expresión del isomorfismo entre X e Y. Si en el teorema anterior X es uno de los espacios l_∞, c_0, $l_p (p \geq 1)$ tendremos que ciertamente es $E(X) \cong X$. El hecho de que $Y \cong X \times Y$ puede ser deducido sin necesidad de usar el espacio $E(X)$, ya que se tiene que $X \times X \cong X$ y, por tanto, $Y \cong X \times X_1 \cong X \times X \times X_1$. Como $Y \cong X \times X_1$, deducimos que $Y \cong X \times Y$.

2.- En el siguiente teorema probaremos que si X es un espacio normado entonces el dual de $c(X)$ es linealmente isométrico a $l_1(X^*)$. Queremos proponer que también se estudien los espacios duales de $c_0(X)$, $l_1(X)$ y $l_p(X)$, $(p \geq 1)$. En una situación más general, pueden ser estudiados los espacios duales de $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_p$, donde $p \in (1, +\infty)$ y $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de espacios normados. Proponemos también que se estudien las condiciones que garanticen la reflexividad de estos espacios. Hacemos también una propuesta similar pero para la separabilidad.

TEOREMA 8.1.9 *Sea X un espacio normado; entonces, el dual de $c(X)$ es linealmente isométrico a $l_1(X^*)$.*

DEMOSTRACIÓN Los elementos de $l_1(X^*)$ serán denotados por $(y_n^*)_{n\geq 0}$.

Para cada $y = (y_n^*)_{n\geq 0}$ de $l_1(X^*)$ definimos la aplicación $Ty : c(X) \to \mathbb{K}$ por

$$Ty((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = y_0^*(x_\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(x_i),$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(X)$. Claramente Ty es lineal, además si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_{c(X)}$ tenemos que

$$|Ty(x)| \leq \|y_0\|^* \, \|x_\infty\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\| \, \|x_i\| \leq \|y\|.$$

Por tanto, Ty es continua y $\|Ty\| \leq \|y\|$. Veremos ahora que $\|y\| \leq \|Ty\|$.

Sea $y = (y_n^*)_{n\geq 0} \in l_1(X^*)$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{\infty} \|y_i^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$, sea $x_i \in S_X$ tal que $y_i^*(x_i) > \|y_i^*\| - \dfrac{\varepsilon}{3(N+1)}$. Sea $x_\infty \in S_X$ tal que $y_0^*(x_\infty) > \|y_0^*\| - \dfrac{\varepsilon}{3(N+1)}$. Sea $x \in c(X)$ definido por $x(i) = x_i$, si $i \leq N$, y $x(i) = x_\infty$, si $i > N$. Tenemos que $x \in B_{c(X)}$ y que

$$\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} y_i^*(x_\infty) \right| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \|y_i^*\|.$$

Por tanto, $Ty(x) = y_0^*(x_\infty) + y_1^*(x_1) + \cdots + y_N^*(x_N) + \sum_{i=N+1}^{\infty} y_i^*(x_\infty)$ y será

$$\begin{aligned}
\|y\| &= \|y_0^*\| + \cdots + \|y_N^*\| + \sum_{i=N+1}^{\infty} \|y_i^*\| \\
&< y_0^*(x_\infty) + \frac{\varepsilon}{3(N+1)} + y_1^*(x_1) + \frac{\varepsilon}{3(N+1)} + \cdots + y_N^*(x_N) + \frac{\varepsilon}{3(N+1)} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= Ty(x) - \sum_{i=N+1}^{\infty} y_i^*(x_\infty) + \frac{2\varepsilon}{3} \leq |Ty(x)| + \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} y_i^*(x_\infty) \right| + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&\leq |Ty(x)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así pues, $\|y\| \leq \|Ty\|$ y, por tanto, $\|Ty\| = \|y\|$.

Probaremos que T es sobreyectiva. Sea $f \neq 0$ una aplicación lineal y continua de $c(X)$ en $\mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos una aplicación y_n^* de X en $\mathbb{K}$ por $y_n^*(x) = f(0, \ldots, 0, \overset{n}{x}, 0, \ldots)$. Tenemos que y_n^* es lineal con $\|y_n^*\| \leq \|f\|$. Sea z^* la aplicación de X en $\mathbb{K}$ definida por $z^*(x) = f(x, x, \ldots, x, \ldots)$. Es claro que z^* es también lineal y que $\|z^*\| \leq \|f\|$.

Demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\|$ es convergente. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $N \in \mathbb{N}$. Para $i \in \{1, \ldots, N\}$, sea $x_i \in S_X$ tal que $y_i^*(x_i) > \|y_i^*\| - \frac{\varepsilon}{N}$. Sea $x = (x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$. Tenemos que $x \in B_{c(X)}$ y que

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots) = y_1^*(x_1) + \cdots + y_N^*(x_N) > \|y_1^*\| - \frac{\varepsilon}{N} + \cdots + \|y_N^*\| - \frac{\varepsilon}{N}.$$

Por consiguiente, $\|y_1^*\| + \cdots + \|y_N^*\| < f(x) + \varepsilon \leq \|f\| + \varepsilon$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\| \leq \|f\|$.

Consideremos $y_0^* = z^* - \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*$; tenemos que $y = (y_n^*)_{n \geq 0}$ es un elemento de $l_1(X^*)$ y probaremos que $Ty = f$.

Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c(X)$. Deseamos probar que

$$f((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = y_0^*(x_\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(x_i),$$

o, lo que es lo mismo, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(x_i) = f(x) - z^*(x_\infty) + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^* \right)(x_\infty).$$

Es decir, que $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(x_i - x_\infty) = f(x) - z^*(x_\infty)$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ es $\|x_\infty - x_m\| < \frac{\varepsilon}{\|f\|}$. Tenemos que

$$\left| \sum_{i=1}^{m} y_i^*(x_i - x_\infty) - (f(x) - z^*(x_\infty)) \right| = |f(0, \ldots, 0, x_\infty - x_{m+1}, \ldots)| \leq \|f\| \frac{\varepsilon}{\|f\|} = \varepsilon.$$

Así pues, $Ty = f$. ∎

8.2 Introducción a los espacios de funciones continuas

Trataremos ahora algunos resultados básicos sobre espacios de funciones continuas. Uno de los resultados más destacados es el teorema de Stone-Weierstrass que se vio en el capítulo 1. Otros resultados dependen de la teoría de la medida o de recursos que todavía no podemos usar. Este tipo de resultados serán, de momento, omitidos.

TEOREMA 8.2.1 *Sean S y T dos espacios topológicos y supongamos que existe una aplicación φ de S en T que es continua y sobreyectiva. Entonces $BC(T)$ es linealmente isométrico a un subespacio de $BC(S)$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $H : BC(T) \to BC(S)$ la aplicación definida, para $g \in BC(T)$, por $H(g) = g\varphi$. Es claro que $H(g) \in BC(S)$ y es fácil comprobar que H es lineal. Además, como φ es sobreyectiva, tenemos que $\sup\{|g(\varphi(x))| : x \in S\} = \sup\{|g(t)| : t \in T\}$. Por tanto, $\|H(g)\| = \|g\|$. ∎

NOTA 8.2.2 a) Obsérvese que si, en el teorema anterior, fuese φ un homeomorfismo, entonces H será sobreyectiva. En efecto, si $f \in BC(S)$ tenemos que $f\varphi^{-1} \in BC(T)$ y $H(f\varphi^{-1}) = f$.

b) Sea S un espacio topológico normal y sea A un subconjunto cerrado de S. Consideremos la aplicación $R : BC(S) \to BC(A)$ definida, para $g \in BC(S)$, por $R(g) = g_A$. Tenemos que R es lineal y también es continua, ya que $\|R(g)\| \leq \|g\|$. Como consecuencia del teorema de Tietze, tenemos que si $f \in BC(A)$ entonces existe $\overline{f} \in BC(S)$ tal que $\overline{f}_A = f$ y $\|\overline{f}_A\| = \|f\|$; es decir, $R(\overline{f}) = f$. Así pues, R será lineal continua y sobreyectiva y por tanto abierta. Deducimos que si $BC(S)$ es separable entonces $BC(A)$ también lo será.

La conclusión a la que hemos llegado puede ser falsa en el caso en que A no sea cerrado. Por ejemplo, consideremos en $\mathbb{R}$ el conjunto $A = (0,1)$. Tenemos que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a A y por tanto $BC(A)$ es isométrico a $BC(\mathbb{R})$. Por otra parte, $\mathbb{N}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$ y $BC(\mathbb{N}) = l_\infty$ no es separable. Por tanto, $BC(\mathbb{R})$ no puede ser separable y deducimos que $BC(A)$ no es separable. Tenemos, sin embargo, que $A \subset I = [0,1]$ y $C(I)$ sí es separable.

TEOREMA 8.2.3 *Sea S un espacio topológico y sea E un subespacio vectorial de $BC(S,\mathbb{R})$ con la siguiente propiedad: para cada par A, B de subconjuntos cerrados no vacíos y disjuntos de S existe $f \in E$ tal que $f(S) \subset [0,1], f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$. Entonces, si la función constante 1, que denotaremos por e, pertenece a E se verifica que E es denso en $BC(S,\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $g \in BC(S)$ y sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe $f \in E$ tal que $\|g - f\| < \varepsilon$. Sea $\alpha = \inf g(S)$. Como $g(S)$ también está acotado superiormente existirá el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(t) \leq \alpha + n\varepsilon$, para $t \in S$. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $L_i = \{t : g(t) \leq \alpha + (i-1)\varepsilon\}$ y $U_i = \{t : g(t) \geq \alpha + i\varepsilon\}$. Si $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ tenemos que Li y Ui son cerrados no vacíos y disjuntos. Por tanto, existe $f_i \in E$ tal que $f_i(S) \subset [0,1]$, $f_i(L_i) = \{0\}$ y $f_i(U_i) = 1$.

Para $i = 1$ tenemos que pudiera ser $L_1 = \emptyset$ y en este caso tomamos $f_1 = e$; si fuese $L_1 \neq \emptyset$ escogemos $f_1 \in E$ tal que $f_1(L_1) = \{0\}$ y $f_1(U_1) = \{1\}$.

Análogamente, para $i = n$ pudiera ser $U_n = \emptyset$; en este caso escogemos $f_n = 0$. Si fuese $U_n \neq \emptyset$ escogeremos f_n tal que $f_n(L_n) = \{0\}$ y $f_n(U_n) = \{1\}$. Sea

$f = \alpha e + \varepsilon(f_1 + \cdots + f_n)$. De esta forma, $f \in E$. Consideremos $t_0 \in S$. Tenemos que existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\alpha + (j-1)\varepsilon \leq g(t_0) \leq \alpha + j\varepsilon.$$

Si $i \leq j-1$ se tiene $t_0 \in U_i$ y $f_i(t_0) = 1$. Si $i \geq j+1$ se verifica $t_0 \in L_i$ y $f_i(t_0) = 0$. Así pues, $\alpha + (j-1)\varepsilon \leq f(t_0) \leq \alpha + j\varepsilon$ y, por tanto, $|f(t_0) - g(t_0)| < \varepsilon$. ∎

NOTA 8.2.4 1.- Si en S consideramos la topología discreta, tenemos que $BC(S, \mathbb{R}) = B(S, \mathbb{R})$. Si E es el subespacio vectorial de $B(S, \mathbb{R})$ formado por las funciones finito valoradas tenemos que E está en la situación del teorema anterior. Por tanto, E es denso en $B(S, \mathbb{R})$.

Sea K un espacio compacto y de Hausdorff y sea E el subespacio vectorial de $C(K)$ formado por las funciones finito valoradas. Es fácil comprobar que si $f \in E$ entonces f puede expresarse como $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, donde $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{K}$ y $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una partición de K en conjuntos clopen (es decir, simultáneamente abiertos y cerrados) disjuntos.

Demostraremos que E *es denso en* $C(K)$ *si y sólo si* K *es* 0*-dimensional.*

Supongamos que K es 0-dimensional. Sea $f \in C(K)$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $t \in K$, sea A_t un clopen en K tal que $t \in A_t \subset f^{-1}(U(f(t), \varepsilon))$. Por la compacidad de K deducimos que existe $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset K$ tal que $A_{t_1} \cup \cdots \cup A_{t_n} = K$. Definimos los conjuntos B_i, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&B_1 = A_{t_1},\\
&B_2 = (A_{t_1} \cup A_{t_2}) \setminus A_{t_1},\\
&\ldots,\\
&B_n = (A_{t_1} \cup \cdots \cup A_{t_n}) \setminus (A_{t_1} \cup \cdots \cup A_{t_{n-1}}).
\end{aligned}$$

Tenemos que $B_i \cap B_j = \emptyset$, si $i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$ con $i \neq j$, y $K = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Sea $g = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\chi_{B_i}$ es sencillo comprobar que g es continua y, por tanto, $g \in E$. Si $t \in K$ tenemos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $t \in B_i \subset A_{t_i} \subset f^{-1}(U(f(t_i), \varepsilon))$. Así pues, será $|g(t) - f(t)| = |f(t_i) - f(t)| \leq \varepsilon$.

Supongamos ahora que E es denso en $C(K)$. Sea B un conjunto abierto y sea $x \in B$. Probaremos que existe un clopen A de K tal que $x \in A \subset B$. Como $\{x\}$ y B^c son cerrados y disjuntos, existe una aplicación continua $f : K \to [-1, 1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(K \setminus B) = \{-1\}$. Sea $g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ un elemento de E tal que $\|f - g\| < \frac{1}{2}$. Existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in A_j$. Se verifica que $|f(x) - g(x)| = |f(x) - a_j| < \frac{1}{2}$; por tanto, $a_j \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Si $y \in A_j$ será $|f(y) - a_j| < \frac{1}{2}$ y esto significa que $y \notin K \setminus B$. Por consiguiente, $x \in A_j \subset B$.

2.- Sea S un conjunto y sean $f, g \in B(S,\mathbb{R})$. Denotaremos por $f \vee g = \max(f,g)$, $f \wedge g = \min(f,g)$. Se verifica que $f \vee g$ y $f \wedge g$ son elementos de $B(S,\mathbb{R})$, ya que $f \vee g = \dfrac{f+g}{2} + \dfrac{|f-g|}{2}$ y $f \wedge g = \dfrac{f+g}{2} - \dfrac{|f-g|}{2}$.

Diremos que $E \subset B(S,\mathbb{R})$ es un subretículo si $\{f \vee g, f \wedge g\} \subset E$ cuando $\{f,g\} \subset E$. Si además E es un subespacio vectorial diremos que E es subretículo lineal.

Recordemos que, dado $E \subset B(S,\mathbb{R})$, decíamos que E separa puntos de S si para cada $t_1, t_2 \in S$, con $t_1 \neq t_2$, existe $f \in E$ tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$. Se dice que E **separa fuertemente puntos de** S si para cada $t_1, t_2 \in S$ con $t_1 \neq t_2$ y cada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existe $g \in E$ tal que $g(t_1) = \alpha_1$ y $g(t_2) = \alpha_2$.

Si E es un subespacio vectorial que contiene a e (la función constante 1) y separa puntos de S entonces E separa fuertemente los puntos de S. En efecto, sean $t_1, t_2 \in S$ con $t_1 \neq t_2$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Consideremos la función

$$g(t) = \frac{\alpha_1}{f(t_1) - f(t_2)}[f(t) - f(t_2)e(t)] + \frac{\alpha_2}{f(t_2) - f(t_1)}[f(t) - f(t_1)e(t)],$$

donde $f \in E$ es tal que $f(t_1) \neq f(t_2)$. Es claro que $g \in E, g(t_1) = \alpha_1$ y $g(t_2) = \alpha_2$.

Si E es un álgebra de aplicaciones definidas en S que separa los puntos de S y no se anula simultáneamente en S sabemos (se vio en el primer capítulo) que E separa fuertemente los puntos de S.

3.- Es sencillo comprobar que los siguientes resultados se encuentran de alguna manera recogidos en el primer capítulo.

i) Si T es un espacio topológico compacto y E es un subretículo lineal de $C(T,\mathbb{R})$ que separa fuertemente los puntos de T, entonces E es denso en $C(T,\mathbb{R})$.

ii) Si S es un conjunto y E es una subálgebra cerrada de $B(S,\mathbb{R})$ entonces E es un subretículo.

iii) Si T es un espacio topológico compacto y E es una subálgebra de $C(T,\mathbb{R})$ que separa fuertemente los puntos de T, entonces E es denso en $C(T,\mathbb{R})$.

iv) Si T es un espacio topológico compacto y E es subálgebra de $C(T,\mathbb{C})$ que separa fuertemente los puntos de T y además $\overline{f} \in E$ cuando $f \in E$, entonces E es denso en $(CT,\mathbb{C})$.

4.- Sea $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Consideremos en $C(T,\mathbb{C})$ el conjunto E de las funciones de la forma $\displaystyle\sum_{r=-m}^{n} \alpha_r z^r$ entonces E es denso en $C(T,\mathbb{C})$. En efecto, tenemos que E es subálgebra de $C(T,\mathbb{R})$ que separa puntos de T y no es cero simultáneamente en T. Observemos que si $|z| = 1$ tenemos que $(\overline{z^r}) = z^{-r}$ y deducimos que si $f \in E$ es $\overline{f} \in E$. Así pues, E es denso en $C(T,\mathbb{C})$.

5.- Sea $J = [-\pi,\pi]$. Consideremos en $C(J,\mathbb{R})$ el conjunto E de las funciones de la forma $\dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{r=1}^{n}(a_r \cos rt + b_r \operatorname{sen} rt)$. Entonces si $f \in C(J,\mathbb{R})$ es tal que

$f(\pi) = f(-\pi)$ tenemos que f puede aproximarse uniformemente por funciones de E. En otras palabras, el conjunto de los polinomios trigonométricos es denso en $C(J, \mathbb{R})$. En efecto, dada una función continua $f : J \to \mathbb{R}$ con $f(-\pi) = f(\pi)$ podemos definir la función g de $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en $\mathbb{R}$ por $g(e^{it}) = f(t)$. Esta función g estará bien definida ya que $f(-\pi) = f(\pi)$. Además, es sencillo comprobar que g es continua. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $h(z) = \sum_{r=-m}^{n} c_r z^r$ tal que $|h(z) - g(z)| < \varepsilon$ si $z \in T$. Así pues, para cada $t \in J$ es $|h(e^{it}) - g(e^{it})| < \varepsilon$. Por tanto se tiene que $|Reh(e^{it}) - Reg(e^{it})| < \varepsilon$ para cada $t \in J$ y es sencillo comprobar que $Reh(e^{it})$ es de la forma deseada.

TEOREMA 8.2.5 *Sea T un espacio compacto y sea $t_0 \in T$. Sea $I(t_0)$ el álgebra de las funciones $C(T, \mathbb{R})$ tal que $f(t_0) = 0$. Sea E un subálgebra de $I(t_0)$ que separa los puntos de T. Se verifica que E es denso en $I(t_0)$.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos $E_1 = E + \mathcal{L}(e)$ (e función constante 1). Veamos que E_1 es un subálgebra de $C(T)$. Si $f, g \in E$ entonces $(f + \alpha e)(g + \beta e) = fg + \beta f + \alpha g + \alpha\beta e$. E_1 separa puntos en T y no se anula simultáneamente en T: por tanto, E_1 es denso en $C(T, \mathbb{R})$. Dado $\varepsilon > 0$ y $f \in I(t_0)$ existirán $g \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\|f - (g + \alpha e)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces se verifica que $|f(t_0) - g(t_0) + \alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $|\alpha| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, $\|f - g\| \leq \|f - (g + \alpha e)\| + \|\alpha e\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ∎

NOTA 8.2.6 Sea T un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Sea $T' = T \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de T. Sea $I(\infty) = \{g \in C(T') : g(\infty) = 0\}$. Demostraremos que *si $f \in CB(T, \mathbb{R})$ entonces existe $\hat{f} \in I(\infty) \subset C(T', \mathbb{R})$ tal que $f = \hat{f}_T$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $H \subset T$ compacto tal que si $t \in T - H$ es $|f(t)| < \varepsilon$.* (Al conjunto de las funciones de este tipo las denotaremos por $C_0(T, \mathbb{R})$ y diremos que son funciones que se anulan en el infinito).

En efecto, si $f = \hat{f}_T$ con $\hat{f} \in I(\infty) \subset C(T', \mathbb{R})$ tenemos que, como $\hat{f}(\infty) = 0$, existe A, entorno abierto de ∞ en T', tal que si $t \in A$ es $|\hat{f}(t)| < \varepsilon$. Tenemos que $H = T' - A \subset T$ y que H es compacto. Si $t \in T - H$, se cumple $t \in A$ y por tanto $|f(t)| = |\hat{f}(t)| < \varepsilon$. Recíprocamente, si definimos $\hat{f} : T' \to \mathbb{R}$ por $\hat{f}(t) = f(t)$, para $t \in T$, y $\hat{f}(\infty) = 0$, entonces es sencillo comprobar $\hat{f}$ es continua. Por tanto, $\hat{f} \in I(\infty)$ y $\hat{f}_T = f$.

Sea E un subálgebra de $C_0(T, \mathbb{R})$ que separa los puntos de T y no se anula simultáneamente en T. Entonces $\hat{E} = \{\hat{f} : f \in E\}$ es un subálgebra de $I(\infty)$ que separa puntos de T'. Por tanto, $\hat{E}$ es denso en $I(\infty)$. De esta forma, si $g \in C_0(T, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $f \in E$ tal que $\|\hat{f} - \hat{g}\| < \varepsilon$. Entonces se verifica $\|f - g\| < \varepsilon$. Así pues, E será denso en $C_0(T, \mathbb{R})$.

NOTA 8.2.7 Sea $J = [0, +\infty)$ y sea $C_0(J, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones $f : J \to \mathbb{R}$ continuas y tales que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Sea E el conjunto de las funciones $f : J \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e^{-kx}$. Se verifica que E es un subálgebra de $C_0(J, \mathbb{R})$

que separa los puntos de J y no es cero simultáneamente en J (pues $e^{-x} \neq 0$ para cada $x \in [0, +\infty)$). Así pues, E es denso en $C_0(J)$.

8.3 Espacios de funciones continuas separables

En lo que sigue de este capítulo, consideraremos que los espacios de funciones que estudiaremos son de funciones real valoradas. Proponemos al lector que analice someramente lo que pueda tener sentido para el caso de funciones valoradas en $\mathbb{C}$.

Sea X un conjunto y $D = \{d_i, i \in I\}$ una familia de seudométricas en X. Para $i \in I$, $x \in X$ y $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, denotamos

$$U_{d_i}(x, \alpha) = \{z \in X : d_i(x, z) < \alpha\}.$$

Sea $x \in X$ y sea V_x la familia de conjuntos $U \subset X$ tales que existen $F \subset I$ finito y $\alpha > 0$ de modo que $\bigcap_{i \in F} U_{d_i}(x, \alpha) \subset U$. Se cumplen las condiciones para que exista una única topología T en X tal que si $x \in X$ es V_x el sistema de todos los entornos de x en T. Esta topología la denotamos por $T(D)$ y se denomina topología inducida en X por la familia de seudométricas D.

Si D fuese numerable, $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$, veremos que $T(D)$ puede ser inducida por una sola seudométrica. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ es $d'_n(x, y) = \text{mín}[d_n(x, y), 1]$ entonces $D' = \{d'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es también una familia de seudométricas y es sencillo comprobar que induce la misma topología.

Definimos en $X \times X$ la aplicación $d(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{1}{n} d'_n(x, y)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{1}{n} d'_n(x, y) \leq \frac{1}{n} d'_n(x, z) + \frac{1}{n} d'_n(z, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Así pues, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ y es claro que d es una seudométrica. Sea U un entorno de $x \in X$ para $T(D)$. Existen $F \subset \mathbb{N}$ finito y $\alpha > 0$ tales que $\bigcap_{i \in F} U_{d'_i}(x, \alpha) \subset U$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \text{máx} F$, entonces $U_d(x, \frac{\alpha}{N}) \subset \bigcap_{i \in F} U_{d'_i}(x, \alpha)$, ya que si $z \in U_d\left(x, \frac{\alpha}{N}\right)$ será $d(x, z) < \dfrac{\alpha}{N}$ y, por tanto, $d'_i(x, z) < \dfrac{i}{N}\alpha < \alpha$. Así pues, U es entorno de x en (X, d).

Recíprocamente, si U es un entorno de x en (X, d) existirá $\alpha > 0$ tal que $U_d(x, \alpha) \subset U$ y si $m \in \mathbb{N}$ es tal que $\dfrac{1}{m} < \alpha$ entonces $\bigcap_{i=1}^{m} U_{d'_i}(x, \frac{\alpha}{2}) \subset U_d(x, \alpha)$. En efecto, si $y \in \bigcap_{i=1}^{m} U_{d'_i}(x, \frac{\alpha}{2})$ es $\dfrac{1}{i} d'_i(x, y) < \dfrac{\alpha}{2m} < \alpha$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, y, si $i \geq m + 1$, es claro que $\dfrac{1}{i} d'(x, y) \leq \dfrac{1}{m}$. Así pues, U es entorno de x en $T(D)$.

Supongamos ahora que S es un espacio topológico para el que existe una familia (f_n) de funciones continuas de S en $I = [0, 1]$ de modo que si $x \in S$ y U es entorno de x existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{t \in S : |f_n(t) - f_n(x)| < \varepsilon\} \subset U$. Entonces, demostraremos que S es seudometrizable. Además la topología de S puede ser inducida por una seudométrica d tal que (S, d) sea precompacto.

En efecto, para cada $n \in N$ definimos en $X \times X$ la aplicación $d_n(x,y) = |f_n(x) - f_n(y)|$. Tenemos que d_n es una seudométrica en S. Obsérvese que se verifica $d_n(x,y) \leq 1$ para cada $x, y \in S$. Si $T(D)$ es la topología que induce $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en S, es claro que todo entorno de x en S lo es también en $(S, T(D))$. Observemos que

$$U_{d_n}(x,\varepsilon) = \{t \in S : |f_n(t) - f_n(x)| < \varepsilon\}$$

es abierto de S. Así pues, $T(D)$ es la propia topología de S. Por 1., tenemos que $T(D)$ es la topología que induce la seudométrica $d(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_n(x,y)$.

Veamos que (S,d) es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Para cada $r_1, \ldots, r_N \in \{1, \ldots, N\}$ sea $A_{r_1, \ldots, r_N}$ el conjunto de los $t \in S$ tales que $\frac{r_i - 1}{N} \leq f_i(t) \leq \frac{r_i}{N}$, para $i \in \{1, \ldots, N\}\}$. Cada uno de estos conjuntos tiene diámetro menor que ε; además, la unión de estos N^N conjuntos recubre a S.

TEOREMA 8.3.1 *Sea T un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. Si $BC(T)$ es separable entonces T es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, consideremos el conjunto M de las funciones continuas $f : T \to [0,1]$. Tenemos que $M \subset BC(T)$ y M también será separable. Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M$ un conjunto denso en M. Sea $t \in T$ y sea U un entorno abierto de t. Sabemos que existe $f \in M$ tal que $f(t) = 0$ y $f(T \setminus U) = 1$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - f_k\| < \frac{1}{3}$. Entonces $|f_k(t)| \leq \frac{1}{3}$ y tenemos que $A = \{z \in T : |f_k(z) - f_k(t)| < \frac{1}{6}\} \subset U$, ya que si $z \in A$ se verifica $|f(z)| \leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(t)| + |f_k(t)| < 1$. Así pues, como $|f(z)| < 1$ se verifica $z \in U$. Por tanto, deducimos que T es seudometrizable y, como T es de Hausdorff, T es metrizable. ∎

TEOREMA 8.3.2 *Sea T un espacio compacto y de Hausdorff. Entonces son equivalentes:*

i T cumple el segundo axioma de numerabilidad (es IIAN).

ii El espacio $C(T, \mathbb{R})$ es separable.

iii T es metrizable.

DEMOSTRACIÓN De la nota anterior se deduce que si $C(T, \mathbb{R})$ es separable, entonces T es metrizable; es decir ii)⇒iii).

Suponemos conocido, de los cursos de topología, que todo espacio métrico y compacto es IIAN. Por tanto iii)⇒i).

Supongamos ahora que T es IIAN. Sea $\mathcal{B}'$ una base numerable de abiertos en T. Sea $\mathcal{B}$ la familia de las uniones finitas de $\mathcal{B}'$. Es claro que la unión finita de elementos de $\mathcal{B}$ estará en $\mathcal{B}$ y que $\mathcal{B}$ es numerable. Para cada par (U,V) de $\mathcal{B}$ tal que $\overline{U} \subset V$, podemos escoger una función continua, definida en T, que denotamos por $f_{(U,V)}$, y con valores en $[0,1]$, de modo que $f_{(U,V)}(U) = 0$ y $f_{(U,V)}(T \setminus V) = 1$. Esta familia de funciones, que denotaremos por $\mathcal{L}$, es numerable. Probaremos ahora que si A y B son cerrados disjuntos de T entonces existen $U, V \in \mathcal{B}$ tales que $A \subset U, \overline{U} \subset V$ y $V \cap B = \emptyset$. En efecto, sea $a \in A$. Como $X \setminus B$ es entorno de a, existe $G(a) \in \mathcal{B}$ tal que $a \in G(a)$ y $\overline{G(a)} \cap B = \emptyset$. Por la compacidad de A existe $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ tal que $A \subset U = G(a_1) \cup \dots \cup G(a_n)$. Por consiguiente, $U \in \mathcal{B}$. Como $\overline{U} = \overline{G(a_1)} \cup \dots \cup \overline{G(a_n)}$, se verifica $\overline{U} \cap B = \emptyset$.

Reiterando el argumento anterior, con los cerrados disjuntos $\overline{U}$ y B, podemos obtener $V \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{U} \subset V$ y $V \cap B = \emptyset$. Observemos que entonces $f_{(U,V)}(A) = 0$ y $f_{(U,V)}(B) = 1$. Así pues, si E es el subespacio vectorial generado por e (aplicación constante 1) y $\mathcal{L}$ tenemos que E es denso y por tanto $C(T, \mathbb{R})$ separable; es decir i)$\Rightarrow$ii). ▪

NOTA 8.3.3 Si en $\mathbb{N}$ consideramos la topología discreta T_D, tenemos que $(\mathbb{N}, T_D)$ es completamente regular y T_2 (más aún, es T_4) y $(\mathbb{N}, T_D)$ es metrizable. Sin embargo, $BC(\mathbb{N}) = l_\infty$ no es separable. Por tanto para el teorema anterior ha sido esencial la compacidad.

TEOREMA 8.3.4 *Si S es compacto metrizable y T es un espacio de Hausdorff que es imagen continua de S entonces T es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que existe una aplicación $F : S \to T$ continua y sobreyectiva (observemos que T será compacto). Ya se ha demostrado que $BC(T)$ es linealmente isométrico a un subespacio cerrado E de $BC(S)$, por medio $\varphi : BC(T) \to BC(S)$, $\varphi(f) = fF$. Como $BC(S)$ es separable, deducimos que E es separable. Entonces $BC(T)$ es separable y, por tanto, T es metrizable. ▪

NOTA: con la Topología y el Análisis Funcional sucede, a veces, como con las habaneras: los cantos de una orilla influyen en los de la otra.

8.4 Isomorfismos entre espacios de funciones continuas

TEOREMA 8.4.1 *Existe un subespacio vectorial E de $C(I)$ tal que $C(I) \cong E \times c_0$.*

DEMOSTRACIÓN Sea E el conjunto de las funciones de $C(I)$ que toman el valor 0 en cada $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Es claro que E es un subespacio vectorial de $C(I)$. Sea F el conjunto de las funciones de $C(I)$ cuya gráfica es una línea recta en cada intervalo del tipo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Tenemos también que F es un subespacio vectorial de $C(I)$.

Sea $\varphi : C(I) \to c$ la aplicación definida por $\varphi(f) = (f(1/n))$. Como $\lim \frac{1}{n} = 0$, se tiene $\lim f(\frac{1}{n}) = f(0)$ y, por tanto, $(f(\frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de c. Claramente φ es lineal y, si $f \in F$, es claro que $\|\varphi(f)\| = \|f\|$. Si $x \in c$, consideremos la función $f \in C(I)$ tal que $f(\frac{1}{n}) = x(n)$ y la gráfica de f es recta en cada $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Entonces será $f \in F$ y $\varphi(f) = x$.

Así pues, si $\varphi' = \varphi_F$ tenemos que φ' es una isometría sobreyectiva de F en c y, por ser $c \cong c_0$, tenemos que $F \cong c_0$. Para concluir la demostración, bastará probar que $C(I)$ es isomórfico a $E \times F$.

Dada $f \in C(I)$, sea $T(f)$ la función que toma el mismo valor que f en cada $\frac{1}{n}$ y su gráfica es recta en cada $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$. Observemos que $T(f)(0) = \lim Tf(\frac{1}{n}) = \lim f(\frac{1}{n}) = f(0)$ y que si $g \in E$ es $Tg = 0$ y $h \in F$ se verifica $T(h) = h$. Es claro que Tf es lineal y que $\|Tf\| \leq \|f\|$.

Sea $S(f) = f - Tf$. Se verifica que S es lineal, es continua y $\|Sf\| \leq 2\|f\|$; además, $S(f) \in E$. Consideremos la aplicación $H : C(I) \to E \times F$ (con la norma $\| \|_1$) definida por $H(f) = (S(f), T(f))$. Se tiene que H es lineal y continua. Si $f \in C(I)$ se cumple $S(f)+T(f) = f$; por tanto, $\|f\| \leq \|Tf\|+\|Sf\| = \|(Sf, Tf)\|_1$. Además $\|(Sf, Tf)\|_1 = \|Sf\| + \|Tf\| \leq 3\|f\|$.

Sólo queda probar que H es sobreyectiva. En efecto, si $(g, h) \in E \times F$, tenemos que $H(g+h) = (g, h)$. ∎

TEOREMA 8.4.2 *$C(I)$ es isomórfico a cada uno de los siguientes espacios: $C(I) \times c_0$, $C(I) \times \mathbb{R}$, $C(I) \times C(I)$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $c_0 \times c_0 \cong c_0$ y $c_0 \approx c_0 \times \mathbb{R}$. Por tanto,

$$C(I) \times c_0 \cong E \times c_0 \times c_0 \cong E \times c_0 \cong C(I)$$

y también

$$C(I) \times c_0 \approx C(I) \times c_0 \times \mathbb{R} \approx C(I) \times \mathbb{R}.$$

Probaremos finalmente que $C(I) \times C(I)$ es isomórfico a $C(I) \times \mathbb{R}$.

Sean $f, g \in C(I)$ y sea $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = f(2t)$, si $t \in [0, 1/2]$, y $h(t) = g(2t-1) + f(1) - g(0)$, si $t \in [1/2, 1]$. Tenemos que $h \in C(I)$ y $\|h\| \leq \|f\| + 2\|g\|$. Definimos $T : C(I) \times C(I) \to C(I) \times \mathbb{R}$ por $T(f, g) = (h, f(1) - g(o))$. Es evidente que T es lineal y que T es continua, ya que

$$\|T(f,g)\|_1 = \|h\|+|f(1)-g(0)| \leq \|f\|+2\|g\|+\|f\|+\|g\| \leq 3(\|f\|+\|g\|) = 3\|(f,g)\|_1.$$

Definimos $k : C(I) \times \mathbb{R} \to C(I) \times C(I)$ por $k(h, \alpha) = (f, g)$, donde $f(t) = h(t/2)$ y $g(t) = h(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}) - \alpha$. Es claro que $(f, g) \in C(I) \times C(I)$ y

$$\|k(h,\alpha)\|_1 = \|f\| + \|g\| \leq \|h\| + \|h\| + |\alpha| \leq 2\|(h,\alpha)\|_1.$$

Por tanto, k es continua; además, $k \circ T$ =Identidad y $T \circ k$ =Identidad. Por consiguiente, T es biyectiva y $k = T^{-1}$. ∎

NOTA 8.4.3 En 1966 el matemático ruso A.A. Milyutin prueba que si T es cualquier espacio métrico compacto y no numerable, entonces $C(T)$ es isomórfico a $C(I)$. Este resultado es espectacular por imprevisible. La demostración puede consultarse en Z. Semadeni "Banach spaces of continuous functions" (376-380).

TEOREMA 8.4.4 *Sean S y T dos espacios compactos Hausdorff y sea $V : C(S) \to C(T)$ una isometría lineal biyectiva. Entonces, si e_S es la aplicación constante 1 en S y $g_0 = V(e_S)$ se verifica que $|g_0(t)| = 1$ para cada $t \in T$.*

DEMOSTRACIÓN Si $|g_0(t_0)| < 1$, para algún $t_0 \in T$, escogemos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1 - |g_0(t_0)|$. Sea $G = \{t : |g_0(t)| < 1 - \alpha\}$. Tenemos que G es un entorno abierto de t_0 y, por tanto, existe $h : T \to [0, \alpha]$ continua tal que $h(t_0) = \alpha$ y $h(T \setminus G) = 0$.

Para cada $t \in G$ se verifica $|g_0(t) \pm h(t)| < 1 - \alpha + \alpha = 1$ y, por tanto, $\|g_0 \pm h\| \leq 1$.

Sea $f = V^{-1}(h)$. Como V es una isometría, será $\|e_S \pm f\| = \|V^{-1}(g_0 \pm h)\| = \|g_0 \pm h\| \leq 1$. Si existe $z_0 \in S$ tal que $f(z_0) > 0$ será $\|e_S + f\| \geq |(e_S + f)(z_0)| = 1 + f(z_0) > 1$, lo que es contradictorio. Si existe $z_0 \in S$ tal que $f(z_0) < 0$, se verifica $\|e_S - f\| \geq |(e_S - f)(z_0)| = 1 - f(z_0) > 1$. Por tanto, tendrá que ser $f = 0$, lo que es una contradicción, ya que $f = V^{-1}(h)$ y $\|h\| \neq 0$. ▪

NOTA 8.4.5 En la situación anterior, observemos que $\dfrac{1}{g_0} \in C(T)$. Definimos $W : C(S) \to C(T)$ por $W(f) = \frac{1}{g_0} \cdot V(f)$ y tenemos que W sigue siendo una isometría lineal. Además también es sobreyectiva, ya que si $h \in C(T)$ tenemos que $\dfrac{hg_0}{W} \in C(T)$ y si $f \in C(S)$ es tal que $V(f) = \dfrac{hg_0}{W}$ entonces $W(f) = \frac{1}{g_0}V(f) = h$.

Tenemos que $W(e_S) = e_T$ y probaremos que W es un homomorfismo reticular; es decir, $W(f \vee g) = W(f) \vee W(g)$ y $W(f \wedge g) = W(f) \wedge W(g)$, para cada $f, g \in C(S)$ [bastaría probar una de las dos relaciones ya que se verifica que $(-f) \vee (-g) = -(f \wedge g)$].

Observemos que si $L : C(S) \to C(T)$ fuese lineal y un homomorfismo reticular entonces $L(f) \geq L(g)$, cuando $f \geq g$, ya que $f = f \vee g$ y $L(f) = L(f) \vee L(g)$; esto implica que $L(f) \geq L(g)$.

Siguiendo las ideas del teorema anterior podemos obtener nuevas conclusiones.

Sea X un espacio normado y sea $x \in \mathcal{B}_X$ se dice que *x es un **punto extremo** de B_X si x no puede ponerse como combinación convexa de dos puntos de $\mathcal{B}_X$ que sean distintos del propio x. Es decir, para cada $\{y, z\} \subset B_X \setminus \{x\}$ y cada $\lambda \in (0,1)$ es $\lambda y + (1-\lambda)t \neq x$.*

Al conjunto de los puntos extremos de $\mathcal{B}_X$ se le suele denotar por $ExtB_X$. Si $x \in \mathcal{B}_X$ y $0 < \|x\| < 1$ entonces x no es un punto extremo de B_X, ya que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, donde $y = \frac{1}{\|x\|}x$ y $z = \frac{2\|x\|-1}{\|x\|}x$. Es claro que $\{y, z\} \subset B_X$. Por tanto si $x \in ExtB_X$ será $x \in S_X$. Sin embargo, en general, es falso que si $x \in S_X$ sea $x \in ExtB_X$.

Sea $T : X \to Y$ una isometría lineal y sobreyectiva entre dos espacios normados. Probaremos que si $e \in ExtB_X$ entonces $T(e) \in ExtB_Y$. En efecto, si fuese $T(e) = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$ con $\lambda \in (0,1)$ y $\{y_1, y_2\} \subset B_Y$, sería $e = \lambda T^{-1}(y_1) + (1-\lambda)T^{-1}(y_2)$ con $\{T^{-1}(y_1), T^{-1}(y_2)\} \subset B_X$. Por tanto $e = T^{-1}(y_1) = T^{-1}(y_2)$ y deducimos que $T(e) = y_1 = y_2$.

Sea K un espacio topológico compacto y T_2 y sea Y un espacio normado. Consideremos el espacio $X = C(K, Y)$. Sea $g \in B_X$. Demostraremos que si existe

$t_0 \in K$ tal que $\|g(t_0)\| < 1$ entonces $g \notin ExtB_X$. En efecto, si $\|g(t_0)\| < 1$ escogemos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < 1 - \|g(t_0)\|$. Sea $G = \{t : \|g(t)\| < 1 - \alpha\}$. Tenemos que G es entorno abierto de t_0 y existirá una aplicación $h : k \to [0, \alpha]$ continua de modo que $h(t_0) = \alpha$ y $h(K \setminus G) = 0$. Fijamos $y \in S_Y$ y definimos $f : K \to Y$ por $f(t) = h(t)y$; es claro que $f \in C(K, X)$. Para cada $t \in G$ es $\|g(t) \pm f(t)\| < 1 - \alpha + \alpha = 1$. Por tanto deducimos que $\{g + f, g - f\} \subset B_Y$; además tenemos que $g + f \neq g$ y $g = \frac{1}{2}(g + f) + \frac{1}{2}(g - f)$.

8.5 Propiedades reticulares de los espacios de funciones continuas

TEOREMA 8.5.1 *Sean S y T dos espacios compactos Hausdorff y sea $W : C(S) \to C(T)$ una isometría lineal y biyectiva con $W(e_s) = e_T$. Entonces*

i) Si $f \geq g$ es $W(f) \geq W(g)$.

ii) W es un homomorfismo reticular.

DEMOSTRACIÓN Sea $f \in C(S)$ tal que $0 \leq f \leq e_S$. Tenemos que $\|e_S - f\| \leq 1$ y, por tanto, que $\|e_T - W(f)\| \leq 1$. Si existiese $t_0 \in T$ tal que $W(f)(t_0) < 0$ tendríamos que $\|e_T - W(f)\| \geq |e_T(t_0) - W(f)(t_0)| = 1 - W(f)(t_0) > 1$, lo que no es posible. Por consiguiente, será $W(f) \geq 0$.

Si $f \in C(S)$ y $f \geq 0, f \neq 0$, tenemos que $0 \leq \dfrac{1}{\|f\|} f \leq e_S$. Por tanto, $\dfrac{1}{\|f\|} W(f) \geq 0$ y $W(f) \geq 0$. Si fuesen $f, g \in C(S)$ con $f \leq g$ sería $g - f \geq 0$ y, por tanto, $W(g - f) \geq 0$, por lo que $W(f) \leq W(g)$.

Sean ahora $f, g \in C(S)$. Tenemos que $f \leq f \vee g$ y $g \leq f \vee g$. Por tanto, $W(f) \leq W(f \vee g)$ y $W(g) \leq W(f \vee g)$. Esto prueba que $W(f) \vee W(g) \leq W(f \vee g)$. Denotamos por k a $W(f) \vee W(g)$ y sea $h = W^{-1}(k)$; entonces, $W(f) \leq k$ y W^{-1} tendrá la propiedad $i)$ del enunciado y deducimos que $f \leq h$. De manera análoga podemos deducir que $g \leq h$ y, por tanto, $f \vee g \leq h$. Teniendo en cuenta, de nuevo, $i)$, se tiene $W(f \vee g) \leq W(h) = k$. ∎

NOTA 8.5.2 Si φ es homeomorfismo de T en S entonces tenemos que la aplicación de $C(S)$ en $C(T)$ definida por $W(f) = f\varphi$ es una isometría lineal biyectiva; observemos que $W(e_S) = e_T$. Más adelante probaremos que cada isometría W de $C(S)$ en $C(T)$ es de esta forma, probando que existe un homeomorfismo φ de T en S.

TEOREMA 8.5.3 *Si S es un espacio topológico compacto Hausdorff y $\varphi : C(S) \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo reticular lineal con $\varphi(e_S) = 1$ entonces φ es una aplicación evaluación; es decir, existe $t_0 \in S$ tal que $\varphi = \varphi_{t_0}$, donde $\varphi_{t_0} : C(S) \to \mathbb{R}$ está definida por $\varphi_{t_0}(t) = f(t_0)$.*

DEMOSTRACIÓN Primero observemos que si φ_{t_0} es una aplicación evaluación entonces

$$\varphi_{t_0}(f \vee g) = (f \vee g)(t_0) = f(t_0) \vee g(t_0) = \varphi_{t_0}(f) \vee \varphi_{t_0}(g).$$

Análogamente $\varphi_{t_0}(f \wedge g) = \varphi_{t_0}(f) \wedge \varphi_{t_0}(g)$; además, $\varphi_{t_0}(e_S) = 1$.

Sea $\varphi : C(S) \to \mathbb{R}$ un homomorfismo reticular con $\varphi(e_S) = 1$. Si $f \in C(S)$ es tal que $f(t) > 0$, para cada $t \in S$, deducimos, de la compacidad de S, que si $\alpha = \inf\{f(t), t \in S\}$ se verifica $\alpha > 0$. Por tanto, existirá $\beta > 0$ tal que $0 \leq e_S \leq \beta f$. Así pues, si fuese $\varphi(f) = 0$ sería $\varphi(e_S) = 0$, lo que no es posible. Por consiguiente, $\varphi(f) \neq 0$.

Vamos a demostrar que existe $t_0 \in S$ tal que $f(t_0) = 0$, para $f \in \ker \varphi$. Si conseguimos esto, entonces para cada $f \in C(S)$ tendremos que, como $f - \varphi(f)$ está en $\ker T$, se verifica $f(t_0) - \varphi(f)e_S(t_0) = 0$ y $\varphi(f) = f(t_0)$, para $f \in C(S)$.

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que para cada $t \in S$ existe $f \in \ker \varphi$ tal que $f_t(t) > 0$ (si fuese $f_t(t) < 0$ bastaría coger $-f_t$). Para cada $t \in S$, sea U_t un entorno abierto de t tal que si $z \in U_t$ se cumple $f_t(z) > 0$.

Por la compacidad de S, podemos poner $S = U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_n}$. Consideremos $f = f_{t_1} \vee \cdots \vee f_{t_n}$. Entonces, como para cada $i = \{1, \ldots, n\}$ es $\varphi(f_{t_i}) = 0$, se verifica $\varphi(f) = \varphi(f_{t_1}) \vee \cdots \vee \varphi(f_{t_n}) = 0$, mientras que $f(t) > 0$ para cada $t \in S$. Esto constituye una contradicción.

Obsérvese que sólo existe un t_0 con $\varphi_{t_0} = \varphi$: si $t' \neq t_0$ entonces existe $g \in C(S)$ tal que $g(t') \neq g(t_0)$; entonces, $\varphi_{t'}(g) \neq \varphi_{t_0}(g) = \varphi(g)$. ∎

TEOREMA 8.5.4 *Sean S y T dos espacios topológicos compactos Hausdorff. Supongamos que existe una isometría lineal y biyectiva W de $C(S)$ en $C(T)$ con $W(e_S) = e_T$. Entonces existe un homeomorfismo $p : T \to S$ tal que $W(f) = f \circ p$, para $f \in C(S)$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos la aplicación $W : C(S) \to C(T)$ y definimos $p : T \to S$ de la siguiente forma. Sea $t \in T$ y consideremos la aplicación $h_t : C(S) \to \mathbb{R}$ definida por $h_t(f) = (Wf)(t)$; es decir, $h_t = \delta_t w$. Tenemos un homomorfismo reticular y lineal con $h_t(e_S) = (We_S)(t) = e_T(t) = 1$. Así pues, existe un único $s \in S$ tal que $h_t = \delta_s$ y definimos $p(t) = s$.

Observemos que para cada $t \in T$ es $Wf(t) = h_t(f) = \delta_s(f) = f(s) = f(p(t))$, por lo que $W(f) = f \circ p$. Veamos que p es continua. Sea U entorno abierto de $p(t_0)$. Existe $f_0 \in C(S)$ tal que $f_0(p(t_0)) = 1$ y $f_0(S \setminus U) = 0$. Tenemos que $(Wf_0)(t_0) = f_0(p(t_0)) = 1$ y, como $Wf_0 \in C(T)$, existe V, entorno de t_0, tal que si $t \in V$ se cumple $(Wf_0)(t) > 0$. Por tanto, si $t \in V$, se verifica $f_0(p(t)) > 0$ y $p(t) \in U$. Por consiguiente, $p(V) \subset U$.

Si consideramos la aplicación $W^{-1} : C(T) \to C(S)$, razonando como antes, probaríamos la existencia de una aplicación continua $q : S \to T$ tal que si $g \in C(T)$ se tiene $W^{-1}(g) = g \circ q$. Fijamos $t \in T$; observemos que si $g \in C(T)$ y $W^{-1}g = f \in C(S)$ tenemos que $(W^{-1}g)(p(t)) = f(p(t)) = (Wf)(t) = g(t)$. Como $W^{-1}g = g \circ q$ se cumple $g(q \circ p(t)) = g(t)$ y, como esta igualdad es cierta para cada $g \in C(T)$, tendrá que ser $(g \circ p)(t) = t$, para cada $t \in T$. De forma similar se probaría que $(p \circ q)(s) = s$, para cada $s \in S$. Así pues, p es biyectiva y su inversa es q, que es continua. ∎

NOTA 8.5.5 1.- Sean S y T dos espacios compactos y de Hausdorff y sea $V : C(S) \to C(T)$ una isometría lineal biyectiva. Hemos demostrado que si $V(e_S) = g_0 \in C(T)$ tiene que ser $|g_0(t)| = 1$, para cada $t \in T$, y entonces $W(f) = \dfrac{1}{g_0}V(f)$ es una isometría lineal biyectiva con $W(e_S) = e_T$. Así, existirá un homeomorfismo $p : T \to S$ tal que $W(f) = f \circ p$ y, por tanto, será $V(f) = g_0 \cdot (f \circ p)$, para cada $f \in C(S)$. Por tanto, las únicas isometrías lineales biyectivas posibles de $C(S)$ en $C(T)$ son de la forma $V(f) = g_0 \cdot (f \circ p)$, donde $g_0 \in C(T)$ es tal que $|g_0(t)| = 1$, para cada $t \in T$. Como $g_0(t) = \pm 1$, existirán en T dos abiertos disjuntos A y B tales que $A \cup B = T$, $g_0(A) = \{1\}, g_0(B) = \{-1\}$; es decir, $g = \chi_A - \chi_{A^c}$, donde A es un conjunto clopen en T. Si T es conexo deducimos que o bien $g(t) = 1$ para $t \in T$ o bien $g(t) = -1$ para $t \in T$. En esta situación las únicas isometrías lineales biyectivas posibles $V : C(S) \to C(T)$ serán de la forma $V = f \circ p$ o bien $V = -f \circ p$, donde $p : T \to S$ es un homeomorfismo.

2.- Dado un espacio topológico compacto y de Hausdorff, T, trataremos de estudiar cuáles son las condiciones precisas para que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C(T)$ sea débilmente convergente. El estudio se hará sin recursos de teoría de la medida, que quizás sean los más adecuados. En una nota posterior se hará el estudio con técnicas de teoría de la medida.

Sea $\varphi : C(T) \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua. Para cada aplicación acotada $f : T \to \mathbb{R}$ con $f \geq 0$ y no necesariamente continua definimos $\overline{\varphi}(f) = \sup\{\varphi(g) : g \in C(T), 0 \leq g \leq f\}$. Como $\varphi(0) = 0$, será $0 \leq \overline{\varphi}(f)$ y, como para cada $g \in C(T)$ con $0 \leq g \leq f$ se cumple $\varphi(g) \leq \|\varphi\|\|g\| \leq \|\varphi\|\|f\|$, deducimos que $0 \leq \overline{\varphi}(f) \leq \|\varphi\|\|f\|$.

Antes de estudiar el resultado principal de esta sección veremos las dos siguientes cuestiones.

LEMA 8.5.6 *Si $g, h \in C(T)$ y $0 \leq g \leq f$, $0 \leq h \leq f$ entonces $\varphi(g) + \varphi(h) \leq \varphi(g \wedge h) + \overline{\varphi}(f)$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $g \vee h$, $g \wedge h \in C(T)$ y $0 \leq g \vee h \leq f$. Por tanto, $\varphi(g \vee h) \leq \overline{\varphi}(f)$. Como $(g \vee h) + (g \wedge h) = g + h$, se tiene $\varphi(g + h) = \varphi(g \vee h) + \varphi(g \wedge h) \leq \varphi(g \wedge h) + \overline{\varphi}(f)$. ∎

LEMA 8.5.7 *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente y acotada de funciones no negativas tal que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en T a cero. Entonces $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{\varphi}(f_n) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n \in C(T)$ tal que $0 \leq g_n \leq f_n$ y $\varphi(g_n) \geq \overline{\varphi}(f_n) - \dfrac{\varepsilon}{2^n}$. Sea $h_n = g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y, como para cada $n \in \mathbb{N}$ es $0 \leq h_n \leq g_n \leq f_n$, tenemos que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero puntualmente en T. Por el teorema de Dini se deduce que $\lim\limits_{n \to \infty} \|h_n\| = 0$. Por tanto $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(h_n) = 0$. Por consiguiente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq n_0$, $\varphi(h_n) \leq \varepsilon$. Si conseguimos demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\overline{\varphi}(f_n) \leq \varphi(h_n) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^n}$, deduciríamos que $0 \leq \lim\limits_{n \to \infty} \overline{\varphi}(f_n) \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario será $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{\varphi}(f_n) = 0$.

Procedemos por inducción. Para $n = 1$ es $h_1 = g_1$ y

$$\overline{\varphi}(f_1) \leq \varphi(g_1) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(h_1) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supongamos que $\overline{\varphi}(f_{n-1}) \leq \varphi(h_{n-1}) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$. Tenemos que $h_n = g_n \wedge h_{n-1}$ y $h_{n-1} \leq g_{n-1} \leq f_{n-1}$ y $g_n \leq f_n \leq f_{n-1}$.

Así pues, por el lema 8.5.6, será $\varphi(g_n) + \varphi(h_{n-1}) \leq \varphi(h_n) + \overline{\varphi}(f_{n-1})$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi}(f_n) &\leq \varphi(g_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&\leq \varphi(h_n) - \varphi(h_{n-1}) + \overline{\varphi}(f_{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&\leq \varphi(h_n) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varphi(h_n) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2^n}.
\end{aligned}$$

■

En el siguiente teorema se caracterizan las sucesiones de $C(T)$ que son débil convergentes.

TEOREMA 8.5.8 *Sea T un espacio compacto. Si (f_n) es una sucesión en $C(T)$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología débil a $f \in C(T)$ si y sólo si la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y converge a f puntualmente en T.*

DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow$ Es claro que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débil convergente tendrá que ser acotada y por otra parte para cada $t \in T$ tenemos que la aplicación evaluación $\varphi_t : C(T) \to \mathbb{R}$ es lineal y continua por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_t(f_n) = \varphi_t(f)$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $f = 0$ y también que la sucesión (f_n) es de funciones no negativas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n(t) = \sup\{f_m(t) : m \geq n\}$. Entonces, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y decreciente de funciones no negativas. Además, dado $t_0 \in T$ y $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $m \geq n_0$ se verifica $f_m(t_0) < \varepsilon$. Esto significa que también será $g_n(t_0) \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$, y, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t_0) = 0$. Así pues, si $\varphi \in C(T)$ se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{\varphi}(g_n) = 0$ y tenemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ se cumple $\overline{\varphi}(g_n) \leq \varepsilon$. Como $0 \leq f_n \leq g_n$, también será $\varphi(f_n) \leq \varepsilon$, para $n \geq n_1$.

Si ahora consideramos $-\varphi \in C(T)^*$, también sería $\lim\limits_{n\in\infty}(-\overline{\varphi})(g_n) = 0$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ se verifica $-\overline{\varphi}(g_n) \leq \varepsilon$ y también $-\varphi(f_n) \leq \varepsilon$. Así pues, si $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ se tiene $|\varphi(f_n)| \leq \varepsilon$ y podemos deducir ya que $w\text{-}\lim f_n = 0$.

Supongamos ahora que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión acotada en $C(T)$ que converge a cero puntualmente en T. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, las funciones $f_n^+(t) = f_n(t) \vee 0$ y $f_n^-(t) = (-f_n(t)) \vee 0$. Entonces $f_n = f_n^+ - f_n^-$ y $f_n^+, f_n^- \in C(T)$.

Es claro que tanto $(f_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen puntualmente a cero en T. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n^+) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n^-) = 0$. Así pues, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n) = 0$.

Supongamos, finalmente, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $C(T)$ que converge puntualmente en T a $f \in C(T)$. Entonces $(f_n - f)$ es una sucesión acotada de $C(T)$ que converge puntualmente a cero en T. Por tanto, si $\varphi \in C(T)^*$ será $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n - f) = 0$ y, por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(f) = \varphi(f)$. Esto prueba que $w\text{-}\lim f_n = f$. ∎

NOTA 8.5.9 1.- Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $C(T,\mathbb{C})$ acotada y que converge puntualmente a f en T y consideremos $\varphi : C(T,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal y continua. Tenemos que $(Re\, f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathrm{Im}\, f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen puntualmente en T a $Re\, f$ y $\mathrm{Im}\, f$ respectivamente. Además $Re\,\varphi, \mathrm{Im}\,\varphi \in C(T)^*$ y como $\varphi(f_n) = \varphi(Re\, f_n + \mathrm{Im}\, f_n) = \varphi(Re\, f_n) + i\varphi(\mathrm{Im}\, f_n) = Re\,\varphi(Re\, f_n) + i\,\mathrm{Im}\,\varphi(Re\, f_n) + i(Re\,\varphi(\mathrm{Im}\, f_n) + i\,\mathrm{Im}\,\varphi(\mathrm{Im}\, f_n))$ es sencillo deducir que $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(f_n) = \varphi(f)$.

2.- Sea (f_n) una sucesión acotada en $C([a,b])$ que converge puntualmente en $[a,b]$, a $f \in C([a,b])$. Tenemos que la aplicación $\varphi : C([a,b]) \to \mathbb{R}$, definida por $\displaystyle\int_b^a f dx$, es lineal y continua. Por tanto, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$.

Como habíamos anunciado, volvemos a enunciar y demostrar el último teorema, pero ahora usaremos técnicas de la teoría de la medida.

TEOREMA 8.5.10 *Sea T un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $C(T)$, se verifica:*

- *i (f_n) converge débilmente a $f_0 \in C(T)$ si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $C(T)$ y $\lim_n f_n(t) = f_0(t)$, para cada $t \in T$;*

- *ii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil de Cauchy si y sólo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $C(T)$ y para cada $t \in T$ existe $\lim_n f_n(t)$.*

DEMOSTRACIÓN i.- Si (f_n) converge débilmente a $f_0 \in C(T)$ es claro que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Para cada $t \in T$ tenemos que $\lim_n \delta_t(f_n) = \delta_t(f)$ es decir $\lim_n f_n(t) = f(t)$, si $t \in T$.

Recíprocamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y que $f_0 \in C(T)$ es tal que $\lim f_n(t) = f_0(t)$, para $t \in T$. Sea $\varphi \in C(T)^*$. Por el teorema de representación de Riesz, sabemos que existe una medida regular μ en T tal que $\varphi(f) = \int f d\mu$, para $f \in C(T)$. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que

$$\varphi(f_0) = \int f_0 d\mu = \int (\lim f_n) d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \varphi(f_n).$$

ii.- Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil de Cauchy, es claro que es acotada y que, para $\varphi \in C(T)^*$, se verifica que existe $\lim_n \varphi(f_n)$. En concreto, si $\varphi = \delta_t$ con $t \in T$, deducimos que existe $\lim_n f_n(t)$.

Recíprocamente supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de $C(T)$ tal que $\lim_n f_n(t)$ existe para cada $t \in T$. Denotamos $f_0(t) = \lim f_n(t)$ si $t \in T$, tenemos que f_0 es una aplicación Borel medible y acotada, así pues para cada medida regular μ en T existe $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu = \int f_0 d\mu$ y desde aquí se deduce que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil Cauchy. ∎

8.6 La compactificación de Stone-Cech

A modo de introducción, y para motivar al lector, recogemos a continuación, por medio de ejemplos, algunas curiosidades sobre la compactificación de Alexandroff con la que suponemos que el lector está familiarizado (suponemos conocido el concepto de compactificación, aunque más adelante lo repasaremos).

Consideramos en primer lugar el conjunto $\mathbb{N}$ dotado con la topología discreta (T_D). Sea $\gamma\mathbb{N} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la compactificación de Alexandroff de este espacio. Es fácil ver que $A \subseteq \gamma\mathbb{N}$ es un entorno de ∞ si y sólo si su complementario es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ (obsérvese que en $(\mathbb{N}, T_D)$ los compactos coinciden con los conjuntos finitos). Este espacio topológico es homeomorfo al espacio $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, dotado con la topología heredada de $\mathbb{R}$, por medio de la aplicación que a cada $n \in \gamma\mathbb{N}$ le hace corresponder $\frac{1}{n}$; la imagen de ∞ es el cero. Obsérvese que cada conjunto unitario $\{\frac{1}{n}\}$ es un conjunto clopen (abierto y cerrado) y su complemento es un entorno de cero. Lo curioso del espacio $\gamma\mathbb{N}$ es que cada aplicación f de $\gamma\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que sea continua puede "verse" como una sucesión convergente de escalares (la sucesión $(f(n))_n$ cuyo límite es $f(\infty)$). Recíprocamente, (si $\lim_n a_n = a$ se considera la aplicación definida por medio de $f(n) = a_n$, $f(\infty) = a$). Es sencillo probar que el espacio $C(\gamma\mathbb{N}, \mathbb{R})$ es linealmente isométrico al espacio c.

Para el segundo ejemplo consideramos los conjuntos $[0, +\infty)$ y $(0, +\infty)$, como subespacios de $\mathbb{R}$. Sean $X_1 = [0, +\infty) \cup \{\infty\}$ y $X_2 = (0, +\infty) \cup \{\infty'\}$ los respectivos espacios obtenidos mediante la compactificación de Alexandroff. La condición suficiente y necesaria para que un subespacio de $\mathbb{R}$ sea compacto es que sea cerrado y acotado. De aquí resulta que la sucesión $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente hacia el punto del infinito en cualquiera de las dos compactificaciones anteriores. Consideremos ahora la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, cuyo límite en el espacio X_1 es cero. Nos planteamos ahora la convergencia de esta sucesión en el segundo espacio: el complemento en X_2 de un subespacio compacto de $(0, +\infty)$ debe contener a todos los elementos de la forma $\dfrac{1}{n}$ salvo un número finito; esto es, en X_2 se tiene que $\lim_n \dfrac{1}{n} = \infty'$.

Si repasamos ahora la noción de compacidad en un espacio topológico, podemos recordar que esta propiedad es equivalente a que toda red posea una subred convergente. De esta forma, y a nivel intuitivo, podríamos afirmar que una gran cantidad de redes del espacio original (y en particular sucesiones) deben "acercarse" al nuevo punto de la correspondiente compactificación de Alexandroff (o si lo prefiere el lector, deben tener al ∞ como punto de aglomeración).

Esperamos que estos ejemplos hayan despertado en el lector un interés por la sección que sigue y en la que estudiaremos otro tipo de compactificación, la compactificación de Stone-Cech.

En su construcción partiremos de un espacio topológico completamente regular y Hausdorff (no puede ser de otra manera si queremos tener una compactificación

Hausdorff), que denotaremos por S. La clave nos la proporcionará el estudio de los ideales maximales del anillo $CB(S;\mathbb{R})$. No debe sorprendernos que los primeros pasos vayan dirigidos en este sentido. .

Sea S un espacio topológico completamente regular y Hausdorff. El conjunto $CB(S) = CB(S;\mathbb{R})$ dotado con las operaciones usuales de suma y producto de funciones tiene estructura de anillo. Para cada $t_0 \in S$, se define $I(t_0) = \{f \in CD(S) : f(t_0) = 0\}$. Es sencillo comprobar que $I(t_0)$ es un ideal del anillo $CB(S)$.

TEOREMA 8.6.1 *En las condiciones anteriores, se verifica que $I(t_0)$ es un ideal maximal de $CB(S)$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que existe un ideal J de $CB(S)$ tal que $I(t_0) \subsetneq J$. Sea f un elemento de J que no pertenezca a $I(t_0)$ y sea $\alpha = |f(t_0)| \neq 0$. La continuidad de f garantiza que el conjunto $H = \{t \in S : |f(t)| \leq \frac{\alpha}{2}\}$ es cerrado. Dado que el espacio S es completamente regular tenemos que existe una función continua g de S en $[0,1]$ con $g(H) = \{1\}$ y $g(t_0) = 0$. Esta última propiedad garantiza que $g \in I(t_0)$ y así g es también un elemento de J. Obsérvese además que allí donde f puede hacerse arbitrariamente pequeña (en particular menor que $\frac{\alpha}{2}$), g se mantiene constantemente igual a 1. De la misma forma, fuera de H (donde no conocemos el valor de g), f se mantiene en valor absoluto mayor que $\frac{\alpha}{2}$. Esto garantiza que $f^2 + g^2$ sea una función continua, que en todo punto de S se mantiene mayor o igual que $\beta = \text{mín}\{1, \frac{\alpha^2}{4}\}$. Esto es, se trata de un elemento invertible. Como $f^2+g^2 \in J$ y $\frac{1}{f^2+g^2} \in J$ se sigue que $1 \in J$; para cada $h \in CB(S)$ se verifica que $h = 1 \cdot h \in J$, por lo que $J = CB(S)$. ■

El resultado anterior adquiere mayor interés al estudiar el conjunto de los ideales maximales del anillo $CB(S)$. Resulta entonces, tal y como veremos a continuación, que la compacidad del espacio topológico S es una propiedad equivalente a que los únicos ideales maximales del anillo $CB(S)$ sean los descritos en la anterior definición.

TEOREMA 8.6.2 *Sea S un espacio topológico completamente regular y Hausdorff. La condición suficiente y necesaria para que S sea compacto es que la familia de ideales maximales del anillo $CB(S)$ coincida con la familia $\{I(t) : t \in S\}$.*

DEMOSTRACIÓN Veamos primero que la condición es necesaria. Sea I un ideal maximal en $CB(S)$. Se trata de encontrar un elemento $t \in S$ de forma que $I(t) = I$. La primera propiedad que este elemento debe cumplir es que sea un cero común de todas las funciones de I; esto es, debe ser $t \in \bigcap_{f\in I} zf$. donde $zf = \{x \in S : f(x) = 0\}$ (conjunto cero). Lo primero que probaremos es que $H = \bigcap_{f\in I} zf$ no es el conjunto vacío. En caso contrario, y usando la compacidad de S, debe existir $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq I$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} zf_i = \emptyset$. Esta última igualdad significa que las funciones anteriores no poseen ningún cero común, y así la función h de S en $\mathbb{R}$ definida como $h(x) = (f_1^2 + \cdots + f_n^2)(x)$ es un elemento de I que no se anula. Es más, la compacidad de $h(S)$, consecuencia de la compacidad de S y de la continuidad de h, prueba la existencia de un mínimo (no nulo) del conjunto $h(S)$, y de una cota para la función $\frac{1}{h}$. Obtenemos así que el ideal I contiene una unidad, esto es $I = CB(S)$, lo que contradice el hecho de que se trate de un ideal maximal y en particular propio. Obsérvese que para probar que H es no vacío hemos usado la hipótesis de que el espacio topológico es compacto. Veamos ahora que este conjunto es unitario.

Supongamos que H posee al menos dos elementos distintos de S, que los denotaremos por x e y. Dado que S es un espacio Hausdorff, y en particular T_1 (todo conjunto unitario es cerrado) se tiene que x e y están completamente separados; esto es, existe una función f de S en $[0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Observando ahora que I es ideal maximal y que $f \notin I$, (pues $f(y) \neq 0$), se tiene que $I + (f) = CB(S)$. En particular, la unidad pertenece a esta suma de ideales, esto es, $e = g + fk$, donde $g \in I$, $k \in CB(S)$. Si los dos miembros de la igualdad anterior se evalúan en el punto x, se obtiene la igualdad numérica $1 = 0$. Esta contradicción prueba el carácter unitario de H.

Obsérvese que para probar esta última propiedad (H tiene un único elemento) sólo hemos necesitado que el espacio sea completamente regular y de Hausdorff. Esto es, en los espacios topológicos que estudiamos un conjunto del tipo $\bigcap_{f\in I} zf$, donde I es un ideal maximal en $CB(S)$, debe ser vacío o unitario.

De esta forma concluimos que existe un único elemento t en S de forma que $\bigcap_{f\in I} zf = \{t\}$. De aquí se sigue inmediatamente que todo elemento de I debe anularse en el punto t; esto es, $I \subseteq I(t)$. El carácter maximal de ambos ideales prueba entonces que $I = I(t)$.

Probamos a continuación que la condición es suficiente. La familia $\{czf : f \in CB(S)\}$ es una base de abiertos para la topología de S, donde $czf = \{x \in S : f(x) \neq 0\}$ (**conjunto cocero**). Por tanto, si probamos que todo recubrimiento abierto de S formado por elementos de la familia anterior admite un subrecubrimiento finito, tendríamos probada la compacidad de S. Sea entonces $H \subseteq CB(S)$ con $\bigcup_{f\in H} czf = S$. Considérese el conjunto:

$$J = \{g \in CB(S) : \text{ existe } F \subseteq H \text{ finito con } zg \supseteq \bigcup_{f\in F} zf\}$$

Es claro que J no es vacío (contiene a H) y posee estructura de ideal, para lo cual basta observar que si $g_1, g_2 \in CB(S)$ es $z(g_1 + g_2) \supseteq z(g_1) \cap z(g_2)$, de donde J es cerrado para la suma. Análogamente, si $h \in CB(S)$ y $g \in J$ se tiene que $z(gh) = z(g) \cup z(h) \supseteq z(g)$, de donde gh es un elemento de J.

Vamos a probar a continuación que J coincide con el anillo. Supongamos que J es propio y así tendremos que J estará incluido en cierto ideal maximal $I(x)$. Será entonces $H \subseteq J \subseteq I(x)$, de donde

$$\bigcap_{f\in I(x)} zf \subseteq \bigcap_{f\in J} zf \subseteq \bigcap_{f\in H} zf.$$

La primera de las intersecciones anteriores coincide con el conjunto unitario $\{x\}$, pues según se vio en la implicación anterior dicha intersección debe ser unitaria o vacía, y es fácil ver que x pertenece a $\bigcap_{f\in I(x)} zf$. Tomando complementarios en la última cadena de inclusiones se obtiene que:

$$\bigcup_{f\in H} czf \subseteq S\setminus\{x\},$$

expresión que contradice la forma en la que habíamos tomado H.

Hemos probado que $J = CB(S)$, de donde existen $\{f_1,\ldots,f_n\}\subseteq H$ de forma que $\emptyset = ze \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} zf_i$. Esto equivale a que la familia $\{czf_1,\ldots,czf_n\}$ forma un recubrimiento finito de S. Este argumento concluye la demostración del teorema.

∎

Obsérvese que todos estos resultados, como los que le siguen, son extensibles al anillo $C(S)$, donde S es un espacio completamente regular y Hausdorff. En este anillo toda función que no se anule es una unidad, lo que simplifica las demostraciones anteriores. En particular, se tiene que el teorema 8.6.2 resulta válido si sustituimos el anillo $CB(S)$ por $C(S)$.

Según el teorema anterior, si S es no compacto, el anillo $CB(S)$ posee algún ideal maximal I que no es del tipo $I(x)$;esto es, de forma que el conjunto $\bigcap_{f\in I} zf$ es vacío. A estos ideales se les llama **ideales libres** y se llaman **ideales fijos** a los ideales del tipo $I(x)$.

Considérese la familia M de todos los ideales maximales del anillo $CB(S)$. Observemos que el subconjunto de M formado por aquellos ideales del tipo $I(x)$ están en correspondencia biyectiva con los elementos de S. Se tratará de dotar a M de estructura de espacio topológico de forma que el subconjunto anterior sea homeomorfo a S. Se procurará además que dicho subconjunto de ideales fijos sea denso y que M sea compacto.

Veremos primero en la siguiente nota algunas propiedades de los ideales maximales:

NOTA 8.3 Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff.

1.- Una condición suficiente y necesaria para que un ideal propio I de $CB(S)$ sea maximal, es que dada una función f del anillo que no esté en I, exista $g\in I$ de forma que f^2+g^2 sea invertible.

Veamos primero que la condición es necesaria. Del carácter maximal de I se sigue que dada $f\in CB(S)\setminus I$ es $I+(f)=CB(S)$ y así $e=g+hf$, con $g\in I$ y $h\in CB(S)$. Se trata de probar que f^2+g^2 es invertible (obsérvese en este punto que si el anillo fuese $C(S)$, esta propiedad sería inmediata). De la igualdad anterior se sigue que f y g no poseen ceros comunes y así f^2+g^2 no se anula. En nuestro caso, consideramos $\alpha>0$ de forma que $|h(x)|<\alpha$, para $x\in S$. Se trata de probar que para cierto $\beta>0$ y para cada $x\in S$ es $f^2(x)+g^2(x)>\beta$. Si esta última afirmación fuese falsa, podremos construir inductivamente una sucesión $(x_n)_n$ en S de forma que para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $f^2(x_n)+g^2(x_n)\leq\dfrac{1}{n}$. Usando entonces la expresión anterior de e, se tiene que

$$1 = e^2(x_n) = g^2(x_n) + h^2(x_n)f^2(x_n) + 2h(x_n)f(x_n)g(x_n) \leq \frac{1}{n} + \alpha^2\frac{1}{n} + 2\alpha\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Esta última desigualdad equivale a $n \leq 1 + \alpha^2 + 2\alpha$, obteniendo así una cota para los números naturales. Esta contradicción prueba la implicación.

Es inmediato establecer el carácter suficiente de la condición: cada ideal J que contiene estrictamente a I posee un elemento invertible (basta considerar $f \in J$ con $f \notin I$) y así $J = CB(S)$.

2. Considérese un ideal propio I y sean f, g dos elementos en $CB(S)$.

a) Si $f^2 + g^2$ es invertible y $f \in I$, entonces $g \notin I$.

b) Si I es maximal y $f \notin I$, entonces para cada g en $CB(S)$ se tiene que $f^2 + g^2 \notin I$.

En efecto, la demostración de a) es evidente. Para probar el segundo apartado, obsérvese que, por el apartado 1, existe $h \in I$ de forma que $f^2 + h^2$ es invertible. Se trata de ver que $(f^2 + g^2)^2 + h^2$ es también invertible, de donde, por el apartado a), se tiene el resultado. Sea $\alpha > 0$ tal que para cada x en S es $f^2(x) + h^2(x) > \alpha$. Fijado entonces un elemento $x_0 \in S$ podemos distinguir dos posibilidades:

1) El caso en que $h^2(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}$; entonces $(f^2+g^2)^2(x_0) + h^2(x_0)$ también cumple esta desigualdad;

2) Si $h^2(x_0) < \frac{\alpha}{2}$, será $f^2(x) \geq \frac{\alpha}{2}$, y así la función que estudiamos es mayor o igual que $\frac{\alpha}{4}$ en x_0. ∎

Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. Para cada elemento f del anillo $CB(S)$ definimos los conjuntos:

$$d(f) = \{I \in M : f \in I\}, \qquad h(f) = M \setminus d(f) = \{I \in M : f \notin I\}.$$

Si f es invertible es claro que el primer conjunto es vacío, mientras el segundo coincide con el conjunto de los ideales maximales del anillo. Si f es el elemento nulo, es $d(f) = M$ y así su complemento, $h(f)$, será vacío.

La topología que pretendemos construir en el conjunto M debe ser tal que si se restringe a la familia de los ideales maximales fijos resulta un espacio topológico homeomorfo a S. La aplicación que de manera natural debemos considerar (la denotaremos por φ) es aquella que envía cada elemento x de S al ideal $I(x)$. Esta aplicación es biyectiva sobre el conjunto $\{I \in M : I = I(x)$, para algún $x \in S\}$; la sobreyectividad es clara, mientras la inyectividad resulta de la siguiente observación: tal y como se establece en la demostración del teorema 8.6.2, el elemento x es el único cero común a todas las funciones del ideal $I(x)$. Así, si los ideales $I(x)$ e $I(y)$ coinciden será $x = y$.

Dado que S es completamente regular, la familia $\{czf : f \in CB(S)\}$ es una base de abiertos de S. Para que la aplicación φ sea un homeomorfismo, exigiremos que la imagen por φ de la familia anterior sea también una base de abiertos para la topología de M restringida al conjunto de los ideales maximales fijos; esto es, que la familia $\{\varphi(czf) : f \in CB(S)\}$ sea una base de abiertos en $\varphi(S)$. Obsérvese que:

$$\varphi(czf) = \{I(x) : f(x) \neq 0\} = \{I(x) : f \notin I(x)\} = h(f) \cap \varphi(S)$$

De esta forma hemos introducido la topología que estábamos buscando. En efecto, la familia $\mathcal{B} = \{h(f) : f \in CB(S)\}$ define una base de abiertos para una topología en M que denotaremos por T_S y llamaremos **topología de Stone**. Vamos a probar esta última afirmación:

En primer lugar, dado que $h(1) = M$ es claro que $\bigcup_{f \in CB(S)} h(f) = M$. Sean entonces $f, g \in CB(S)$ y sea I un ideal maximal en $h(f) \cap h(g)$. Dado que los ideales con los que trabajamos son primos, es fácil comprobar que $h(fg) = h(f) \cap h(g)$, de donde $I \in h(fg) \subseteq h(f) \cap h(g)$. Esto prueba que $\mathcal{B}$ es base de topología.

En la demostración anterior hemos introducido una relación entre los conjuntos que acabamos de definir. Con el fin de tenerla presente, vamos a recogerla a continuación junto con otras relaciones más, también de gran utilidad.

NOTA 8.4 En las condiciones de la situación anterior y para cualesquiera que sean los elementos f, g en $CB(S)$, se tienen las relaciones:

a) $(a \cdot 1)$ $\quad d(f^2 + g^2) = d(f) \cap d(g)$
   $(a \cdot 2)$ $\quad h(f^2 + g^2) = h(f) \cup h(g)$

b) $(b \cdot 1)$ $\quad d(f \cdot g) = d(f) \cup d(g)$
   $(b \cdot 2)$ $\quad h(f \cdot g) = h(f) \cap h(g)$

La demostración de $(a \cdot 1)$ es consecuencia del segundo apartado de la nota 8.6.3. Si I es un elemento de $d(f^2 + g^2)$ se cumple que $f^2 + g^2 \in I$. Por tanto, por el citado resultado, se tiene que $f \in I$, $g \in I$. La otra inclusión es evidente. La igualdad $(a \cdot 2)$ se obtiene tomando complementarios en $(a \cdot 1)$. ∎

Los siguientes teoremas van encaminados al estudio de las propiedades de la topología de Stone. Suponemos que estamos en las condiciones habituales; esto es, S es un espacio topológico completamente regular y deHausdorff. M denota el conjunto de los ideales maximales del anillo $CB(S)$.

TEOREMA 8.6.5 *Sea A un subconjunto de M:*

a) $cl(A) = \bigcap\{d(f) : f \in \bigcap_{I \in A} I\}$

b) $Int(A) = \bigcup\{h(f) : f \in \bigcap_{J \in M \setminus A} J\}$.

En el enunciado anterior, para no "provocar" al conjunto vacío, suponemos que A es propio. En caso contrario, su interior coincide con el propio conjunto.

DEMOSTRACIÓN Para probar el primer apartado basta observar que la clausura es la intersección de todos los cerrados que contienen al conjunto A y que pertenezcan a cualquier base de cerrados, por tanto también será la intersección de todos aquellos conjuntos $d(f)$ con $d(f) \supseteq A$; es decir, para cada I en A debe ser $f \in I$ o, equivalentemente, $f \in \bigcap_{I \in A} I$.

Probamos a continuación el apartado b). El conjunto $IntA$ es la unión de aquellos abiertos contenidos en A que pertenezcan a cualquier base de abiertos; por tanto también es la unión de los conjuntos $h(f)$, con $h(f) \subseteq A$. Para estudiar esta igualdad bastará estudiar que es lo que tiene que suceder para que $h(f)$ esté contenido en A. Distinguiremos dos casos:

1).- Sea $f \in \bigcap_{J \in M-A} J$ y considérese $I \in h(f)$. Dado que $f \notin I$, debe ser $I \in A$, lo que prueba que $h(f) \subset A$.

2).- Sea J ideal en $M \setminus A$ con $f \notin J$. Es claro que $J \in h(f)$ y que $J \notin A$, lo que prueba que es falso el que $h(f)$ esté contenido en A. Por tanto, el interior de A es la unión de los conjuntos $h(f)$ con $f \in \bigcap_{J \in M-A} J$, lo que concluye la demostración. ∎

TEOREMA 8.6.6 *El espacio topológico (M, T_S) es T_1.*

DEMOSTRACIÓN Es evidente pues tenemos que $\mathrm{cl}(\{I\}) = \bigcap\{d(f); f \in I\} = \{I\}$. Para justificar esta última igualdad basta observar que si J es un ideal maximal de forma que para cada f en I es $J \in d(f)$, se tiene que $I \subseteq J$, inclusión que prueba la igualdad de ambos ideales. ∎

NOTA 8.6.7 Nos preguntamos en este punto si es posible generalizar la construcción de esta topología a partir de un anillo arbitrario (que no coincida con el espacio de las funciones continuas y acotadas de un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff). A lo largo de este capítulo hemos usado en reiteradas ocasiones las propiedades específicas del anillo $CB(S)$. Un ejemplo de estas propiedades es la posibilidad de encontrar elementos del anillo que separen completamente subconjuntos cerrados de S y puntos de S. Si observamos de nuevo la demostración de la nota 8.6.3 (apartado 1. ó 2., b)) es fácil apreciar que en ella se hace uso de las características del espacio $CB(S)$, lo que impide la generalización de este razonamiento a un anillo arbitrario. Sin embargo, si examinamos los pasos que nos han permitido construir y estudiar la topología de Stone, observamos que no hemos empleado estas propiedades específicas y por tanto sería posible generalizar tales resultados al caso de un anillo A conmutativo y con unidad e. De esta forma, si $M(A)$ denota el conjunto de los ideales maximales del anillo A, es posible definir el espacio topológico $(M(A), T_S)$ que tiene las propiedades citadas, y en particular es T_1 (proponemos al lector, como ejercicio, que reproduzca todos los pasos precisos para obtener $(M(A), T_S)$).

En el siguiente teorema vamos a estudiar una condición suficiente y necesaria para que $(M(A), T_S)$ sea de Hausdorff.

TEOREMA 8.6.8 *Sea A un anillo conmutativo con unidad y sea T_S la topología de Stone considerada en el conjunto $M(A)$. Una condición suficiente y necesaria para que $(M(A), T_S)$ sea de Hausdorff, es que para cada par I, J de ideales maximales distintos de A existan dos elementos, a y b, de A que no pertenezcan respectivamente a I y J pero cuyo producto pertenezca a todo ideal maximal de A.*

DEMOSTRACIÓN Probemos en primer lugar que la condición es necesaria: si $(M(A), T_S)$ es de Hausdorff, existen $a, b \in A$ de forma que $h(a)$ y $h(b)$ son dos entornos abiertos disjuntos de I y J respectivamente. Es claro que $a \notin I$, $b \notin J$ y, por tanto, $h(a \cdot b) = h(a) \cap h(b) = \emptyset$; es decir, el producto pertenece a todo ideal maximal.

Para probar que la condición es suficiente basta observar que por hipótesis es $\emptyset = h(ab) = h(a) \cap h(b)$ con $I \in h(a)$, $J \in h(b)$. Por tanto, existen dos entornos abiertos de I y J respectivamente cuya intersección es vacía. ∎

Recogemos a continuación un ejemplo donde A es el anillo de enteros.

Ejemplo 8.6.9 En el anillo de los enteros cada ideal maximal es de la forma $p\mathbb{Z}$ donde p es primo; es decir, está formado por los múltiplos de un primo p. *Es fácil observar que* $(M(\mathbb{Z}), T_S)$ *no es Hausdorff, dado que no es posible que un mismo elemento pertenezca a todos los ideales maximales; es decir, sea múltiplo de cualquier primo.*

Cuando iniciamos la construcción de la topología de Stone nos propusimos que el espacio topológico (M, T_S) fuese compacto. Probamos ahora esta propiedad.

TEOREMA 8.6.10 *Si A es un anillo conmutativo y unitario, entonces $(M(A), T_S)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos en T_S la base de abiertos $\{h(a); a \in A\}$. Probaremos que cada recubrimiento abierto de $M(A)$, formado por elementos de la base, admite un subrecubrimiento finito. Sea entonces $H \subseteq A$ de forma que $\bigcup_{a \in H} h(a) = M(A)$. Esta condición equivale a que ningún ideal maximal I contenga a todos los elementos de H. Por tanto, no es posible que $H \subseteq I$ y el ideal generado por H no es propio. De esta forma, existen $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq H$ y $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq A$ tales que $e = \prod_{i=1}^{n} a_i b_i$. Esto significa que ningún ideal maximal puede contener a la familia $\{a_1, \ldots, a_n\}$; es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} d(a_i) = \emptyset$, lo que concluye la demostración. ∎

Vamos a probar que (M, T_S) es un espacio Hausdorff. Para ello necesitaremos el siguiente lema:

LEMA 8.6.11 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff y sean f, g elementos del anillo $CB(S)$, tales que $f^2 + g^2$ es invertible. Existen entonces h_1, h_2 elementos en $CB(S)$ de forma que:*

i) $f^2 + h_1^2$ *es invertible;*

ii) $g^2 + h_2^2$ *es invertible;*

iii) $h_1 \cdot h_2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN Para probar el lema, consideraremos el supremo, $\alpha > 0$, del conjunto $\{f^2(x) + g^2(x) : x \in S\}$. Las funciones definidas en S por $h_1 = \left(\frac{\alpha}{2} - f^2\right) \vee 0$ y $h_2 = \left(\frac{\alpha}{2} - g^2\right) \vee 0$ son continuas, acotadas y verifican la condición iii). Para probar las restantes condiciones consideramos un elemento $x \in S$ y distinguimos dos casos:

a) Si $f^2(x) \leq \frac{\alpha}{3}$ se cumple $h_1(x) \geq \frac{\alpha}{6}$, de donde $(f^2 + h_1^2)(x) \geq \frac{\alpha^2}{36}$.

b) Si $f^2(x) > \frac{\alpha}{3}$ se verifica $(f^2 + h_1^2)(x) > \frac{\alpha}{3}$.

Esto prueba que $f^2 + h_1^2$ es invertible. Análogamente se razona para $g^2 + h_2^2$. ∎

Usando este lema podemos establecer el resultado anunciado.

TEOREMA 8.6.12 *Con la notación usual, (M, T_S) es un espacio Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN Sean I, J elementos diferentes de M. Se trata de encontrar dos abiertos que los separan. Sea $f \in J$ de forma que f no está en I, y sea g un elemento de I con $f^2 + g^2$ invertible (nota 8.6.3). Es claro que $g \notin J$, por ser éste un ideal propio. Por el lema anterior, existen h_1, h_2 elementos del anillo $CB(S)$ que cumplen las tres condiciones recogidas en este lema. La condición iii) garantiza que $h(h_1) \cap h(h_2) = \emptyset$; es decir, se trata de dos abiertos disjuntos en la topología de Stone. Si observamos que $f \in J$, la condición i) permite afirmar que $h_1 \notin J$; es decir, $J \in h(h_1)$ (véase nota 8.6.3). De la misma forma, usando ii), se tiene que $I \in h(h_2)$. ∎

Si reflexionamos sobre los pasos que hemos dado, podemos observar que partiendo de un espacio topológico S completamente regular y de Hausdorff, hemos construido un nuevo espacio (M, T_S) compacto, de Hausdorff y que además posee un subconjunto homeomorfo a S. Estamos por tanto muy cerca de poder afirmar que (M, T_S) es una compactificación de S. Probaremos además que es "la más grande", frente a la compactificación de Alexandroff, o compactificación por un punto, que es "la más pequeña". Recordamos a continuación el concepto de compactificación:

DEFINICIÓN 8.6.13 *Sean X e Y dos espacios topológicos y sea F una aplicación de X en Y. Se dice que $[Y, F]$ es una* ***compactificación*** *de X si se tienen las siguientes propiedades:*

1. *F es una aplicación continua;*
2. *Y es compacto;*
3. *La aplicación F considerada de X en $F(X)$ es un homeomorfismo;*
4. *$F(X)$ es denso en Y.*

Veamos entonces el resultado anunciado:

TEOREMA 8.6.14 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. Siguiendo con la notación empleada, se tiene que $[(M, T_S), \varphi]$ es una compactificación de Hausdorff de S, donde φ es la aplicación de S en M que asocia a cada x es el ideal maximal $I(x) \in M$.*

DEMOSTRACIÓN Se trata de probar que $[(M, T_S), \varphi]$ cumple los cuatro puntos recogidos en la definición anterior. Para la continuidad de φ basta comprobar que la preimagen de cada elemento de la base de abiertos $\{h(f); f \in CB(S)\}$ es un abierto en S:

$$\varphi^{-1}(h(f)) = \{x \in S : I(x) \in h(f)\} = \{x \in S : f(x) \neq 0\} = czf.$$

El teorema 8.6.10 prueba que (M, T_S) es compacto y el comentario que hicimos justo antes de la nota 8.6.4 recoge la demostración del tercer punto; es decir, φ es un homeomorfismo de S en $\varphi(S)$. Recuérdese que φ transforma la base de abiertos de S $\{czf; f \in CB(S)\}$ en la familia $\{h(f) \cap \varphi(S); f \in CB(S)\}$, base de abiertos del espacio $\varphi(S)$.

Falta probar que $\varphi(S)$ es denso en M. Supongamos que f es un elemento del anillo $CB(S)$ con $h(f)$ no vacío. En tal caso debe ser $f \neq 0$ ($h(0) = \emptyset$); esto es, existe $x \in S$ tal que $f(x) \neq 0$. Esto significa que $I(x) \in h(f)$. Por tanto, cada abierto no vacío de la base tiene puntos comunes con $\varphi(S)$. ∎

Ya hemos comentado que esta compactificación era "la más grande". Veamos ahora qué sentido tiene esta última expresión.

DEFINICIÓN 8.6.15 *Sea X un espacio topológico y sean $[Y, F]$ y $[Z, G]$ dos compactificaciones de X. Diremos que la primera compactificación es mayor que la segunda, y lo denotaremos por $[Y, F] \geq [Z, G]$, si existe una aplicación H de Y en Z continua que verifica la igualdad entre aplicaciones $H \circ F = G$.*

Probaremos que, en la situación anterior, si las compactificaciones son de Hausdorff, entonces la aplicación H es sobreyectiva. Esta propiedad, unida a la continuidad de esta aplicación, supone que cada abierto en Z tiene "un correspondiente" en Y, también abierto. Esto explica, desde el punto de vista topológico, la expresión "Y es mayor que Z".

TEOREMA 8.6.16 *En las condiciones de la definición anterior y si las compactificaciones son de Hausdorff, la aplicación H es sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN Sea z un elemento arbitrario en Z y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en S con $z = \lim_\alpha G(x_\alpha)$. La compacidad de Y garantiza que la red $(F(x_\alpha))_{\alpha \in D}$ posee una subred convergente, que denotaremos por $(F(x_{\alpha'}))_{\alpha' \in D'}$. Por tanto, se tiene que $(x_{\alpha'})_{\alpha' \in D'}$ es una subred de $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$. Sea $y \in Y$ el límite de esta subred y considérese la siguiente cadena de igualdades, basada en la continuidad de las aplicaciones consideradas y en la igualdad $H \circ F = G$:

$H(y) = H(\lim_{\alpha'} F(x_{\alpha'})) = \lim_{\alpha'} H \circ F(x_{\alpha'}) = \lim_{\alpha'} G(x_{\alpha'}) = z.$ ∎

Introducimos a continuación la noción de equivalencia de compactificaciones.

DEFINICIÓN 8.6.17 *En las condiciones de la definición 8.6.15, se dice que ambas compactificaciones son equivalentes si existe un homeomorfismo H de Y en Z que verifica la igualdad entre aplicaciones $H \circ F = G$.*

Establecida esta definición, cabe preguntarse si resulta equivalente a que se cumplan las condiciones $[Y, F] \geq [Z, G]$ y $[Z, G] \geq [Y, F]$. En la próxima nota veremos que la respuesta es afirmativa si las compactificaciones son de Hausdorff.

TEOREMA 8.6.18 *Sea S un espacio topológico y sean $[Y, F]$ y $[Z, G]$ dos compactificaciones de Hausdorff de S. Son equivalentes:*

a) $[Y, F]$ y $[Z, G]$ son compactificaciones equivalentes.

b) Se tienen las relaciones $[Y, F] \geq [Z, G]$ y $[Z, G] \geq [Y, F]$.

DEMOSTRACIÓN La implicación $a) \Rightarrow b)$ es evidente.

Veamos entonces que el recíproco también es cierto. Supongamos que H y p son dos aplicaciones continuas, la primera de Y en Z y la segunda de Z en Y, que verifican las igualdades $H \circ F = G$ y $p \circ G = F$ Se trata de ver que H y p son mutuamente inversas. Si hacemos actuar la aplicación $H \circ p$ sobre un punto cualquiera de la forma $G(x)$, con $x \in S$, resulta que $H \circ p(G(x)) = H \circ (p \circ G(x)) = G(x)$; es decir, $H \circ p$ es la aplicación identidad en $G(S)$, que es un conjunto denso en el espacio Z. Sea ahora z un elemento arbitrario en Z y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en S con $z = \lim_\alpha G(x_\alpha)$. Se tiene entonces que:

$$H \circ p(z) = \lim_\alpha H \circ p(G(x_\alpha)) = \lim_\alpha G(x_\alpha) = z,$$

lo que concluye la igualdad $H \circ p = Id_Z$. Análogamente, se obtiene que $p \circ H = Id_Y$, lo que concluye la demostración. ∎

NOTA 8.6.19 Desde el inicio de esta sección hemos trabajado con un espacio T_{3a} (completamente regular y de Hausdorff, también llamado espacio Tychonoff), obteniendo una compactificación de Hausdorff del mismo. La siguiente nota muestra que las condiciones exigidas a nuestro espacio S no pueden reducirse.

Demostraremos que si S es un espacio topológico y $[Y, F]$ es una compactificación de Hausdorff de este espacio, entonces S es T_{3a}.

Basta hacer dos observaciones para realizar la demostración. La primera es que la aplicación F considerada de S en $F(S)$ es un homeomorfismo. Si tenemos en cuenta además que la propiedad T_{3a} es hereditaria (así $F(S)$ también la posee) y topológica, llegamos a que S es un espacio T_{3a}.

Como ya hicimos notar, todos los resultados son igualmente válidos si el anillo $CB(S)$ es sustituido por $C(S)$. Ya observamos también que muchas demostraciones podían simplificarse en este último caso, y de ahí que hayamos elegido en nuestro desarrollo el anillo $CB(S)$. De esta forma, para el anillo $C(S)$ obtenemos la compactificación Hausdorff $[M(C(S)), \varphi]$, donde φ está definida por $\varphi(x) = I(x)$. Es más, veremos que ambas compactificaciones son equivalentes.

Los siguientes resultados proporcionan condiciones bajo las cuales los espacios de ideales que hemos construido son homeomorfos:

NOTA 8.20

1. Si dos anillos A y A' son isomorfos, entonces los correspondientes espacios topológicos $M(A)$ y $M(A')$ son homeomorfos.

   Sea φ el isomorfismo recogido en el enunciado y considérese la aplicación H de $M(A)$ en $M(A')$ definida por $H(I) = \varphi(I)$, para $I \in M(A)$, donde $\varphi(I) = \{\varphi(a) : a \in I\}$. Se trata de una aplicación bien definida y biyectiva, que envía la familia $\{h(a) : a \in A\}$, base de abiertos en el primer espacio, a $\{h(\varphi(a)) : a \in A\} = \{h(a') : a' \in A'\}$, lo que prueba que H es un homeomorfismo.

2. Si S es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces es homeomorfo a cualquiera de los siguientes espacios:

   i) $M(CB(S))$.

   ii) $M(C(S))$.

   Obsérvese que en particular ambos espacios son homeomorfos.

   Esta afirmación es consecuencia del teorema 8.6.14, ya que en el caso particular de que S sea compacto se verifica que $\varphi(S)$ coincide con $M(CB(S))$ ó con $M(C(S))$, según el anillo que consideremos, (todo ideal maximal es de la forma $I(X)$) y, de la propiedad 3. de la definición de compactificación, se sigue que S y $\varphi(S)$ son homeomorfos.

3. Sean X, Y espacios topológicos compactos y de Hausdorff. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   i) X e Y son espacios homeomorfos.

   ii) $CB(X)$ y $CB(Y)$ son anillos isomorfos.

   iii) $C(X)$ y $C(Y)$ son anillos isomorfos.

   Probaremos que las condiciones i) y ii) son equivalentes. Análogamente puede probarse que i) y iii) también lo son. Partimos primero de i) y consideramos α un homeomorfismo de X en Y. La aplicación φ de $CB(X)$ en $CB(Y)$ dada por $\varphi(f) = f \circ \alpha^{-1}$ es un isomorfismo.

   El recíproco es consecuencia de los dos apartados anteriores. Por 2., X y $M(CB(X))$ son espacios homeomorfos; del mismo modo que Y y $M(CB(Y))$ también lo son.

∎

Los siguientes resultados recogen importantes propiedades que nos permitirán mas adelante caracterizar, salvo equivalencia, la compactificación que estamos estudiando.

TEOREMA 8.6.21 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff y considérese la compactificación $[(M, T_S), \varphi]$. Si f, g son funciones en $CB(S)$ que no poseen ceros comunes, entonces el conjunto $cl(\varphi(zf)) \cap cl(\varphi(zg))$ es vacío.*

DEMOSTRACIÓN Obsérvese en primer lugar que

$$\varphi(zf) = \{I(x) : f(x) = 0\} = d(f) \cap \varphi(X)$$

y que, análogamente, $\varphi(zg) = d(g) \cap \varphi(X)$. Para probar que la intersección anterior es vacía, construiremos h_1, h_2, elementos de $CB(S)$, de forma que $d(h_1)$ y $d(h_2)$

tengan intersección vacía y contengan a $\varphi(zg)$ y $\varphi(zf)$, respectivamente. Por hipótesis, f y g no poseen ceros comunes, de donde resulta que la aplicación h de X en $[0,1]$ dada por $h(x) = \frac{f^2}{f^2+g^2}(x)$ está bien definida y pertenece al anillo $CB(S)$ (obsérvese que no se afirma que f^2+g^2 sea invertible). Considérense las aplicaciones, también del citado anillo,

$$h_1 = \left(\frac{2}{3} - h\right) \vee 0, \qquad h_2 = \left(h - \frac{1}{3}\right) \vee 0.$$

Veamos que $h_1^2 + h_2^2$ es una unidad en $CB(S)$, para lo cual, fijado un $x \in S$, distinguimos dos casos:

Caso 1. Si $h(x) \leq \frac{1}{2}$, entonces se cumple $h_1(x) \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Caso 2. Si $h(x) > \frac{1}{2}$, entonces se verifica $h_2(x) > \frac{1}{6}$.

Por tanto, la función $h_1^2 + h_2^2$ nunca toma valores inferiores a $\frac{1}{36}$. La nota 8.6.4 prueba entonces que $d(h_1)$ y $d(h_2)$ son dos cerrados disjuntos.

Veamos ahora que $\varphi(zf) = d(f) \cap \varphi(s) \subseteq d(h_2)$, lo que equivale a probar que para cada x en S que anula a f (esto es, $I(x) \in d(f)$) se verifica que $h_2(x) = 0$. Para ello obsérvese que si x es un cero de f entonces lo es de h y, por tanto, de h_2. Análogamente se prueba que $\varphi(zg) \subseteq d(h_1)$, lo que concluye la demostración. ▪

El lema siguiente será una pieza clave en la demostración de otra propiedad que, al igual que la anterior, caracteriza la compactificación que estamos estudiando.

LEMA 8.6.22 *Sean X, Y espacios topológicos con Y regular y de Hausdorff. Considérese un subconjunto denso A de X y f una aplicación continua de A en Y. Si para cada red $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ de A que converja en X se cumple que $(f(x_\alpha))_{\alpha\in D}$ es una red convergente en Y, entonces existe una aplicación continua $\overline{f}$ de X en Y que extiende la anterior; esto es, $\overline{f}|_A = f$.*

Obsérvese que el recíproco de esta propiedad es evidente, a partir de la continuidad de $\overline{f}$.

DEMOSTRACIÓN Comenzaremos construyendo, para cada $x \in X$, una red contenida en A, con la propiedad de que cualquier otra red de A que converja hacia dicho punto será subred de ésta. Para ello consideramos el conjunto $D(x)$ de los pares (x_U, U) con U entorno de x y $x_U \in U \cap A$. En $D(x)$ podemos considerar la relación $(x_U, U) \leq (x_{U'}, U')$ si y sólo si $U' \subseteq U$. Es fácil comprobar que $(D(x), \leq)$ es un conjunto dirigido. Puede entonces considerarse la red $S(x)$ que envía cada elemento (x_U, U) en $D(x)$ a x_U. Por la construcción de la red, se tiene que $S(x)$ converge a x y que cualquier otra red $\{z_\alpha\}_{\alpha\in L}$ en A con $x \in \lim\limits_{\alpha} z_\alpha$ es una subred de $S(x)$. Para probar esta última afirmación basta observar que para cada $(x_U, U) \in D(x)$ existe $\alpha_0 \in L$ de forma que $z_\alpha \in U$, para cada $\alpha \gg \alpha_0$ (denotamos por $\gg$ la relación definida en L). Es decir, $(z_\alpha, U) \in D(x)$, con $(x_U, U) \leq (z_\alpha, U)$ y $z_\alpha \in S(x)$, para cada $\alpha \gg \alpha_0$.

A partir de aquí definimos la aplicación $\overline{f}$ por $\overline{f}(x) = \lim f(S(x))$. Es claro que:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A, \\ \lim f(S(x)), & \text{si } x \in X - A. \end{cases}$$

Veamos que $\overline{f}$ está bien definida. Lo primero que debe observarse es que, por hipótesis, la red $f(S(x))$ es convergente en Y y que su límite es único, por tratarse de un espacio de Hausdorff. Cabe añadir dos observaciones: en primer lugar, cualquier otra red $\{z_\alpha\}_{\alpha \in L}$ en A que converja a x es tal que $\{f(z_\alpha)\}$ es una subred de $f(S(x))$, y así tiene el mismo límite; en segundo lugar, por la continuidad de f, la igualdad $\overline{f}(x) = \lim f(S(x))$ es cierta para cada x en X.

Es claro, además, que $\overline{f}$ extiende nuestra aplicación original. Sólo falta probar entonces la continuidad de esta extensión. Dado que Y es un espacio regular, todo punto tiene una base de entornos cerrados. Sea entonces $x_0 \in X$ y W un entorno cerrado en Y de $\overline{f}(x_0)$. Se trata de encontrar U_0 entorno de x_0 tal que $f(U_0) \subseteq W$. Por definición de la aplicación $\overline{f}$, debe existir un elemento (x_{U_0}, U_0) en $D(x_0)$ tal que para cada (x_U, U) con $(x_{U_0}, U_0) \leq (x_U, U)$ es $f(x_U) \in W$. En particular, si $x \in U_0 \cap A$ se cumple que $(x, U_0) \geq (x_{U_0}, U_0)$, de donde $f(x)$ está en W; es decir, $f(U_0 \cap A) \subseteq W$.

Sea ahora $z \in U_0 \setminus A$ y sea $(z_\alpha)_{\alpha \in L}$ una red en A que converge a z. Podemos entonces considerar un $\alpha_0 \in L$ de forma que $z_\alpha \in U_0$ para cada $\alpha \gg \alpha_0$. Por tanto, según acabamos de probar, la red $(f(z_\alpha))_{\alpha \gg \alpha_0}$ está contenida en W, y converge a $\overline{f}(z)$. Dado que W se tomó cerrado, debe ser $\overline{f}(z) \in W$. Esto prueba que $\overline{f}(U_0) \subseteq W$, y así concluye la demostración. ∎

8.6.1 Propiedades de la compactificación de Stone-Cech

Todos estos resultados nos permiten probar ahora las propiedades que a continuación enunciamos. Estas caracterizan a la compactificación que veníamos estudiando, dando origen a un nuevo concepto: la compactificación de Stone-Cech.

TEOREMA 8.6.23 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. Siguiendo la notación empleada en esta sección, $[(M, T_S), \varphi]$ es una compactificación de S con las siguientes propiedades:*

1. *Para cada par de aplicaciones f, g en $CB(S)$ con $zf \cap zg = \emptyset$ se tiene que $cl(\varphi(zf)) \cap cl(\varphi(zg)) = \emptyset$.*

2. *Si f es una aplicación de S en $\mathbb{R}$ continua y acotada, existe una única aplicación continua $\overline{f}$ de M en $\mathbb{R}$ que verifica la igualdad $\overline{f}\varphi = f$.*

3. *La propiedad 2. sigue siendo válida si sustituimos $\mathbb{R}$ por cualquier espacio Z que sea compacto y Hausdorff y f es una aplicación continua de S en Z.*

4. *Es "la mayor" de las compactificaciones de S, esto es, si $[Z, F]$ es una compactificación Hausdorff de S, entonces $[Z, F] \leq [M, \varphi]$.*

Antes de pasar a la demostración, obsérvese que, por 2., es posible extender toda aplicación continua y acotada definida en S (obsérvese que identificamos S y $\varphi(S)$, dado que son homeomorfos). Esta es una peculiaridad esencial de la compactificación de Stone y Cech.

DEMOSTRACIÓN El apartado 1. coincide con el teorema 8.6.21 y, por tanto, ya ha sido probado.

A partir del lema 8.6.22 vamos a probar 2: considérese la aplicación, que también denotamos por $\overline{f}$, de $\varphi(S)$ en $\mathbb{R}$ definida por $\overline{f}(\varphi(x)) = f(x)$. Es claro que ésta es una aplicación continua (si $\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$ es una red en $\varphi(S)$ convergente a cierto $\varphi(x)$, de la continuidad de φ^{-1}, se sigue que $x = \lim_\alpha x_\alpha$). Para establecer el resultado, basta probar la condición referente a las redes recogidas en el citado lema: es decir, cada red $(I(x_\alpha))_{\alpha\in L}$ en $\varphi(S)$, convergente a cierto $I \in M$, verifica que $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Por ello, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que esta última red no converge en $\mathbb{R}$. Dado que f es una aplicación acotada, el conjunto Im f está contenido en un compacto (así $\overline{\text{Im } f}$) y por tanto $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$ posee al menos un punto de aglomeración. Por su carácter no convergente, éste punto no puede ser único. Es decir, deben existir $a, b \in \mathbb{R}$ diferentes y $\{f(x_\beta)\}_{\beta\in L'}$, $\{f(x_\gamma)\}_{\gamma\in L''}$, subredes de $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$, que convergen respectivamente a a y b. Si elegimos ε suficientemente pequeño y positivo, tenemos que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon] = \emptyset$. Por el lema de Urysohn, ambos cerrados están completamente separados, esto es, existe una aplicación continua g de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$ con $g([a-\varepsilon, a+\varepsilon]) = \{0\}$ y $g([b-\varepsilon, b+\varepsilon]) = \{1\}$. Considérese entonces las aplicaciones en $CB(S)$ dadas por $h = g \circ f$, $p = 1 - h$. Es claro que estas aplicaciones no poseen ceros comunes y que tenemos que $\text{cl}(\varphi(zh)) \cap \text{cl}(\varphi(zp)) = \emptyset$. Dado que $a = \lim_\beta f(x_\beta)$, es fácil comprobar que existe $\beta_0 \in L'$ de forma que $x_\beta \in zh$, para cada $\beta \geq \beta_0$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que $\{x_\beta\}_{\beta\in L'} \subseteq zh$. Análogamente podemos considerar que $\{x_\gamma\}_{\gamma\in L''} \subseteq zp$.

Recuérdese que $\{I(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$ es una red convergente a I. Como $\{\ I(x_\beta)\ \}_{\beta\in L'}$ y $\{I(x_\gamma)\}_{\gamma\in L''}$ son subredes de ésta, se tiene que ambas convergen al mismo límite. Si observamos que $I(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, se tiene que las subredes anteriores están contenidas respectivamente en $\varphi(zh)$ y $\varphi(zp)$. Es decir, I pertenece a la intersección $\text{cl}(\varphi(zh)) \cap \text{cl}(\varphi(zp))$. Por 1., esta intersección debe ser vacía. Obtenemos así una contradicción, que prueba el carácter convergente de la red $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha\in L}$.

Probemos ahora la unicidad de $\overline{f}$: sea $\overline{g}$ otra aplicación que posee las propiedades recogidas en 2. Para cada x en S se cumple que $\overline{f}(\varphi(x)) = f(x)$ y $\overline{g}(\varphi(x)) = f(x)$. Es decir, $\overline{f}$ y $\overline{g}$ coinciden en $\varphi(S)$. Como $\varphi(S)$ es denso, tenemos que $\overline{f} = \overline{g}$ en M.

La demostración de 3. es idéntica al apartado 2). Obsérvese que todo espacio compacto y de Hausdorff es normal, por lo que todas las propiedades exigidas a $\mathbb{R}$ las reúne también el espacio considerado.

El apartado 4. es una consecuencia del anterior. Sea $[Z, F]$ una compactificación Hausdorff de S y sea $\overline{F}$ la aplicación de M en Z construida en el apartado anterior, por lo que es continua y es tal que $\overline{F}\varphi = F$. De la definición 8.6.15 resulta entonces que $[Z, F] \leq [M, \varphi]$. ∎

DEFINICIÓN 8.6.24 *Toda compactificación de Hausdorff de S que reúna las propiedades recogidas en el teorema anterior se denomina* ***compactificación de Stone-Cech de*** S.

Obsérvese que, según se recoge en el teorema 8.6.18, esta compactificación es única, salvo equivalencia, y así coincide con $[M, \varphi]$.

NOTA 8.6.25 Si el lector examina de nuevo la demostración del teorema anterior puede observar que cada apartado es consecuencia del anterior. Concretamente si una compactificación Hausdorff $[Y, F]$ de S verifica 1. entonces verifica 2., 3. y 4.. Pero, por verificar 4, tiene que ser equivalente a $[M, \varphi]$ y, por tanto, es la compactificación de Stone-Cech.

Análogamente si una compactificación de Hausdorff $[Y, F]$ verifica 2., también puede probarse que verifica 3. y 4. Por tanto, esa compactificación es equivalente a $[M, \varphi]$. Por consiguiente, la compactificación $[Y, F]$ tendrá que verificar también la propiedad 1.

De esta manera, llegamos a la siguiente conclusión: *Si S es un espacio completamente regular y Hausdorff y $[Y, F]$ es una compactificación de Hausdorff de S entonces son equivalentes las propiedades $1, 2, 3$ y 4: si posee una de estas propiedades automáticamente tiene todas las demás y se verifica que $[Y, F]$ es equivalente a $[M, \varphi]$; es decir, $[Y, F]$ es la compactificación de Stone - Cech de S.*

De todas maneras, y como mero pasatiempo, probaremos de forma directa que si una compactificación $[Y, F]$ de S tiene la propiedad 2 entonces también tiene la 1.

En efecto, sean f y g aplicaciones de $CB(S)$ que no poseen ceros comunes. Considérese la aplicación h de S en $[0, 1]$ definida por $h(x) = \dfrac{f^2(x)}{f^2(x) + g^2(x)}$. Es claro que h es continua y verifica las igualdades $h(zf) = \{0\}$ y $h(zg) = \{1\}$. Por hipótesis, es posible extender la aplicación h; esto es, existe una aplicación $\bar{h}$ de Y en $[0, 1]$ continua y que verifica la igualdad $\bar{h}F = h$. De aquí se tiene que los conjuntos $F(zf)$ y $F(zg)$ están contenidos respectivamente en $\overset{-1}{\bar{h}}(\{0\})$ y $\overset{-1}{\bar{h}}(\{1\})$; estos conjuntos son dos cerrados disjuntos que contienen respectivamente las clausuras de aquellos conjuntos, lo que prueba que la intersección del apartado 1 es vacía.

La compactificación de Stone-Cech de un espacio S suele ser denotada por $(\beta S, \beta)$. En el próximo teorema vamos a obtener nuevas, e interesantes, propiedades de esta compactificación.

TEOREMA 8.6.26 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff y sea $(\beta S, \beta)$ su compactificación de Stone-Cech.*

i) Si A y B son subconjuntos de S completamente separados (esto es, existe una aplicación continua f de S en $[0, 1]$ con $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$) entonces los conjuntos $cl(\beta(A))$ y $cl(\beta(B))$ son disjuntos.

ii) Si A es un subconjunto clopen de S, entonces $cl(\beta(A))$ también es clopen en βS.

iii) La aplicación H definida de $CB(S)$ en $C(\beta S)$ por $H(f) = \overline{f}$ (véase el apartado 2) del teorema 8.6.23) es una isometría lineal y sobreyectiva entre espacios de Banach. Desde el punto de vista algebraico, dicha aplicación es un isomorfismo de anillos.

DEMOSTRACIÓN Para probar $i)$, basta observar que, si definimos la aplicación g en la forma $g = 1 - f$, se tiene que los conjuntos A y B están respectivamente contenidos en zf y zg. La propiedad 1) prueba que $\text{cl}(\beta(zf)) \cap \text{cl}(\beta(zg))$ es vacío, y en particular lo será cualquier subconjunto suyo.

Probemos ahora el segundo apartado. Para ello usaremos la propiedad $i)$, aplicada a los conjuntos A y $S - A$. La aplicación $f = \chi_A$ es continua, ya que A es un clopen. Se tiene entonces que $\text{cl}(\beta(A))$ y $\text{cl}(\beta(S - A))$ son disjuntos, y verifican además la siguiente cadena de igualdades:

$$\text{cl}(\beta(A)) \cup \text{cl}(\beta(S - A)) = \text{cl}(\beta(A) \cup \beta(S - A)) = \text{cl}(\beta(S)) = \beta S.$$

Es decir, se trata de dos conjuntos cerrados y disjuntos, cada uno de los cuales es el complementario del otro (partición de βS). Por tanto, son conjuntos clopen.

La propiedad $iii)$ puede demostrarse, a partir de 2), como sigue. Por la unicidad de la aplicación $\overline{f}$, es claro que H es lineal y sobreyectiva (dada $T \in C(\beta S)$, $T \circ \beta$ es su antiimagen por H). Además H conserva la norma dado que de la igualdad $\overline{f}(\beta(x)) = f(x)$, para $x \in S$, se sigue que la norma de f coincide con el supremo de $\overline{f}$ en $\beta(S)$, y así, por densidad, con la norma de $\overline{f}$.

Análogamente, usando la unicidad, es fácil comprobar que H es un isomorfismo de anillos (la inyectividad es consecuencia de la igualdad $\overline{f} \cdot \beta = f$). ■

Vamos a estudiar algunas propiedades más de la compactificación de Stone-Cech.

NOTA 8.27 a) Sea S un espacio topológico normal y de Hausdorff y sea t un elemento de $\beta S \setminus \beta(S)$. No es posible encontrar una sucesión en $\beta(S)$ cuyo límite sea t.

La demostración de a) la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\{\beta(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\beta(S)$ que converge a t. Es sencillo comprobar que los conjuntos $H_1 = \{\beta(x_{2n}); n \in \mathbb{N}\} \cup \{t\}$ y $H_2 = \{\beta(x_{2n-1}); n \in \mathbb{N}\} \cup \{t\}$ son cerrados.

Es claro entonces que los términos pares de la sucesión original (esto es, $H_1 \cap \beta(S)$) forman un conjunto cerrado en $\beta(S)$. La misma propiedad posee el conjunto de los términos impares, además tenemos que $t \in \text{cl}(H_1 \cap \beta(S)) \cap \text{cl}(H_2 \cap \beta(S))$. Dado que β es un homeomorfismo, los conjuntos $\{x_{2n}; n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_{2n-1}; n \in \mathbb{N}\}$ son cerrados, además de disjuntos y completamente separados (recuérdese que S es normal). La propiedad $i)$, recogida en el teorema 8.6.26, afirma entonces que $\text{cl}(H_1 \cap \beta(S)) \cap \text{cl}(H_2 \cap \beta(S)) = \emptyset$ y esto constituye una contradicción.

b) Supongamos que el espacio de partida es (ω, T_D) donde ω denota el conjunto de los números naturales y T_D es la topología discreta. Este espacio es T_4 (normal y T_2) y, según la propiedad iii) del teorema 8.6.26, $CB(\omega)$ (esto es, l_∞)

es linealmente isométrico a $C(\beta\omega)$. Esto prueba que l_∞ es un espacio de funciones continuas sobre un compacto. En el siguiente apartado se verá que $\beta\omega$ es 0-dimensional.

c) Se dice que un espacio topológico S es **fuertemente 0-dimensional** si para cada par de aplicaciones f, g en $CB(S)$ que no posean ceros comunes, existe un clopen $A \subseteq S$ con $zf \subseteq A$ y $zg \subseteq S \backslash A$.

Vamos a probar, a continuación, que una condición necesaria y suficiente para que βS sea 0-dimensional es que S sea fuertemente 0-dimensional.

Veamos que la condición es necesaria. Sean f, g aplicaciones en $CB(S)$ que no poseen ceros comunes. Los conjuntos $\mathrm{cl}(\beta(zf))$ y $\mathrm{cl}(\beta(zg))$ son, por el teorema 8.6.23, cerrados y disjuntos. Estos conjuntos pueden entonces ser separados por abiertos (βS es normal); es decir, existen A_1 y A_2 abiertos disjuntos que contienen respectivamente a estos cerrados. Dado que βS es 0-dimensional, es posible recubrir $\mathrm{cl}(\beta(zf))$ con conjuntos clopen contenidos en A_1. Dicho recubrimiento admite un subrecubrimiento finito, y así el cerrado anterior está contenido en un clopen B cuya antiimagen A por β cumple lo que pretendíamos.

Veamos que la condición es suficiente. Sea U un conjunto abierto de βS y sea $x \in U$. Probaremos que existe un conjunto clopen B tal que $x \in B \subset U$. Tenemos que existe una función continua $\overline{f}$ de βS en $[0,1]$ tal que $\overline{f}(x) = 0$ y $\overline{f}(\beta S \setminus U) = \{1\}$. Consideremos las funciones $\overline{g}_1 = (\overline{f} - \frac{1}{3}) \vee 0$ y $\overline{g}_2 = (\frac{2}{3} - \overline{f}) \vee 0$. Sean $g_1 = \overline{g}_1\beta$ y $g_2 = \overline{g}_2\beta$. Tenemos que g_1 y g_2 son de $CB(S)$ y $zg_1 \cap zg_2 = \emptyset$. Por tanto, existe un subconjunto clopen A de S tal que $zg_1 \subset A$ y $zg_2 \subset S \setminus A$. Se verifica que $\mathrm{cl}(\beta(z\chi_A)) \cap \mathrm{cl}(\beta(z\chi_{S\setminus A})) = \emptyset$. Por tanto, $\mathrm{cl}(\beta(S \setminus A)) \cap \mathrm{cl}(\beta(A)) = \emptyset$. Como $\mathrm{cl}(\beta(A)) \cup \mathrm{cl}(\beta(S \setminus A)) = \beta S$, deducimos que $B = cl(\beta(A))$ es un conjunto clopen en βS. Si $z \in B$, existe una red, $(z_\alpha)_{\alpha \in L}$, en A tal que $\lim_{\alpha \in L} \beta(z_\alpha) = z$. Para cada $\alpha \in L$ se tiene $g_2(z_\alpha) = \overline{g}_2(\beta z_\alpha) \neq 0$ y así también será $\overline{f}(\beta(z_\alpha)) \leq \frac{2}{3}$. Deducimos, por tanto, que $\overline{f}(z) \leq \frac{2}{3}$. Ha quedado probado que $B \subset U$. Finalmente probaremos que $x \in B$; en efecto, en otro caso sería $x \in \mathrm{cl}(\beta(S \setminus A))$ y existirá una red $(z_\alpha)_{\alpha \in L}$ en $S \setminus A$ de modo que $\lim \beta(z_\alpha) = x$. Para cada $\alpha \in L$, se cumple $g_1(z_\alpha) = \overline{g}_1(\beta z_\alpha) \neq 0$. Por consiguiente, también se cumple $\overline{f}(\beta z_\alpha) \geq \frac{1}{3}$ y deducimos que $\overline{f}(x) \geq \frac{1}{3}$, lo que es falso.

■

Vamos a estudiar a continuación otro modelo para la compactificación de Stone-Cech, equivalente al anterior. Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. Considérese el espacio normado $CB(S)$, que denotaremos por Z. Sea Z^* el espacio dual y B_{Z^*} la bola unidad, en la cual consideramos la topología estrella - débil (T_{*-w}). En este último espacio (B_{Z^*}, T_{*-w}) consideramos el subconjunto:

$$KS = \mathrm{cl}\{\delta_t : t \in S\},$$

donde δ_t denota la aplicación de $CB(S)$ en $\mathbb{R}$ dada por $\delta_t(f) = f(t)$. Es fácil comprobar que δ_t es lineal, continua y su norma es igual a la unidad. Por tanto, $\delta_t \in B_{Z^*}$. El estudio que ahora comenzamos va dirigido a probar que (KS, T_{*-w}), con la aplicación natural de S en KS que envía cada $t \in S$ a δ_t, es una compactificación Hausdorff de S, que posee además la propiedad 2. del teorema 8.6.23;

esto es, se trata de la compactificación de Stone-Cech.

En los teoremas que siguen emplearemos la notación que acabamos de introducir.

TEOREMA 8.6.28 *Sea S un espacio topológico completamente regular y de Hausdorff. $[(KS, T_{*-w}), k]$ es una compactificación de Hausdorff de S, donde $k : S \to KS$ está definida por $k(t) = \delta_t$.*

DEMOSTRACIÓN Para probar que kS es compacto basta observar que, por el teorema de Banach-Alaoglu, (B_{Z^*}, T_{*-w}) es un espacio compacto; así, cada subespacio cerrado también lo será. Por el mismo motivo, es claro que se trata de un espacio de Hausdorff. La imagen de la aplicación k coincide con $\{\delta_t : t \in S\}$, que es denso en kS. Falta entonces probar que k es continua y un homeomorfismo, como aplicación de S en $k(S)$. Sea $(t_\alpha)_{\alpha\in L}$ una red en S convergente a t, con $t \in S$. Por continuidad, si $f \in CB(S)$ se cumple $f(t) = \lim_\alpha f(t_\alpha)$; es decir, $(\delta_{t_\alpha}(f))_{\alpha\in L}$ es una red convergente a $\delta_t(f)$, lo que prueba que $*\text{-}w \lim_\alpha \delta_{t_\alpha} = \delta_t$.

Estudiamos a continuación la inyectividad de k. Recordemos que en un espacio completamente regular los puntos y los conjuntos cerrados están completamente separados. Por consiguiente, si t_1, t_2 son elementos en S con $f(t_1) = f(t_2)$, para cada $f \in CB(S)$, necesariamente se cumple que $t_1 = t_2$.

Sólo queda ver que k^{-1} (definida sobre $k(S)$) es continua. Sea entonces $(\delta_{t_\alpha})_{\alpha\in L}$ una red convergente a δ_t; es decir, $\lim_\alpha f(t_\alpha) = f(t)$, para cada $f \in CB(S)$. Razonamos por reducción al absurdo. Suponiendo que la red $(t_\alpha)_{\alpha\in L}$ no converge a t, tenemos garantizada la existencia de un entorno abierto V de t y de una subred de $(t_\alpha)_{\alpha\in L}$, $(t_\beta)_{\beta\in L'}$, de forma que $\{t_\beta; \beta \in L'\} \cap V = \emptyset$. De aquí resulta que $t \notin \text{cl}\{t_\beta; \beta \in L'\}$ y que existe una aplicación continua f de S en $[0, 1]$ que separa el punto t y el cerrado anterior. Esto contradice la propiedad de que la red $(f(t_\alpha))_{\alpha\in L}$ converge a $f(t)$. ∎

Vamos a completar nuestro estudio viendo que esta compactificación cumple la propiedad 2. del teorema 8.6.23.

TEOREMA 8.6.29 *En las condiciones anteriores, $[(KS, T_{*-w}), k]$ es la compactificación de Stone-Cech. Es decir, para cada aplicación f en $CB(S)$ existe una única aplicación continua $\overline{f}$ de KS en $\mathbb{R}$ con $\overline{f} \circ k = f$.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $z^* \in kS$ se define $\overline{f}(z^*) = z^*(f)$. Se trata de una aplicación bien definida, que verifica la igualdad recogida en el enunciado. Es decir, si $t \in S$ se tiene que $\overline{f} \circ k(t) = \overline{f}(\delta_t) = f(t)$. Supongamos entonces que en kS es $(z_\alpha^*)_{\alpha\in L}$ una red convergente a z^*. En la topología T_{*-w} esto equivale a afirmar que para cada f en $CB(S)$ se cumple $\lim_\alpha z_\alpha^*(f) = z^*(f)$; es decir, $\lim_\alpha \overline{f}(z_\alpha^*) = \overline{f}(z^*)$, lo que prueba la continuidad de $\overline{f}$.

La unicidad puede probarse siguiendo los mismos pasos que en el teorema 8.6.23. ∎

Tema 9

Subespacios complementados

9.1 Complementos algebraicos y topológicos

DEFINICIÓN 9.1.1 *Sea X un espacio vectorial y sean A y B dos subespacios vectoriales de X. Se dice que A y B son* ***complementos algebraicos en X*** *si $A + B = X$ y $A \cap B = \{0\}$.*

Esto es equivalente a afirmar que para cada $x \in X$ existen dos únicos $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x = a + b$. Si A y B son complementos algebraicos en X, también diremos que B **es el complemento algebraico de A en X** o bien que A **es el complemento algebraico de B en X.**

En esta situación, se define la aplicación proyección sobre A desde B por $p : X \to A, p(a + b) = a$. Es claro que p es sobreyectiva y que $\ker p = B$. Además, $p(p(a + b)) = a = p(a + b)$, por lo que $p^2 = p$. Observemos que si $q = I - p$ será $q(a + b) = a + b - a = b$. Por tanto, q será la proyección sobre B desde A.

Si $p : X \to X$ es una aplicación lineal tal que $p^2 = p$ tendremos que para cada $p(a) \in p(X)$ se tiene que $p(p(a)) = p(a)$. Demostraremos que $\ker p$ y $p(X)$ son complementos algebraicos de X y que, por tanto, p es una proyección sobre $p(X)$. En efecto, si $x \in X$ se tiene $x = (x - p(x)) + p(x)$, con $x - p(x) \in \ker p$ y $p(x) \in p(X)$. Además, si $x \in \ker p \cap p(X)$ será $x = p(a)$, para algún $a \in X$. Por otro lado, también se cumple $0 = p(x) = p(p(a)) = p(a) = x$.

Finalmente, observemos que si A es un subespacio vectorial de X y p es una aplicación lineal de X en A tal que $p(a) = a$, para $a \in A$, entonces p es una proyección sobre A desde $B = \ker p$. Por consiguiente, $\ker p + A = X$.

DEFINICIÓN 9.1.2 *Sea X un espacio normado, si A y B son subespacios vectoriales de X que son complementos algebraicos en X, diremos que son* ***complementos topológicos*** *si la proyección p de X sobre A es continua.*

Observemos que entonces $\|p\| = \|p^2\| \leq \|p\|^2$ y, por tanto, $\|p\| \geq 1$ o $\|p\| = 0$.

En ocasiones, y por abreviar, emplearemos el término complemento en vez del de complemento topológico. Pensamos que no habrá confusión por ello.

TEOREMA 9.1.3 *Sean A y B complementos algebraicos de un espacio normado X y p la proyección sobre A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) A y B son complementos topológicos.

ii) $I - p$ es continua.

iii) Existe una constante $M > 0$ tal que si $a \in A$ y $b \in B$ se cumple $\text{máx}(\|a\|, \|b\|) \leq M\|a + b\|$.

iv) La aplicación $\varphi : A \times B \to X, \varphi(a, b) = a + b$, es un isomorfismo sobre X.

DEMOSTRACIÓN Es evidente que i) y ii) son equivalentes.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Consideremos las proyecciones $p : X \to A$ y $q : X \to B$ (donde $q = I - p$). Claramente, p y q son continuas. Sea $M = \text{máx}(\|p\|, \|q\|)$. Para $a \in A$ y $b \in B$, tenemos que $\|a\| = \|p(a + b)\| \leq \|p\|\|a + b\| \leq M\|a + b\|$ y $\|b\| = \|q(a + b)\| \leq M\|a + b\|$

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Claramente φ es una aplicación lineal y biyectiva. Consideremos en $A \times B$ la norma $\| \|_\infty$ y sea $y \in X$. Se puede escribir $y = a+b$, con $(a, b) \in A \times B$, y se verifica que $\varphi(a, b) = y$ y $\|(a, b)\|_\infty \leq M\|y\|$. Esto significa que φ es abierta. Por otra parte,

$$\|\varphi(a, b)\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq 2(\|(a, b)\|_\infty).$$

Por tanto, es claro que φ es isomorfismo.

iv) $\Rightarrow$ *i)* Tenemos que $\varphi^{-1} : X \to A \times B$ es lineal y continua. La aplicación $p_1 : A \times B \to A$, $p_1(a, b) = a$, es también lineal y continua y, como $p_1 \circ \varphi^{-1} = p$, se tiene que p es lineal y continua. ∎

NOTA 9.1.4 a) Observemos que, en la situación del teorema anterior, la proyección p es una aplicación abierta de X en $p(X)$.

b) Si A y B son complementos topológicos en X entonces $B = \ker p$ y $A = \ker(I - p)$, donde p es la proyección de X sobre A. Por tanto, A y B son cerrados.

c) *Si A y B son complementos algebraicos cerrados en un espacio de Banach X entonces son complementos topológicos.*

En efecto, consideremos la aplicación $\varphi : A \times B \to X$ definida por $\varphi(a, b) = a + b$. Es claro que φ es lineal y biyectiva. Además, si (a_n, b_n) es una sucesión de $A \times B$ tal que $\lim_{n\to\infty} (a_n, b_n) = (a, b)$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in A$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $b \in B$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} \varphi(a_n, b_n) = \varphi(a, b) = a + b$. Por tanto, φ es continua y como X y $A \times B$ son completos se tiene que φ es abierta. Por consiguiente, φ es un isomorfismo.

9.2 Subespacios complementados

DEFINICIÓN 9.2.1 *Sea X un espacio normado. Se dirá que un subespacio vectorial $A \subset X$ está complementado si A tiene complemento topológico.*

Observemos que, como consecuencia del lema de Zorn, se puede afirmar que cada subespacio vectorial tiene complemento algebraico. Veremos, no obstante, que no siempre tiene complemento topológico, ni siquiera cuando el subespacio vectorial es cerrado.

Obsérvese que si X es un espacio de Hilbert y A es subespacio vectorial cerrado de X entonces A y $A^{\perp}$ son complementos topológicos en X y la correspondiente proyección ortogonal P_A es la proyección de X sobre A desde $A^{\perp}$.

Supongamos que un subespacio vectorial $A \subset X$ está complementado, con proyección p. Sea Y otro espacio normado y sea $T : A \to Y$ una aplicación lineal y continua. La aplicación $Tp : X \to Y$ es también lineal y continua y, si $a \in A$, se tiene $Tp(a) = T(a)$. Por tanto, Tp es una extensión continua de T desde A a X. Esto prueba el siguiente resultado:

TEOREMA 9.2.2 *Sea X un espacio normado y sea A un subespacio complementado de X, con proyección p. Si Y es otro espacio normado y $T : A \to Y$ es una aplicación lineal y continua entonces T tiene extensión lineal y continua a todo el espacio. La aplicación $E : C\mathcal{L}(A, Y) \to C\mathcal{L}(X, Y)$ definida por $E(T) = Tp$ es lineal y $\|E(T)\| \leq \|Tp\| \leq \|T\| \, \|p\|$.*

TEOREMA 9.2.3 *Sea X un espacio de Banach y sea M un subespacio vectorial de X entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Para cada espacio de Banach Y y cada aplicación lineal y continua $T_0 : M \to Y$ existe una aplicación lineal y continua $T : X \to Y$ tal que $T = T_0$ en M;

ii) cl(M) está complementado en X.

DEMOSTRACIÓN En efecto, si i) es cierto podemos considerar la aplicación $T_0 : M \to \mathrm{cl}(M)$ definida en cada $x \in M$ por $T_0 x = x$. Entonces, existe una aplicación lineal y continua $T : X \to \mathrm{cl}(M)$ tal que $T = T_0$ en M. Es claro que T es una proyección de X sobre $\mathrm{cl}(M)M$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\mathrm{cl}(M)$ está complementado en X. Si Y es un espacio de Banach y $T_0 : M \to Y$ es una aplicación lineal y continua entonces tenemos que, por la densidad de M en $\mathrm{cl}(M)$, existe una aplicación lineal y continua $\overline{T}_0 : \mathrm{cl}(M) \to Y$ tal que $\overline{T}_0 = T_0$ en M. Por el apartado anterior, podemos afirmar que existe una aplicación lineal y continua $T : X \to Y$ tal que $T = \overline{T}_0$ en $\mathrm{cl}(M)$ y, por tanto, también se tiene $T = T_0$ en M. ∎

TEOREMA 9.2.4 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ un isomorfismo sobreyectivo. Si A y B son complementos topológicos en X entonces $T(A)$ y $T(B)$ son complementos topológicos en Y. Como consecuencia, si un subespacio A está complementado en X tenemos que $T(A)$ estará complementado en Y.*

DEMOSTRACIÓN Sea p la proyección de X sobre A y consideremos la aplicación $q : Y \to Y$ definida por $q = TpT^{-1}$. Si $y \in Y$ se tiene $y = T(a+b)$, con $a \in A, b \in B$ y $q(y) = Tp(a+b) = Ta$. Es claro que q es lineal, continua y sobreyectiva de Y sobre $T(A)$ y que si $a \in A$ se verifica que $q(Ta) = Ta$. Además, $q(y) = 0$ si y sólo si $Ta = 0$ (si y sólo si $a = 0$); es decir, $y = T(b) \in T(B)$. Así pues, $\ker q = T(B)$. ▪

Recordemos que se dice que Y es **factor de** X si existe algún espacio normado Z tal que $X \cong Y \times Z$.

TEOREMA 9.2.5 *Sean X, Y dos espacios normados. Se verifica que Y es factor de X si y sólo si Y es isomórfico a un subespacio complementado de X.*

DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow$| Sea $T : Y \times Z \to X$ un isomorfismo sobreyectivo. Tenemos que $Y \times \{0\}$ está complementado en $Y \times Z$ y su complemento es $\{0\} \times Z$. Así pues, $Y \times \{0\}$ es isomórfico a $T(Y \times \{0\})$, y este último espacio es un subespacio complementado de X.

$\Leftarrow$| Supongamos que A y B son complementos topológicos de X y que $A \cong Y$. Entonces $X \cong A \times B \cong Y \times B$. ▪

NOTA 9.2.6 Si A está complementado en X, con proyección p, e Y es un subespacio vectorial de X tal que $Y \supset A$ entonces tenemos que $p_Y : Y \to A$ es una proyección lineal y continua de Y sobre A. Así pues, A está complementado en Y, con proyección p_Y.

TEOREMA 9.2.7 *Sea X un espacio normado. Sean A y B complementos topológicos en X. Sea p la proyección sobre A desde B y sea $q = I - p$. Sean C y D complementos topológicos en A y sea h la proyección sobre C desde D. Entonces:*

i) C y $B + D$ son complementos topológicos en X y hp es la proyección sobre C desde $B + D$.

ii) $B + C$ y D son complementos topológicos en X y $q + hp$ es la proyección sobre $B + C$ desde D.

DEMOSTRACIÓN i) La aplicación $hp : X \to C$ es lineal y continua y sobreyectiva. Además, si $c \in C$ es claro que $h(p(c)) = c$, ya que $c \in A$ y será $p(c) = c$. Veremos que $\ker(hp) = B + D$. Si $x = b + d$, con $b \in B$ y $d \in D$, se verifica $h(p(x)) = h(d) = 0$. Si $x = a + b$, con $a \in A$ y $b \in B$ y se cumple $h(p(x)) = 0$ entonces se verifica $h(a) = 0$. Por tanto, $a \in D$ y será $x \in B + D$.

ii) Observemos que $I - h$ es la proyección sobre D desde C. Si intercambiamos en i) los papeles de C y D, deducimos que D y $B+C$ son complementos topológicos en X y que $(I-h)p$ es la proyección sobre D desde $B+C$. Por tanto, la proyección sobre $B + C$ desde D será $I - (I - h)p = I - p + hp = q + hp$. ▪

TEOREMA 9.2.8 *Sean X e Y dos espacios normados. Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua y abierta. Si $\ker T$ tiene complemento topológico B en X entonces T_B es un isomorfismo de B sobre Y.*

DEMOSTRACIÓN Sea $T' = T_B$. La aplicación $T' : B \to Y$ es lineal y continua. Además, si $T'(b) = 0$ será $b \in \ker T$; así pues, $b \in \ker T \cap B$ y será $b = 0$. Por tanto T' es inyectiva. Si demostramos que T' es abierta entonces tendremos que T' será biyectiva continua y abierta y por tanto será un isomorfismo.

Como T es abierta existe una constante M de modo que si $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $Tx = y$ y $\|x\| \leq M\|y\|$. Sea p la proyección de X sobre B desde $\ker T$; tenemos que $x - px \in \ker T$ y será $T(px) = Tx = y$. Por tanto, $px \in B$, $T'(px) = y$ y $\|px\| \leq \|p\|\|x\| \leq \|p\|M\|x\|$. ∎

COROLARIO 9.2.9 *Sea X un espacio normado y sea A un subespacio vectorial de X. Si B_1 y B_2 son complementos topológicos de A en X entonces $B_1 \cong B_2$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $p : X \to B_1$ la proyección sobre B_1 desde A. Tenemos que p es lineal, continua y abierta y B_2 es complemento topológico de $\ker T = A$. Por el teorema anterior, $p_{B_2} : B_2 \to B_1$ es un isomorfismo. ∎

NOTA 9.2.10 1.- Si A y B son complementos topológicos en X entonces la proyección $p : X \to B$, sobre B desde A, es lineal continua y abierta, con $\ker T = A$. Por tanto $\tilde{p} : X/A \to B$ es un isomorfismo. El corolario anterior podría haber sido demostrado con esta otra técnica, ya que entonces, como B_1 y B_2 son isomórficos a X/A, sería $B_1 \cong B_2$.

2.- Como c_0 es separable, sabemos que existe una aplicación $T : l_1 \to c_0$ lineal, continua y abierta (sobreyectiva). Sea $A = \ker T$, si A estuviese complementado en l_1 tendríamos que c_0 sería isomórfico a un subespacio de l_1 (el complemento de A). Sabemos, sin embargo, que esto no es posible, ya que en c_0 existen sucesiones débil convergentes que no son convergentes.

9.3 Subespacios complementados y dualidad

TEOREMA 9.3.1 *Sea X un espacio normado y sean A y B complementos topológicos en X. Sea $p : X \to X$ la proyección de X sobre A desde B. Se verifica que $p^* : X^* \to X^*$ es la proyección sobre B^0 desde A^0. Por tanto, si A está complementado en X entonces A^0 está complementado en X^*.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la aplicación dual $p^* : X^* \to X^*$, que es lineal y continua. Como la aplicación $p : X \to A$ es lineal continua y abierta sabemos que $\operatorname{Im} p^* = (\ker p)^0 = B^0$ y $\ker p^* = A^0$. Probaremos que si $x^* \in B^0$ entonces $p^*(x^*) = x^*$. En efecto, sea $x = a + b$, con $a \in A$ y $b \in B$. Tenemos que $p^*(x^*)(x) = x^*(p(x)) = x^*(a)$. Se verifica que $x^*(a) = x^*(a + b) = x^*(x)$, ya que $x^* \in B^0$. ∎

TEOREMA 9.3.2 *Sea X un espacio de Banach. Sean A y B subespacios cerrados de X. Si A^0 y B^0 son complementos topológicos de X^*, entonces A y B son complementos topológicos en X.*

DEMOSTRACIÓN Sea $x \in A \cap B$. Tenemos que $X^* = A^0 + B^0$ y, para $x^* \in X^*$, $x^*(x) = 0$. Por tanto, $x = 0$ y $A \cap B = \{0\}$. Si $x^* \in X^*$ y $x^*(A+B) = 0$ se tendría $x^* \in A^0 \cap B^0 = \{0\}$ y, por tanto, $x^* = 0$. Esto prueba que $A + B$ es denso en X.

Consideremos la proyección, $q : X^* \to X^*$, sobre B^0 desde A^0. Demostraremos que si $a \in A$ y $b \in B$ entonces $\|(a,b)\|_\infty = \max(\|a\|, \|b\|) \leq \|q\|\|a+b\|$. Esto significará que la aplicación $T : A \times B \to A + B$ definida por $T(a,b) = a + b$ es, además de lineal y continua, también abierta. Como $A \times B$ es completo se tiene que $A + B$ es completo y, por tanto, cerrado. Deduciríamos, por consiguiente, que $A + B = X$ y, como X es de Banach, tendríamos que A y B son complementos en X, al ser A y B cerrados.

Si $a \in A$ se cumple que $\|a\| = \sup\{f(x) : f \in B_{X^*}\}$. Si $f \in B_{X^*}$ podemos escribir $f = g + h$, con $g \in A^0$, $h \in B^0$ y $\|h\| = \|q(g+h)\| \leq \|q\|\|g+h\| \leq \|q\|$. Por consiguiente, $|f(a)| = |h(a)| = |h(a+b)| \leq \|q\|\|a+b\|$. De manera análoga, se prueba que $\|b\| \leq \|q\|\|a+b\|$. ∎

NOTA 9.3.3 Si X es un espacio de Banach y A^0 está topológicamente complementado en X^* no podemos concluir que A esté complementado en X. Para que ello se cumpla necesitamos una hipótesis más fuerte: el complemento de A^0 debe ser cierto polar B^0, donde A y B son subespacios cerrados.

TEOREMA 9.3.4 *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y sea A un subespacio vectorial de X. Si existe un conjunto S tal que A es isomórfico a un subespacio complementado (topológicamente) B de $B(S,\mathbb{K})$ entonces A está complementado en X.*

DEMOSTRACIÓN Sea $q : B(S,\mathbb{K}) \to B(S,\mathbb{K})$ la proyección sobre B y sea $T_0 : A \to B$ un isomorfismo. Existe una aplicación lineal y continua $T : X \to B(S,\mathbb{K})$ tal que $\|T\| = \|T_0\|$ y $T = T_0$ en A. Consideremos la aplicación $p = T_0^{-1} q T : X \to A$. Tenemos que p es lineal, continua y sobreyectiva. Si $a \in A$ se cumple que $T(a) = T_0(a) \in B$ y $p(a) = T_0^{-1}(q(Ta)) = T_0^{-1}(Ta) = T_0^{-1}(T_0 a) = a$. ∎

NOTA 9.3.5 a) Si $A \subset X$ es un subespacio vectorial isomórfico a $B(S,\mathbb{K})$ tendremos que existe una aplicación $T_0 : A \to B(S,\mathbb{K})$ que es isomorfismo. Sea $T : X \to B(S,\mathbb{K})$ una aplicación lineal y continua tal que $\|T\| = \|T_0\|$ y $T = T_0$ en A. Si consideramos $p = T_0^{-1} T : X \to A$, tenemos que p es una proyección continua de X sobre A. Por tanto, A está complementado en X ($B(S,\mathbb{K})$ está complementado en todo super-espacio).

b) En concreto, también podemos deducir que si $A, B \subset B(S,\mathbb{K})$ son dos subespacios vectoriales isomórficos entonces, si B está complementado también lo estará A.

9.4 Operadores de extensión

Sea S un espacio topológico normal y sea $T \subset S$ cerrado. Consideremos la aplicación $\varphi : BC(S) \to BC(T)$ definida por $\varphi(f) = f_T$. Tenemos que φ es lineal y

$\|\varphi(f)\| \leq \|f\|$. Así pues, φ es continua. Si $f \in BC(T)$, existe $\overline{f} \in BC(S)$ tal que $\varphi(\overline{f}) = f$. Por tanto, φ es sobreyectiva y $BC(T)$ es imagen continua de $BC(S)$.

DEFINICIÓN 9.4.1 *Diremos que $E : BC(T) \to BC(S)$ es un* ***operador de extensión****, si E es una aplicación lineal y continua tal que para cada $g \in BC(T)$ se verifica que $E(g)$ es extensión de g.*

En la situación de la definición anterior, si existe E, como $\|E(g)\| \geq \|g\|$, tenemos que E es un isomorfismo de $BC(T)$ en algún subespacio de $BC(S)$. Denotaremos $T^{\perp} = \{f \in BC(S) : f(T) = 0\}$.

Vamos a demostrar que si existe un operador de extensión $E : BC(T) \to BC(S)$ entonces $E(BC(T))$ y $T^{\perp}$ son complementos topológicos en $BC(S)$ y en particular tendríamos que $BC(T)$ es un factor de $BC(S)$.

En efecto, sea $E : BC(T) \to BC(S)$ el operador de extensión. Definimos $p : BC(S) \to BC(S)$ por $p(f) = E(f_T)$. Claramente, p es lineal y continua. Observemos que $E(f_T)$ restringido a T es f_T, por lo que $p(p(f)) = E(f_T) = p(f)$. Por tanto, p es una proyección y es claro que lo es sobre $E(BC(T))$, ya que si $f = E(g)$, con $g \in BC(T)$, entonces $f_T = g$ y $p(f) = E(f_T) = E(g)$.

Si $p(f) = E(f_T) = 0$ se tiene que $f(T) = 0$. Si $f \in BC(S)$ es tal que $f(T) = 0$, como E es lineal y $f_T = 0$, se tiene $E(f_T) = 0$. Así pues, $\ker p = \{f \in BC(S) : f(T) = \{0\}\} = T^{\perp}$.

Todavía nos podemos preguntar si los operadores extensión existen realmente. Borsuk, en 1933, demostró que estos operadores sí existen en el caso en que S sea métrico. Dos casos sencillos en los que estos operadores existen son:

i) *T es un retracto de S;* es decir, existe una aplicación continua $r : S \to T$ tal que r_T =identidad.

En este caso, definimos $E : BC(T) \to BC(S)$ como $E(g) = g \circ r$. Se tiene $\|E(g)\| = \sup\{|g(r(s))| : s \in S| = \sup\{|g(t)| : t \in T\} = \|g\|$. En esta situación $BC(T)$ es isométrico a $E(BC(T))$, que es un subespacio complementado de $BC(S)$.

ii) *Si $C \subset [0,1]$ es el conjunto de Cantor tenemos que cada función escalar y continua, definida sobre C, puede extenderse con continuidad a $I = [0,1]$, manteniendo la norma.*

En este caso vamos a ver que se puede definir un operador extensión de $C(C)$ en $C(I)$ que conserva la norma (que sea una isometría).

Vamos ahora a estudiar esta segunda extensión.

Sea $f : C \to \mathbb{K}$ una aplicación continua. Definiremos la aplicación $\overline{f} : I \to \mathbb{K}$ extendiendo f "por segmentos" de la siguiente forma:

Sabemos que existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos, disjuntos y contenidos en $[0,1]$, de modo que $C = I \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = (a_n, b_n)$. Tenemos que $\{a_n, b_n\} \subset C$ y definimos $\overline{f}(x)$, para $x \in (a_n, b_n)$, por $\overline{f}(x) = \lambda f(a_n)(1-\lambda) f(b_n)$, donde $\lambda \in (0,1)$ es tal que $x = \lambda a_n + (1-\lambda) b_n$. Para $x \in C$, definimos $\overline{f}(x) = f(x)$. Es claro que f es continua en cada (a_n, b_n). Sea $x_0 \in C$; demostraremos que $\overline{f}$ es continua en x_0 por la derecha.

Es evidente que $\overline{f}$ es continua en x_0 por la derecha si x_0 coincide con algún a_n. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x_0 \neq a_n$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en x_0, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in C \cap [x_0, x_0 + \delta]$ se cumple $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Es seguro que existe $x_1 \in C \cap (x_0, x_0 + \delta)$ y consideremos el intervalo $[x_0, x_1]$. Si $x \in [x_0, x_1]$ hay dos posibilidades:

a) $x \in C$. En este caso $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

b) Para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple $x \in (a_n, b_n)$. En este caso necesariamente se verifica que $(a_n, b_n) \subset [x_0, x_1]$ y existe $\lambda \in (0,1)$ de modo que $x = \lambda a_n + (1-\lambda)b_n$. Por consiguiente, $\overline{f}(x) = \lambda f(a_n) + (1-\lambda)f(b_n)$ y

$$\begin{aligned} |\overline{f}(x_0) - \overline{f}(x)| &= |\lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_0) - \lambda f(a_n) - (1-\lambda)f(b_n)| \\ &\leq \lambda|f(x_0) - f(a_n)| + (1-\lambda)|f(x_0) - f(b_n)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De manera similar se demuestra la continuidad de $\overline{f}$ en x_0 por la izquierda.

TEOREMA 9.4.2 *Sea X un espacio normado y sea $B \subset X$ un subespacio vectorial n-dimensional. Existe una proyección $p : X \to X$, sobre B, tal que $\|p\| \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que existe una base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de B y existe $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset B^*$ tales que $\|b_i\| = \|f_i\| = 1$ y $f_i(b_j) = \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $b \in B$, se cumple que $b = \sum_{i=1}^{n} f_i(b)b_i$. Para cada $i = \{1, \ldots, n\}$, denotamos también por f_i a una extensión, por el teorema de Hahn-Banach, de f_i a todo X. Tenemos que $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset S_{X^*}$ y definimos la aplicación $p : X \to B$ por $p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)b_i$. Se cumple que $\|p(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|\|x\|\|b_i\| \leq n\|x\|$ y es claro que, para $b \in B$, $p(b) = b$. ▪

COROLARIO 9.4.3 *Sea X un espacio normado. Sea $A \subset X$ un subespacio vectorial complementado en X y sea p una proyección de X sobre A. Si C es un subespacio vectorial n-dimensional de X entonces $A + C$ está complementado en X y existe una proyección h de X sobre $A + C$ tal que $\|h\| \leq \|p\| + n\|I - p\|$.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos la proyección p de X sobre A. Sea $B = \ker p$; B es el complemento de A en X. Sea $C' = (I - p)(C)$. Tenemos que $\dim C' \leq n$ y que $C' \subset B$. Demostraremos que $A + C = A + C'$.

Sean $a + c \in A + C$ ($a \in A$, $c \in C$); se cumple que $a + c = a + c - p(c) + p(c) = p(a + c) + c - p(c) \in A + C'$. Recíprocamente, sea $a + c - p(c) \in A + C'$ ($a \in A$, $c \in C$). Tenemos que $a + c - p(c) = p(a - c) + c \in A + C$. Como $C' \subset B$ y $\dim C' \leq n$, existe una proyección r de B sobre C' tal que $\|r\| \leq n$. Sabemos que entonces la aplicación $h = p + r(I - p)$ es la proyección de X sobre $A + C' = A + C$. Es claro que se verifica que $\|h\| \leq \|p\| + n\|I - p\|$. ▪

9.4.1 Codimensión

Sea X un espacio vectorial, se dice que un subespacio vectorial A de X tiene **codimensión** n si tiene complemento algebraico de dimensión n. Esto equivale a afirmar que $\dim X/A = n$ y por tanto la codimensión de un subespacio es única. La familia de los subespacios vectoriales maximales es exactamente la familia de los subespacios vectoriales de codimensión 1.

Supongamos que X es un espacio normado normado y que A tiene un complemento algebraico B de dimensión n. Si $p : X \to X$ es la proyección sobre B desde A y A es cerrado, entonces, como $\ker p = A$ e $\operatorname{Im} p = B$, tenemos que p es continua y serían A y B complementos topológicos. Por tanto, *los subespacios cerrados de codimensión finita están complementados.* Por otra parte, observemos que si $E \subset X$ es un subespacio vectorial tal que $E \cap A = \{0\}$ entonces p_E es una aplicación inyectiva de E en B. Así pues, $\dim E \leq n$.

Observemos que si A es un subespacio vectorial cerrado de codimensión n entonces existe un complemento topológico B tal que $\dim B = n$. Hemos demostrado que, entonces, existe una proyección $q : X \to X$ sobre B tal que $\|q\| \leq n$; no tenemos seguridad de que $\ker q = A$ puesto que, aparte de A, pueden existir muchos subespacios que sean complemento de B (aunque si sabemos que $\ker q \cong A$). El próximo teorema trata de esta cuestión.

TEOREMA 9.4.4 *Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un subespacio vectorial cerrado de codimensión n. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una proyección $p : X \to X$ con $\ker p = A$ y tal que $\|p\| \leq n(1+\varepsilon)$.*

DEMOSTRACIÓN Sea q $X \to X/A$ la aplicación canónica; se verifica que $\|q\| = 1$. Tenemos que existe una base $\{\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\}$ de X/A, con $\overline{b_i} = b_i + A$, y existe $\{\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}\} \subset (X/A)^*$ tales que $\|\overline{b_i}\| = \|\overline{f_i}\| = 1$ y $\overline{f_i}(\overline{b_j}) = \delta_{ij}$, para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $f_i = \overline{f_i} \circ q$; se verifica que $f_i \in X^*$ y $\|f_i\| \leq \|\overline{f_i}\|\|q\| \leq 1$. Como para cada $\delta > 0$ tenemos que existe $d_i \in b_i + A$ con $1 \leq \|d_i\| < 1 + \delta$, se tiene que

$$\|f_i\| \geq \left| f_i\left(\frac{d_i}{\|d_i\|}\right)\right| = \frac{1}{\|d_i\|}|\overline{f_i}(\overline{b_i})| = \frac{1}{\|d_i\|} \geq \frac{1}{1+\delta},$$

por lo que $\|f_i\| = 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $c_i \in b_i + A$ tal que $\|c_i\| < 1+\varepsilon$. Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $\overline{b_j} = q(c_j)$ y $f_i(c_j) = \overline{f_i}(q(c_j)) = \overline{f_i}(\overline{b_j}) = \delta_{ij}$. Definimos $p : X \to X$ por $p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) c_i$. Es fácil ver que $p(x) = x$, para $x \in \mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$. Por tanto, p es una proyección de X sobre $\mathcal{L}(c_1, \ldots, c_n)$ y, para cada $x \in X$, se cumple que $\|p(x)\| \leq n(1+\varepsilon)\|x\|$; así pues, $\|p\| \leq n(1+\varepsilon)$. Para finalizar, demostraremos que $\ker p = A$.

Si $a \in A$ tenemos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple $f_i(a) = \overline{f_i}(q(a)) = \overline{f_i}(0) = 0$. Por tanto, $p(a) = 0$.

Recíprocamente, observemos que para cada $x \in X$ se tiene $qx = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_i}(qx)\overline{b_i}$. Así pues, si $x \notin A$ entonces $qx \in X/A$ y $qx \neq 0$. Por consiguiente, para algún

$i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica $\overline{f_i}(qx) = f_i(x) \neq 0$ y $px \neq 0$; es decir, $x \notin \ker p$. Ha quedado demostrado que $\ker p = A$. ∎

NOTA 9.4.5 Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un subespacio vectorial cerrado maximal; esto significa que existe una forma lineal $f : X \to \mathbb{K}$ con $\|f\| = 1$ y $\ker f = A$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\frac{1}{1+\varepsilon} < 1$, es seguro que existe $x \in S_X$ tal que $|f(x)| > \frac{1}{1+\varepsilon}$. Si $b = \frac{1}{f(x)} x$ tenemos que $f(b) = 1$ y $\|b\| = \frac{1}{|f(x)|} < 1 + \varepsilon$. Definimos $p : X \to X$ por $px = f(x)b$; tenemos que $p(x) = x$, para $x \in \mathcal{L}(b)$. Por consiguiente, p es una proyección de X sobre $\mathcal{L}(b)$ con $\ker p = \ker f = A$ y $\|px\| \leq \|f\|\|x\|\|b\| = (1+\varepsilon)\|x\|$. Por tanto, $\|p\| \leq 1 + \varepsilon$ y no tenemos garantías de obtener una proyección p con $\ker p = A$ y $\|p\| = 1$. Observemos que $q = I - p$ es una proyección sobre A con $\|q\| \leq 2 + \varepsilon$.

Si ahora fuese $B \subset X$ un subespacio vectorial cerrado de codimensión 2 tendríamos que existe un conjunto libre $\{a, b\} \subset X$ tal que $X = B + \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b)$. Entonces, $A = B + \mathcal{L}(a)$ es un subespacio cerrado de X de codimensión 1 y, por tanto, existe $p : X \to A$, proyección de X sobre A, con $\|p\| \leq 2 + \varepsilon$. También existe una proyección $q : A \to B$ de A sobre B con $\|q\| \leq (2 + \varepsilon)$. Entonces, qp es una proyección de X sobre B con $\|qp\| \leq (2+\varepsilon)^2$. Reiterando, deduciríamos que si $B \subset X$ es subespacio vectorial cerrado de codimensión n entonces existe una proyección p de X sobre X con $\|p\| \leq (2+\varepsilon)^n$. Observemos que este resultado se podía haber deducido del teorema anterior donde la cota era mejor.

Finalmente, si A es un subespacio vectorial maximal de X tal que $\ker f = A$, $f \in S_{X^*}$ y f alcanza su norma entonces existe $b \in S_{X^*}$ tal que $f(b) = 1$ y la proyección p de X sobre $\mathcal{L}(b)$ dada por $p(x) = f(x)b$ será tal que $\|p\| = 1$.

9.5 Subespacios complementados y espacios de sucesiones

TEOREMA 9.5.1 *Sea X un espacio de Banach para el que existe una aplicación T lineal, continua y sobreyectiva de X en l_1. Entonces*

a) Existe un subespacio vectorial $A \subset X$ tal que T_A es un isomorfismo de A sobre l_1; es decir, X tiene copia de l_1.

b) A y $\ker T$ son complementos topológicos en X.

DEMOSTRACIÓN a) Claramente T es una aplicación abierta. Sea M la constante abierta de T. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $a_n \in X$ tal que $Ta_n = e_n$ y $\|a_n\| \leq M\|e_n\| = M$.

Sea $A = \overline{\mathcal{L}(a_n : n \in \mathbb{N})}$. Definimos $S : l_1 \to A$ por $Sx = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)a_i$. Por ser X un espacio de Banach, S está bien definida y es claro que es lineal. Además, $\|Sx\| \leq M\|x\|$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $ST(a_n) = S(e_n) = a_n$, por lo que ST es la identidad en $\mathcal{L}(a_n : n \in \mathbb{N})$. Como ST es continua, deducimos que $ST = I$ en A. Por tanto, si $T' = T_A$ tenemos que $ST' = I$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $T'S(e_n) = T'a_n = e_n$ y, por tanto, $T'S = I$. Esto prueba que T' es biyectiva y continua; su inversa es S, que también es continua.

b) Observemos que, para $p = ST$, se cumple $\operatorname{Im} p \subset A$. Si $a \in A$ se verifica $p(a) = a$; por tanto, p es una proyección de X sobre A y es claro que $\ker T \subset \ker p$. Por otra parte, si $x \notin \ker T$ se cumple que $Tx \neq 0$. Por tanto, $TS(Tx) = Tx \neq 0$ y $Tpx \neq 0$. Por consiguiente $x \notin \ker p$; esto prueba que $\ker p = \ker T$. ▪

NOTA 9.5.2 a) Sea $T : l_\infty \to l_\infty$ una aplicación lineal y continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la aplicación $h_n : l_\infty \to \mathbb{R}$ definida por $h_n(a) = a(n)$. Tenemos que $\ker T = \cap \ker(h_n T)$.

Si $A \subset l_\infty$ es un subespacio complementado existirá una proyección $p : l_\infty \to l_\infty$ con $\ker p = A$, esto significa que existirá un conjunto numerable y acotado $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (l_\infty)^*$, tal que $A = \cap \ker f_n$.

Demostraremos que c_0 no puede ser expresado de esta forma y por tanto que c_0 no está complementado en l_∞, necesitamos del siguiente sencillo resultado.

b) Es posible escoger para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ un subconjunto infinito M_α de $\mathbb{N}$ de modo que $M_\alpha \cap M_\beta$ es finito si $\alpha \neq \beta$.

En efecto, expresemos los números racionales por medio de una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, existe una sucesión de racionales distintos que convergen a α. Denotamos por B_α a los racionales de la sucesión y por $M_\alpha = \{n \in \mathbb{N} : q_n \in B_\alpha\}$. Es claro que, si $\alpha \neq \beta$, $B_\alpha \cap B_\beta$ es finito, y por tanto $M_\alpha \cap M_\beta$ también será finito.

La primera demostración del siguiente teorema se debe a R.S. Phillips ("On linear transformations". *Trans. Amer. Math. Soc.* 48 (1940) 516-541). La demostración que exponemos es más sencilla y es original de R.J. Whitley ("Projecting m onto c_0". *Amer. Math. Monthly* 73 (1966). 285-286).

TEOREMA 9.5.3 ***Teorema de Phillips***

c_0 no está topológicamente complementado en l_∞.

DEMOSTRACIÓN Sean $\{M_\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ los conjuntos definidos en la nota b). Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, sea x_α la función característica, de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, correspondiente a M_α. Como en la sucesión x_α existen infinitos unos tenemos que $x_\alpha \notin c_0$. Vamos a demostrar que si $f \in (l_\infty)^*$ es tal que $f(c_0) = 0$ entonces $H(f) = \{\alpha : f(x_\alpha) \neq 0\}$ es numerable. Como consecuencia se tendría que para cada, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (l_\infty)^*$, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_\alpha \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(f_n)$, se tendría $x_\alpha \in \cap \ker(f_n)$ y, por tanto, no es posible que $c_0 = \cap \ker f_n$.

Sea pues $f \in (l_\infty)^*$ con $f(c_0) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{\alpha \in \mathbb{R} : |f(x_\alpha)| \geq \dfrac{1}{n}\}$. Tenemos que $H(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Supongamos que $n \in \mathbb{N}$ y que $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ son elementos distintos de A_n. Sea $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{|f(x_{\alpha_i})|}{f(x_{\alpha_i})} x_{\alpha_i}$; entonces, $f(x) \geq \dfrac{k}{n}$. Definimos $y \in l_\infty$ de la siguiente forma. Si j es un elemento que pertenece exactamente a uno de los conjuntos $M_{\alpha_1}, \cdots, M_{\alpha_k}$, por ejemplo M_{α_i}, ponemos $y(j) = \dfrac{|f(x_{\alpha_i})|}{f(x_{\alpha_i})}$ y si j está en otra situación ponemos $y(j) = 0$. Observemos que

$$x = \frac{f(x_{\alpha_1})}{|f(x_{\alpha_1})|} x_{\alpha_1} + \cdots + \frac{f(x_{\alpha_k})}{|f(x_{\alpha_k})|} x_{\alpha_k}$$

y si $y(j) \neq 0$ entonces j pertenece exactamente a un M_{α_i}. Esto significa que $x(j) = \frac{f(x_{\alpha_i})}{|f(x_{\alpha_i})|} x_{\alpha_i(j)} = y(j)$. Por tanto, $y(j) \neq x(j)$ significará que $y(j) = 0$ y $x(j) \neq 0$; esto sólo ocurre cuando j está en más de uno de los conjuntos $M_{\alpha_1} \ldots M_{\alpha_k}$. Esta situación sólo puede darse para un número finito de j. Por tanto, $y - x \in c_0$ y será $f(y) = f(x)$. Como $\|y\| \leq 1$, tenemos que $f(x) = f(y) \leq \|f\|$ y será $k \leq n\|f\|$. Por consiguiente, a lo sumo en A_n hay $n\|f\|$ elementos distintos. Esto significa que A_n es finito y que $H(f)$ es numerable. ∎

NOTA 9.5.4 a) Si un subespacio E de un espacio tipo $B(S)$ está complementado entonces ya se demostró que también lo sería cualquier otro subespacio isomórfico. Por tanto, es claro que l_∞ no puede tener subespacio complementado isomórfico a c_0.

b) Se demostró que en $C(I)$ existían subespacios vectoriales E, F tales que $C(I) \cong E \times F$ y $F \cong c_0$. Por consiguiente, $C(I)$ tiene un subespacio complementado isomórfico a c_0. Esto prueba que $C(I)$ no puede ser isomórfico a l_∞.

LEMA 9.5.5 *Sea E un subespacio vectorial cerrado de X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tal que $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker f_n$.

ii) Existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (X/E)^*$ que separa puntos de X/E.

DEMOSTRACIÓN En efecto: i)$\Rightarrow$ ii). Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $E \subset \ker f_n$, podemos definir $\overline{f_n} : X/E \to \mathbb{K}$ por $\overline{f_n}(\overline{x}) = f_n(x)$. Claramente $\overline{f_n}$ es lineal y está bien definida, ya que si $\overline{x} = \overline{y}$ es $x - y \in E$ y será $f(x) = f(y)$. Para cada $y \in E$ tenemos que $|\overline{f_n}(\overline{x})| = |f_n(x+y)| \leq \|f_n\|\|x+y\|$, por lo que $\|\overline{f_n}\| \leq \|f_n\|\|\overline{x}\|$ y $\overline{f_n}$ es continua. Si $\overline{x} \neq \overline{y}$ será $x - y \notin E$ y existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(x-y) \neq 0$. Por tanto $f_m(\overline{x}) \neq f_m(\overline{y})$.

ii)$\Rightarrow$ i). Supongamos que existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(X/E)^*$ que separa los puntos de X/E. Sea $p : X \to X/E$ la aplicación canónica y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n = g_n p$. Si $x \in E$ se cumple $f_n(x) = g_n(p(x)) = g_n(\overline{o}) = 0$. Así pues, $E \subset \cap \ker f_n$. Si $x \notin E$ entonces $p(x) \neq 0$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g_m(px) \neq 0$, con lo que $f_m(x) \neq 0$ y $x \notin \cap \ker f_n$. Esto prueba que $E = \cap \ker f_n$. ∎

Una consecuencia del lema anterior es la siguiente: como no existe una sucesión $(f_n) \subset (l_\infty)^*$ tal que $c_0 = \cap \ker f_n$, podemos afirmar que tampoco existe $(g_n) \subset (l_\infty/c_0)^*$ que separe puntos de l_∞/c_0.

Observemos que ya se demostró que si un subespacio E de l_∞ es isomórfico a l_∞ entonces E está complementado en l_∞. Lindenstrauss demostró el recíproco

(J. Lindenstrauss, "On complemented subespaces of l_∞". *Israel J. Math* 5 (1.967), 153-156).

Finalmente es conveniente que sepamos que *un espacio de Banach es isomórfico a un espacio de Hilbert si y sólo si cada subespacio cerrado está complementado.* Por tanto, cualquier espacio de Banach no isomórfico a un espacio de Hilbert posee algún subespacio cerrado que no es complementado. (J. Linderstrauss and L. Tzafriri "On the complemented subspaces problem" *Israel J. Math.* 9 (1.971) 163-169).

En su momento, se demostró el primer resultado que sigue y, como consecuencia, se obtuvo el segundo:

i) Sea X un espacio normado. Sean $E \subset X$ un subespacio vectorial y S un conjunto infinito. Entonces si $T_0 : E \to B(S.\mathbb{K})$ es lineal y continua existe una extensión $T : X \to B(S, \mathbb{K})$ lineal y continua tal que $T = T_0$ en E (y $\|T\| = \|T_0\|$).

ii) Sea X normado y $E \subset X$ subespacio isomórfico a cierto $B(S, \mathbb{K})$, entonces E está topológicamente complementado en X.

Pretendemos ahora demostrar unos resultados similares para el caso en que X sea separable y $B(S, \mathbb{K})$ sea sustituido por c_0.

Supongamos que se verifica i) es decir: sea X espacio normado separable y sea $E \subset X$ subespacio vectorial de X entonces si $T_0 : E \to c_0$ es lineal y continua se verifica que existe una extensión $T : X \to c_0$ lineal y continua tal que $T = T_0$ en E.

En esta situación sería posible probar ii). Es decir, *sea X un espacio normado separable y sea E un subespacio vectorial de X isomórfico a c_0 entonces E está complementado topológicamente en X.* En efecto, sea $T_0 : E \to c_0$ un isomorfismo y sea $T : X \to c_0$ la correspondiente extensión continua. Consideremos la aplicación $p = T_0^{-1}T : X \to E$. Si $x \in E$ tenemos que $p(x) = T_0^{-1}(Tx) = T_0^{-1}(T_0x) = x$; Por tanto, p es una proyección continua de X en E.

Vamos pues a probar lo anunciado a través del siguiente lema.

LEMA 9.5.6 *Sea X un espacio normado. Sea E un subespacio vectorial de X y sea $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$. Supongamos que existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E^* tal que $\|f_n\| \leq 1$, para $n \in \mathbb{N}$, con $*$-$w \lim f_n = 0$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, existe una extensión $g_n \in X^*$ de f_n tal que $\|g_n\| \leq 2$ y $|g_n(x_i)| \leq \varepsilon$, para $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

DEMOSTRACIÓN Procederemos por reducción al absurdo. En caso contrario, existe $\varepsilon > 0$ tal que cierta subsucesión $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica que cada extensión g_{n_j} de f_{n_j} con $\|g_{n_j}\| \leq 2$ es $|g_{n_j}(x_i)| > \varepsilon$, para $j \in \mathbb{N}$ y para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$. Denotamos por $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a esta subsucesión. También tendremos que $*$-$w \lim h_n = 0$ en E^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación $\overline{h}_n : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $\overline{h}_n = h_n$ en E y $\|\overline{h}_n\| = \|h_n\| \leq 1$. Por tanto, para cada $x \in E$, se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{h}_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = 0$.

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ se verifica $|\overline{h}_n(x_i)| \leq \|x_i\| \leq H = \text{máx}(\|x_1\|, \ldots, \|x_k\|)$. Por consiguiente, $(\overline{h}_n(x_1), \ldots, \overline{h}_n(x_k))$ es una sucesión acotada en $\mathbb{K}^k$ y, por tanto, existe cierta subsucesión $(\overline{h}_{n_j})$ de $(\overline{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (que denotamos por $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$) de modo que existe $\lim_{j\to\infty} u_j(x_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Deducimos que para cada $x \in F = E + \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_k)$ se verifica que existe $\lim_{j\to\infty} u_j(x)$. Este límite será denotado por $u_0(x)$. Tenemos que $u_0 : F \to K$ es lineal y continua, con $\|u_0\| \leq 1$ y $u_0(E) = 0$ [si $x \in B_F$ se verifica $|u_j(x)| \leq \|u_j\| \leq 1$, para cada $j \in \mathbb{N}$]. Utilizando el teorema de Hahn-Banach, sea $\overline{u_0} : X \to \mathbb{K}$ una extensión de u_0. Como, para $i \in \{1, \ldots, k\}$, se verifica $\lim_{j\to\infty} u_j(x_i) = u_0(x_i)$, tenemos que existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|u_j(x_i) - u_0(x_i)| < \varepsilon$, para $j \in \mathbb{N}$ y $j \geq j_0$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideramos $v_j = u_j - u_0$; se tiene que $\|v_j\| \leq 2$ y v_j es una extensión de h_{n_j} tal que $|v_j(x_i)| < \varepsilon$ si $i \in \{1, \ldots, k\}$ y $j \geq j_0$. Esto contradice la hipótesis de partida. ∎

TEOREMA 9.5.7 *Sea X un espacio normado separable y sea E un subespacio vectorial de X, se verifica:*

i) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de E^* tal que $*$-$w\lim(f_n) = 0$ en E^* y $\|f_n\| \leq 1$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una extensión g_n de f_n a X tal que $\|g_n\| \leq 2$ y $*$-$w\lim g_n = 0$ en X^*, para $n \in \mathbb{N}$.

ii) Si $T_0 : E \to c_0$ es una aplicación lineal y continua entonces existe $T : X \to c_0$ lineal y continua tal que $T = T_0$ en E y $\|T\| \leq 2\|T_0\|$.

DEMOSTRACIÓN i) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto numerable y denso en $X \setminus E$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ aplicamos el lema anterior a $x_1, \ldots, x_k$ con $\varepsilon = \frac{1}{k}$ y existirá N_k, que escogemos tal que $N_k > N_{k-1}$, de modo que si $n \geq N_k$ se tenga que f_n admite una extensión g_n a X tal que $\|g_n\| \leq 2$ y $|g_n(x_i)| < \frac{1}{k}$, para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por tanto, para $n \in [N_k, N_{k+1})$, podemos escoger una extensión g_n de f_n, a todo X, tal que $\|g_n\| \leq 2$ y $|g_n(x_i)| < \frac{1}{k}$, si $i \in \{1, \ldots, k\}$. Para $n \in [1, N_1)$, escogemos una extensión cualquiera g_n de f_n a X con $\|g_n\| \leq 2$. Es claro que, para $i \in \mathbb{N}$, se cumple $\lim_{n\to\infty} g_n(x_i) = 0$. Por tanto, para cada $x \in X \setminus E$ se verifica $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$. Como para $x \in E$ se tiene que $\lim g_n(x) = \lim f_n(x) = 0$, resulta que $*$-$w\lim g_n = 0$ en X^*.

ii) En primer lugar observaremos que existe una relación entre las aplicaciones lineales y continuas de X en c_0 y las sucesiones acotadas (f_n) de X^* que son $*$-débil convergentes a cero.

En efecto, sea $T : X \to c_0$ lineal y continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\delta_n : c_0 \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $\delta_n(x) = x(n)$ y sea $f_n = \delta_n T$. Tenemos que $f_n : X \to \mathbb{K}$ es lineal y continua y, como $\|\delta_n\| = 1$, se verifica $\|f_n\| \leq \|T\|$. Además, si $x \in X$ se tiene $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, por lo que $*$-$w\lim f_n = 0$ en X^*. Observemos que

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \leq \|T\|$. Si $\varepsilon > 0$ entonces existe un $x \in S_X$ tal que

$$\|T\| - \varepsilon < \|T(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$$

y existirá un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| - \frac{\varepsilon}{2} < |f_m(x)| \leq \|f_m\|.$$

Esto prueba que $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$.

Recíprocamente, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X^* tal que $*\text{-}w\lim f_n = 0$ en X^*. La aplicación $T : X \to c_0$ definida por $T(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es lineal y verifica $\|T(x)\| = \sup |f_n(x)| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|)\|x\|$. Por tanto, T es continua, con $\|T\| \leq \sup \|f_n\|$. Repitiendo el razonamiento anterior, podemos concluir que $\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$.

Pasamos ahora a nuestra demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la aplicación $f_n : E \to \mathbb{K}$ definida por $f_n(x) = \delta_n(T_0(x))$. Entonces $\|f_n\| \leq \|T_0\|$, para $n \in \mathbb{N}$, y existe una extensión lineal $g_n \in X^*$ de f_n a X, tal que $\|g_n\| \leq 2\|T_0\|$ y $*\text{-}w \lim g_n = 0$ en X^*. Definimos la aplicación $T : X \to c_0$ por $T(x) = (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente T es lineal y continua y $\|T\| = \sup \|g_n\| \leq 2\|T_0\|$. Además, si $x \in E$ se tiene $T(x) = (g_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = T_0(x)$. ■

NOTA 9.5.8 Sea X un espacio normado. Consideremos las inyecciones canónicas $j_1 : X \to X^{**}$ y $j_2 : X^* \to X^{***}$. Demostraremos que $j_2(X^*)$ está complementado en X^{***}.

Definimos la aplicación $p : X^{***} \to X^{***}$ de la siguiente forma: si $\varphi \in X^{***}$ tenemos que φ es una aplicación lineal y continua de X^{**} en $\mathbb{K}$. La aplicación $\varphi(j_1)$, de X en $\mathbb{K}$, es también lineal y continua. Por tanto, $\varphi j_1 \in X^*$. Denotemos $p(\varphi) = j_2(\varphi j_1)$. Es claro que p es lineal y continua. Para concluir bastará probar que p restringido a $j_1(X^*)$ es la identidad en $j_1(X^*)$. En efecto, sea $x^* \in X^*$ y sea $\varphi = j_2(x^*)$. Tenemos que $p(\varphi) = j_2(j_2(x^*)j_1)$. Observemos que si $x \in X$ se cumple $j_2(x^*)j_1(x) = j_1(x)(x^*) = x^*(x)$. Por tanto, $p(\varphi) = j_2(x^*) = \varphi$.

Demostraremos ahora que c_0 *no puede ser isomórfico a un dual.* En efecto, supongamos que X es un espacio normado tal que existe un isomorfismo T de X^* sobre c_0. Consideremos las aplicaciones canónicas $j_1 : X^* \to X^{***}$ y $j_2 : c_0 \to c_0^{**}$. Tenemos que la aplicación bidual $T^{**} : X^{***} \to c_0^{**} \cong l_\infty$ es un isomorfismo y que $T^{**}(j_1(X^*)) = j_2(TX^*) = j_2(c_0)$. Como $j_1(X^*)$ está complementado en X^{***}, deducimos que $j_2(c_0)$ está complementado en c_0^{**} y que, por tanto, c_0 es isomórfico a un subespacio complementado de l_∞, lo que no es posible.

Tema 10

Introducción a los espacios vectoriales topológicos

10.1 Espacios vectoriales topológicos

Algunas cuestiones de las que estudiaremos en este tema ya fueron tratadas en temas anteriores, pero el propósito es que este tema sea lo más autocontenido posible, ya que bien podía ser el primer tema de los apuntes.

DEFINICIÓN 10.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea T una topología en X diremos que T es una* ***topología vectorial*** *en X o bien que (X,T) es un* ***espacio vectorial topológico*** *si son continuas las aplicaciones:*

$$\begin{array}{lll} + : & X \times X \to X & (x,y) \to x+y \\ \cdot : & \mathbb{K} \times X \to X & (\alpha, x) \to \alpha \cdot x, \end{array}$$

donde en $\mathbb{K}$ se considera la topología usual y en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$ las correspondientes topologías producto.

Si X es un espacio normado entonces $(X, T_{\| \|})$, (X, T_w), (X^*, T_{*-w}) son ejemplos de espacios vectoriales topológicos. Además, si X es de dimensión infinita y, por ejemplo, consideramos (X, T_w), no es posible que exista una norma $\| \|'$ en X de modo que $T_w = T_{\| \|'}$, ya que (X, T_w) no satisface el primer axioma de numerabilidad (IAN). Todo esto justifica el que hagamos un breve estudio de los espacios vectoriales topológicos.

Sea X un espacio vectorial topológico. Se dice que una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en X es una **red de Cauchy** si para cada entorno V de 0 existe $\alpha_0 \in I$ tal que si $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ se verifica que $x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in V$.

Si toda red de Cauchy en X es convergente, hacia un elemento de X, se dirá que X es **completo**. Si cada sucesión de Cauchy en X es convergente diremos que X es **secuencialmente completo**.

Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Se dirá que una aplicación $T : X \to Y$ es **isomorfismo** (topológico) si T es lineal, biyectiva y continua de modo que T^{-1} es también continua. Se dice que T es **uniformemente continua** en X si para cada entorno W de 0 en Y se verifica que existe un entorno V de 0 en X tal que si $x, y \in X$ y $x - y \in V$ entonces $f(x) - f(y) \in W$.

TEOREMA 10.1.2 *Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) T es continua en X;

ii) T es continua en 0;

iii) T es uniformemente continua en X.

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que T es continua en 0. Sea $x \in X$ y sea $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ red en X tal que $x \in \lim x_\alpha$. Entonces $0 \in \lim(x_\alpha - x)$ y $0 = T(0) \in \lim T(x_\alpha - x)$, por lo que $T(x) \in \lim T(x_\alpha)$. Por otra parte, si W es entorno de cero en Y, se tiene que $V = T^{-1}(W)$ es entorno de cero en X y si $x, y \in X$ y $x - y \in V$ se verifica $f(x) - f(y) \in W$. ■

TEOREMA 10.1.3 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal. Entonces, f es continua si y sólo si* $\ker f$ *es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN Si f es continua se tiene que $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ cerrado. Supongamos ahora que $\ker f$ es cerrado pero f no es continua en $x = 0$. Existen una red $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ en X y $\delta > 0$ tales que $0 \in \lim x_\alpha$ y $|f(x_\alpha)| > \delta$, para cada $\alpha \in I$. Sea $e \in X$ tal que $f(e) = 1$. Para $\alpha \in I$, sea $z_\alpha = e - \frac{1}{f(x_\alpha)} x_\alpha$. Tenemos que $(z_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \ker f$ y $e \in \lim(z_\alpha)$; sin embargo $e \notin \ker f$. ■

10.1.1 Bases de entornos para una topología vectorial

DEFINICIÓN 10.1.4 *Sea X un espacio vectorial.*

1. *Se dirá que $A \subset X$ es* ***convexo*** *si para cada $a, b \in A$ y $\lambda \in [0, 1]$ se verifica $\lambda a + (1 - \lambda) b \in A$.*

2. *Se dirá que A es* ***equilibrado*** *si para cada $a \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ se verifica $\lambda a \in A$.*

3. *Se dirá que A es* ***absorbente*** *si para cada $x \in X$ con $x \neq 0$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $\alpha x \in A$, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq \varepsilon_x$.*

Sea $\mathcal{B}$ una familia no vacía de partes de X tal que:

1. Si $B \in \mathcal{B}$ es B absorbente y equilibrado.

2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (es decir $\mathcal{B}$ es base de filtro).

3. Si $B \in \mathcal{B}$ existe $C \in B$ tal que $C + C \subset B$.

• A partir de $\mathcal{B}$ definimos el conjunto T de los subconjuntos $A \subset X$ tales que si $x \in A$ entonces existe $B \in \mathcal{B}$ con $x + B \subset A$. Vamos a ver que T es una topología en X.

- Es evidente que $X \in T$.
- Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de T y $x \in \cup_{i \in I} A_i$ existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$ y por tanto existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A_j$, con lo que $x + B \subset \cup_{i \in I} A_i$. Por tanto $\cup_{i \in I} A_i \in T$.
- Sean $A_1, A_2 \in T$ y $x \in A_1 \cap A_2$. Sabemos que existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $x + B_1 \subset A_1, x + B_2 \subset A_2$. Sea $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ entonces $x + B_3 \subset A_1 \cap A_2$ y deducimos que $A_1 \cap A_2 \in T$.

A la topología T la denotaremos por $T(\mathcal{B})$.
• Demostraremos ahora que *si A es un subconjunto de X entonces $x \in Int(A)$ si y sólo si existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A$.*

En efecto, si $x \in Int(A)$, como $Int(A)$ es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset Int(A) \subset A$. Recíprocamente, supongamos que $x \in X$ y que existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A$. Sea M el conjunto de los $z \in X$ tales que existe $C \in \mathcal{B}$ con $z + C \subset A$. Claramente $M \neq \emptyset$, ya que $x \in M$. Si $z \in M$ entonces existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $z + C \subset A$ y, como $0 \in C$, se tiene que $z \in A$. Por tanto, $M \subset A$. Si $z \in Int(A)$, como $Int(A)$ es abierto, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $z + C \subset Int(A) \subset A$. Por consiguiente, $z \in M$ y será $Int(A) \subset M \subset A$. Si demostramos que M es abierto tendremos que $x \in M = Int(A)$ y habremos finalizado.

Sea $z \in M$; existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $z + C \subset A$. Sea $D \in \mathcal{B}$ tal que $D + D \subset C$. Si $t \in z + D$ se cumple $t + D \subset z + D + D \subset z + C \subset A$ y, por tanto, $z \in M$. Esto significa que $z + D \subset M$ y deducimos que M abierto.
• Probaremos ahora que *si $A \in T(\mathcal{B})$ y $x \in X$ entonces $x + A \in T(\mathcal{B})$.*

En efecto, sea $z \in x + A$. Se tiene que $z - x \in A$ y existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $z - x + B \subset A$. Por tanto, $z + B \subset x + A$. Observemos que si M es cerrado y $x \in X$ entonces $x + (X \setminus M) = X \setminus (x + M)$ y, como $x + (X \setminus M)$ es abierto, deducimos que $x + M$ es cerrado.
• Dado $x \in X$ probaremos que *$\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos de x.* En efecto, si $B \in \mathcal{B}$, como $0 + B = B \subset \mathcal{B}$, se tiene que $0 \in Int(B)$ y por tanto $x + Int(B)$ es un abierto que contiene a x. Por consiguiente, como $x + B \supset x + Int(B)$, se tiene que $x + B$ es entorno de x. Por otra parte, si A es entorno de x se verifica que $x \in Int(A)$ y, por tanto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A$. Con esto queda probado que $\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos de x. En particular, $\mathcal{B}$ es una base de entornos de 0.
• Demostraremos ahora que *si $B \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $\lambda \neq 0$ entonces λB es entorno de 0.* En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$; probaremos que existe $D_n \in \mathcal{B}$ tal que $2^n D_n \subset B$. Sea $D_1 \in \mathcal{B}$ tal que $2D_1 \subset D_1 + D_1 \subset B$. Supuesto que hayamos obtenido $D_1, \cdots, D_k$ tales que $2^i D_i \subset B$ para $i \in \{1, \ldots, k\}$, sea $D_{k+1} \in \mathcal{B}$ tal que $2D_{k+1} \subset D_{k+1} + D_{k+1} \subset D_k$. Se verifica que $2^{k+1} D_{k+1} = 2^k 2D_{k+1} \subset 2^k D_k \subset B$. Sea $n \in \mathbb{N}$

tal que $\frac{1}{2^n|\lambda|} < 1$. Como D_n es equilibrado se cumple que $\frac{1}{2^n\lambda}D_n \subset D_n \subset \frac{1}{2^n}B$. Por tanto, $D_n \subset \lambda B$. Desde aquí es fácil probar que si A es abierto y $\lambda \in \mathbb{K}$ es distinto de cero entonces λA es abierto.

b) Es sencillo comprobar que si $(X, \| \quad \|)$ es un espacio seminormado entonces la familia $\mathcal{B} = \{U(0;\alpha) : \alpha > 0\}$ verifica las condiciones 1, 2 y 3. Si T es la topología de la seminorma demostraremos que $T = T(\mathcal{B})$. Sea $A \in T$ y sea $x \in A$ tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que $U(x,\alpha) \subset A$ pero $U(x,\alpha) = x + U(0,\alpha)$ y deducimos que $A \in T(\mathcal{B})$. Si $A \in T(\mathcal{B})$ y $x \in A$ entonces existe $\alpha > 0$ tal que $x + U(0,\alpha) \subset A$ así pues $U(x,\alpha) \in A$ y $A \in T$.

c) Sea $\mathcal{B}$ una familia de partes de X que verifica las anteriormente citadas propiedades (1), (2) y (3), de base de entornos. Demostraremos que $(X, T(\mathcal{B}))$ es un espacio vectorial topológico.

Sea $\varphi : X \times X \to X$ la aplicación definida por $\varphi((x,y)) = x+y$, donde en $X \times X$ se considera la correspondiente topología producto. Sea $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ una red en $X \times X$ tal que $(x_0, y_0) \in \lim\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. Claramente $x_0 \in \lim_{\alpha\in I} x_\alpha$ y $y_0 \in \lim_{\alpha\in I} y_\alpha$. Probaremos que $x_0 + y_0 \in \lim\{\varphi(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. Sea $B \in \mathcal{B}$ y consideremos el conjunto $x_0 + y_0 + B$. Tenemos que existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $C + C \subset B$. Como $x_0 + C$ es entorno de x_0, existe $\alpha_1 \in I$ tal que si $\alpha \geq \alpha_1$ se cumple que $x_\alpha \in x_0 + C$. Análogamente existe $\alpha_2 \in I$ tal que si $\alpha \geq \alpha_2$ es $y_\alpha \in y_0 + C$. Sea $\alpha_3 \in I$ tal que $\alpha_3 \geq \alpha_1$ y $\alpha_3 \geq \alpha_2$. Tenemos que, para $\alpha \geq \alpha_3$, $x_\alpha + y_\alpha \in x_0 + y_0 + C + C \subset x_0 + y_0 + B$.

De manera también sencilla probaremos que la aplicación $h : \mathbb{K} \times X \to X$ definida por $h(\alpha x) = \alpha x$, donde en $\mathbb{K} \times X$ se considera la correspondiente topología producto, es continua. Sea $\{(\alpha_i, x_i)\}_{i\in I}$ una red en $\mathbb{K} \times X$ tal que $(\alpha_0, x_0) \in \lim\{(\alpha_i, x_i)\}_{i\in I}$. Tenemos que $\alpha_0 \in \lim \alpha_i$ y $x_0 \in \lim x_i$.

Si $x_0 = 0$ y $\alpha_0 = 0$, sea $B \in \mathcal{B}$ un entorno de cero. Existe $i_1 \in I$ tal que si $i \geq i_1$, es $|\alpha_i| \leq 1$ y existe $i_2 \in I$ tal que si $i \geq i_2$ es $x_i \in B$. Consideremos $i_3 \in I$ tal que $i_3 \geq i_1$ y $i_3 \geq i_2$. Si $i \geq i_3$ se verifica que $\alpha_i x_i \in B$.

Si $x_0 = 0$ y $\alpha_0 \neq 0$ tenemos que, para $i \in I$, se cumple $\alpha_i x_i = (\alpha_i - \alpha_0)x_i + \alpha_0 x_i$. Veamos que $\alpha_0 x_i = 0 \in \lim(\alpha_0 x_i)$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un entorno de cero. Entonces, $\frac{1}{\alpha_0}B$ es también un entorno de 0 y, por tanto, existe $i_0 \in I$ tal que si $i \geq i_0$ se cumple $x_i \in \frac{1}{\alpha_0}B$. Por tanto, $\alpha_0 x_i \in B$. De la continuidad de φ deducimos que, como $0 \in \lim(\alpha_i - \alpha_0)_{i\in I}$ y $0 \in \lim \alpha_0 x_i$, entonces $0 \in \lim \alpha_i x_i$.

Si $x_0 \neq 0$ y $\alpha_0 = 0$, tenemos que $\alpha_i x_i = \alpha_i(x_i - x_0) + \alpha_i x_0$, para $i \in I$. Veamos que $0 \in \lim \alpha_i x_0$. Sea $B \in \mathcal{B}$ un entorno de 0. Como B es absorbente, para x_0 existe $t_0 > 0$ tal que si $|t| \leq t_0$ se verifica que $tx_0 \in B$. Como existe $i_0 \in I$ tal que si $i \in I$ y $i \geq i_0$ entonces $|\alpha_i| < t_0$, resulta que $\alpha_i x_i \in B$. Tenemos así que $0 \in \lim(x_i - x_0)$. Como $0 \in \lim \alpha_i(x_i - x_0)$ y $0 \in \lim \alpha_i x_i$, de la continuidad de φ, deducimos que $0 \in \lim \alpha_i x_i$.

Finalmente, si $x_0 \neq 0$ y $\alpha_0 \neq 0$ entonces para cada $i \in I$ se tiene

$$\alpha_i x_i - \alpha_0 x_0 = (\alpha_i - \alpha_0)(x_i - x_0) + (\alpha_i - \alpha_0)x_0 + \alpha_0(x_i - x_0).$$

De la continuidad de φ podemos deducir que $0 \in \lim(\alpha_i x_i - \alpha_0 x_i)$. Por tanto, también se deduce que $\alpha_0 x_0 \in \lim \alpha_i x_i$.

d) Supongamos ahora que (X,T) es una espacio vectorial topológico. Demostraremos que existe una familia $\mathcal{B}$ no vacía de partes de X que verifica (1), (2) y (3) y es tal que $T(\mathcal{B}) = T$.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los entornos de 0 que son equilibrados. Veamos que $\mathcal{B}$ es no vacío y que es una base de entornos de 0. Sabemos que la aplicación $h : \mathbb{K} \times X \to X$ definida por $h((\alpha, x)) = \alpha x$ es continua. Por tanto, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, la aplicación $h_\alpha : X \to X$ definida por $h_\alpha(x) = \alpha x$ es también una aplicación continua. Si $\alpha \neq 0$ entonces la correspondiente aplicación inversa es precisamente $h_{\frac{1}{\alpha}}$. Por tanto h_α es un homeomorfismo. Esto prueba que $\alpha \neq 0$ y U es entorno de 0 entonces αU es también un entorno de 0.

De la continuidad de h en $(0,0)$ se deduce que, dado un entorno U en X del punto $h((0,0)) = 0$, existen $\alpha_0 > 0$ y un entorno V de 0 en X tales que $\alpha x \in U$, para $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq \alpha_0$ y $x \in V$. Es decir, $\alpha V \subset U$ si $|\alpha| \leq \alpha_0$. Por tanto, $U_0 = \cup\{\alpha V, \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| \leq \alpha_0\}$ esta contenido en U y es un entorno equilibrado de 0. Queda pues así demostrado que $\mathcal{B} \neq \emptyset$ y además que $\mathcal{B}$ es base de entornos de 0 en $(X.T)$. Por consiguiente, si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Consideremos $x_0 \in X$ y U entorno de 0. De la continuidad de h, se deduce que la aplicación $h^{x_0} : \mathbb{K} \to X$ definida por $h^{x_0}(\alpha) = \alpha x_0$ es continua. Como U es un entorno de $h^{x_0}(0) = 0$, existe $\beta > 0$ tal que si $|t| < \beta$ se verifica que $tx_0 \in U$. Por consiguiente, U es absorbente. En particular, los elementos de $\mathcal{B}$ son absorbentes.

Sea $U \in \mathcal{B}$. De la continuidad de la aplicación $\varphi : X \times X \to X$ definida por $\varphi((x,y)) = x + y$, deducimos que existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que si $x \in B_1$, $y \in B_2$ se cumple $x + y \in U$. Si $B \in \mathcal{B}$ y $B \subset B_1 \cap B_2$ tenemos que $B + B \subset U$.

Por consiguiente, $\mathcal{B}$ verifica las propiedades (1), (2) y (3) para determinar una topología $T(\mathcal{B})$.

De la continuidad de φ, deducimos que, para $x \in X$, la aplicación $\varphi_x : X \to X$ definida por $\varphi_x(y) = y+x$ es continua. Como la aplicación inversa es φ_{-x}, tenemos que φ_x es un homeomorfismo. Por tanto, si V es entorno de 0 tenemos que $x + V$ es entorno de x. Por consiguiente, $x + \mathcal{B}$ es una base de entornos de x en (X,T). Como $x + \mathcal{B}$ es también base de entornos de x en $(X, T(\mathcal{B}))$, podemos afirmar que $T = T(\mathcal{B})$.

Es conveniente observar que si (X,T) es espacio vectorial topológico y $\mathcal{B}$ es base de entornos de cero con las propiedades (1), (2) y (3) entonces se verifica que $T = T(\mathcal{B})$.

10.1.2 Propiedades de los espacios vectoriales topológicos

TEOREMA 10.1.5 *Sea (X,T) un espacio vectorial topológico. Se verifica que (X,T) es regular.*

DEMOSTRACIÓN Sea $x \in X$ y sea $A \subset X$ un entorno de x. Sea $\mathcal{B}$ una base de entornos de 0 verificando (1), (2) y (3) tal que $T(\mathcal{B}) = T$. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x + B \subset A$. Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $C + C \subset B$. Probaremos que $\mathrm{cl}(C) \subset B$. Si $y \in \mathrm{cl}(C)$, tenemos que $(y + C) \cap C \neq \emptyset$ y por tanto existe $z \in (y + C) \cap C$. Como $z \in y + C$ será de la forma $z = y + c$, con $c \in C$ y $z - y \in C$. Por ser C un conjunto equilibrado, también se cumple $y-z \in C$. Por tanto, $y=(y-z)+z \in C+C \subset B$. Esto prueba que $x+\mathrm{cl}(C) \subset x+B$ y que $x+\mathrm{cl}(C)$ es un entorno cerrado de x. ∎

En realidad puede demostrarse, aunque la demostración no es sencilla, que si (X, T) es un espacio vectorial topológico que verifica la propiedad de separación T_0 entonces (X, T) es completamente regular y por tanto será un espacio T_{3a} o de Tychonoff.

Propongo aquí al lector que demuestre que si X satisface el primer axioma de numerabilidad y es secuencialmente completo entonces X es completo.

TEOREMA 10.1.6 *(X,T) es de Hausdorff si y sólo si $\bigcap\{V : V \in \mathcal{B}\} = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, si (X,T) es de Hausdorff y $x \in X$ con $x \neq 0$ entonces existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \notin V$. Por tanto, $\cap\{V : V \in \mathcal{B}\} = \{0\}$. Recíprocamente, si $\bigcap\{V : V \in \mathcal{B}\} = \{0\}$, consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como $x-y \neq 0$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x-y \notin B$. Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $C+C \subset B$; probaremos que $(x+C) \cap (y+C) = \emptyset$. En caso contrario existirá $z \in (x+C) \cap (y+C)$ y, por ser C equilibrado, tenemos que $x-z \in C$ y $z-y \in C$. Por consiguiente, $x-y=(x-z)+(z-y) \in C+C \subset B$ y esto es una contradicción. ∎

Si X es un espacio vectorial y $\| \quad \|$ es una seminorma en X que no es norma, se verifica que $(X, \| \quad \|)$ es un espacio vectorial topológico que no es de Hausdorff.

DEFINICIÓN 10.1.7 *Sea (X,T) un espacio vectorial topológico. Se dice que (X,T) es* ***localmente convexo*** *si existe una familia $\mathcal{B}$ de partes de X con las propiedades (1), (2) y (3) tal que $T(\mathcal{B}) = T$ y cada elemento de $\mathcal{B}$ es convexo.*

Como los conjuntos convexos se conservan por traslaciones, deducimos que, para cada $x \in X$, $\{x+B : B \in \mathcal{B}\}$ es una base de entornos convexos de x.

TEOREMA 10.1.8 *Sea X un espacio vectorial topológico. Si F es un subespacio vectorial de X entonces cl(F) es un subespacio vectorial de X.*

DEMOSTRACIÓN Sea B_x el sistema de entornos de x y sea B_y el de y, donde $x, y \in \mathrm{cl}(F)$. Consideremos en $D = B_x \times B_y$ la relación $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ si y sólo si $U_2 \subset U_1$ y $V_2 \subset V_1$. Claramente, $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido, por la relación $\leq$. Para cada $(U,V) \in D$ escogemos $Z_{(U,V)} = x_U + y_V$ donde $x_U \in U \cap F$, $y_V \in V \cap F$. Tenemos que $(Z_{(U,V)})_{(U,V) \in D}$ es una red en F. Probaremos que $x+y \in \lim z_{(U,V)}$. Sea W entorno de $x+y$. Como la aplicación $\varphi : X \times X \to X$ definida por $\varphi(x,y) = x+y$ es continua, es claro que existe un entorno U_0 de x y existe un entorno V_0 de y tales que $U_0 + V_0 \subset W$ Para cada $(U,V) \in D$ con $(U,V) \geq (U_0, V_0)$, tenemos que $x_U \in U_0$, $y_U \in V_0$ y $Z_{(U,V)} \in W$. Por tanto $x+y \in \mathrm{cl}(F)$.

Consideremos ahora $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que $(\alpha x_U)_{U \in Bx}$ es una red en F, si en B_x consideramos la relación natural $U_1 \leq U_2$ si y sólo si $U_2 \subset U_1$. Probaremos que $\alpha x \in \lim \alpha x_U$. Sea W un entorno de αx; es claro que $U_0 = \frac{1}{\alpha} W$ es un entorno de x. Si $U \in B_x$ y $U \geq U_0$ se tiene que $x_U \in \frac{1}{\alpha} W$ y, por tanto, $\alpha x_U \in W$. Por consiguiente, $\alpha x \in \mathrm{cl}(F)$, con lo que queda probado que $\mathrm{cl}(F)$ es un subespacio vectorial de X. ∎

Proponemos al lector que demuestre que la clausura de un conjunto convexo es convexo y que la clausura de un conjunto equilibrado es equilibrado.

TEOREMA 10.1.9 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea P un hiperplano afín. Si P no es cerrado entonces P es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN Será $P = x_0 + H$, donde H es un hiperplano vectorial (subespacio vectorial maximal). Como las traslaciones son homeomorfismos, tenemos que H no es cerrado; por tanto, $H \subset \mathrm{cl}(H)$ y $H \neq \mathrm{cl}(H)$. Esto significa que $\mathrm{cl}(H) = X$ y, por consiguiente $\mathrm{cl}(P) = x_0 + \mathrm{cl}(H) = X$. ∎

TEOREMA 10.1.10 *Sea X un espacio vectorial topológico. Se verifica:*

1) $H \subset X$ es hiperplano vectorial cerrado si y sólo si existe una aplicación $f\ X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, de modo que $H = \ker f$;

2) $H \subset X$ es hiperplano afín cerrado si y sólo si existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, y existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tales que $M = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$.

DEMOSTRACIÓN La propiedad 1) es evidente; probemos 2). Si M es un hiperplano afín cerrado se tiene que $M = x_0 + H$, donde H es un hiperplano vectorial cerrado. Sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua tal que $H = \ker f$ y sea $f(x_0) = \alpha$. Si $x \in M$ se puede escribir $x = x_0 + y$, con $y \in H$, y se verifica $f(x) = \alpha$. Recíprocamente, si $f(x) = \alpha$ se tiene $f(x - x_0) = 0$ y $x - x_0 = y \in \ker f$. Por tanto, $x = x_0 + y \in M$. ∎

TEOREMA 10.1.11 *Sea X espacio vectorial de dimensión finita. Existe una única topología que hace de X un espacio vectorial topológico y de Hausdorff. A esta topología se le llama canónica y es la mayor (más fina) topología en X que es compatible con la estructura vectorial de X.*

DEMOSTRACIÓN Sea $n = dim X$, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de X y consideremos la aplicación $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ definida por $\varphi(x) = \hat{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, si $x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$. Tenemos que φ es una aplicación lineal y biyectiva. Consideremos $\mathbb{K}^n$ con la topología inducida por la norma del supremo $\| \hat{x} \| = \max\{|x^i| : 1 \leq i \leq n\}$ y construimos una familia T de partes de X de la siguiente forma:

i) $\emptyset \in T$;

ii) Si $U \subset X$, $U \neq \emptyset$, entonces $U \in T$ si y sólo si $\{(x^1, \ldots, x^n) : x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n \in U\}$ es abierto en $\mathbb{K}^n$.

Es claro que T es una topología en X de modo que φ es un homeomorfismo de X en $\mathbb{K}^n$. Vamos a probar que (X, T) es un espacio vectorial topológico.

Dado $\alpha > 0$ sea

$$B_\alpha = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{K}^n : |x^i| < \alpha, i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

y sea

$$A_\alpha = \varphi^{-1}(B_\alpha) = \{x \in X : x = x^1 e_1 + \dots x^n e_n, |x^i| < \alpha, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Como $\{B_\alpha : \alpha > 0\}$ es una base de entornos de cero en $\mathbb{K}^n$, tenemos que $\mathcal{B} = \{A_\alpha : \alpha > 0\}$ es una base de entornos de cero en (X, T). Demostraremos que $\mathcal{B}$ verifica las propiedades (1), (2) y (3) que son precisas para definir una topología vectorial en X.

Veamos que si $\alpha > 0$ entonces A_α es equilibrado y absorbente. En efecto, si $z \in A_\alpha$ y $\beta \in \mathbb{K}$ es tal que $|\beta| \leq 1$ tenemos que $|\beta z^i| = |\beta||z^i| < \alpha$. Así pues, $\beta z \in A_\alpha$. Si $z \in X$ entonces, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $a_i > 0$ tal que si $|\beta| < a_i$ es $|\beta z^i| < \alpha$. Sea $a = \text{mín}\{a_1, \dots a_n\}$; es claro que si $|\beta| < a$ se cumple $\beta z \in A_\alpha$.

Si $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{B}$ y $\alpha \leq \beta$ se tiene $A_\alpha \cap A_\beta = A_\alpha \in \mathcal{B}$. Finalmente, si $A_\alpha \in \mathcal{B}$ tenemos que $A_{\frac{\alpha}{2}} \subset \mathcal{B}$ y $A_{\frac{\alpha}{2}} + A_{\frac{\alpha}{2}} \subset A_\alpha$. Por tanto, $\mathcal{B}$ define en X una topología vectorial $T(\mathcal{B})$. Veremos que esta topología es precisamente T. Si $A \in T(\mathcal{B})$ y $z \in A$, existe $A_\alpha \in \mathcal{B}$ tal que $z + A_\alpha \subset A$ pero

$$z + A_\alpha = \{x^1 e_1 + \dots + x^n e_n : |x^i - z^i| < \alpha, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Este conjunto es un entorno de z en T. Recíprocamente, si $A \in T$ y $z \in A$ tenemos que $B = \{(x^1, \dots x^n) : x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in A\}$ es un entorno de $(z^1, \dots, z^n)$ en $\mathbb{K}^n$; por tanto, existe $\alpha > 0$ tal que $\{(x^1, \dots, x^n) : |x^i - z^i| < \alpha, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset B$, por lo que $z \in z + A_\alpha \subset A$. Por consiguiente, (X, T) es un espacio vectorial topológico y es de Hausdorff ya que $\mathbb{K}^n$ lo es.

Supongamos que T' es otra topología en X de modo que (X, T') es un espacio vectorial topológico. Veamos que $T' \subset T$. Sea B un entorno de 0 en (X, T'). Para cada $n \in \mathbb{N}$ es claro que existe W entorno de 0 en T' equilibrado y absorbente tal que $2^n W \subset B$. Es fácil comprobar que entonces $nW \subset B$. Como W es absorbente, para cada e_i existe $\alpha_i > 0$ tal que si $|x^i| < \alpha_i$ se cumple $x^i e^i \in W$. Sea $\alpha = \text{mín}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Es claro que $A_\alpha \subset nW \subset B$. Por tanto, $T' \subset T$. Vamos a demostrar que en el caso en que (X, T') sea un espacio vectorial topológico y T_2 entonces $T \subset T'$, con lo cual será $T = T'$. Comenzaremos probando que

$$A_1 = \{x^1 e_1 + \dots + x^n e_n : |x^i| < 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

es un entorno de 0 en (X, T'). Como las homotecias son homeomorfismos entonces estará claro que $A_\alpha = \alpha A_1$ es entorno de 0 en (X, T'), para cada $\alpha > 0$, y por tanto sería $T \subset T'$.

Tenemos que $\text{cl}(A_1)$ es compacto en (X, T) ya que $\text{cl}(A_1) = \varphi^{-1}(B)$, donde $B = \{(x_1, \dots, x_n) : |x^i| \leq 1, i \in \{1, \dots, n\}\}$ y B es claramente compacto en $\mathbb{K}^n$. Como $T' \subset T$ tenemos que la identidad $i : (X, T) \to (X, T')$ es continua y por tanto $\overline{A}_1 = \text{cl}(A_1)$ es compacto en (X, T'). Consideremos $i_0 = i|_{\overline{A}_1} : (\overline{A}_1, T_{\overline{A}_1}) \to (\overline{A}_1, T'_{\overline{A}_1})$ (como (X, T') es T_2 y $\overline{A}_1$ es compacto será $\overline{A}_1$ cerrado). Por tanto, como i_0 es biyectiva de un compacto en un espacio T_2 tenemos que i_0 es homeomorfismo y será $i_0(A_1) = i(A_1)$ un entorno de cero en $(\overline{A}_1, T'_{\overline{A}_1})$. Por consiguiente, existe

V entorno de 0 en T' tal que $V \cap \overline{A}_1 = A_1$. Sea U entorno equilibrado de 0 en $(X.T')$ tal que $U \subset V$. Tenemos que $U \cap \overline{A}_1 \subset A_1$. Demostraremos que $A_1 \supset U$, lo cual finalizará la demostración. Sea $x = x^1e_1 + \cdots + x^ne_n \in U$ y sea $c = \text{máx}\{|x^i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$. Si $c \geq 1$ entonces $\frac{1}{c} \leq 1$ y $\frac{1}{c}x \in U$. Además $\frac{1}{c}x \in \overline{A}_1 \setminus A_1$ ya que $\text{máx}\{\frac{1}{c}|x^i| : i \in \{1, \dots, n\}\} = 1$, se tiene $\frac{1}{c}x \notin A_1$ y sin embargo $\frac{1}{c}x \in U \cap \overline{A}_1$, lo cual es una contradicción. Por tanto $c < 1$ y esto significa que $x \in A_1$. ∎

10.2 Operaciones con los espacios vectoriales topológicos y propiedades

1.- *Si (X, T) es un espacio vectorial topológico de dimensión finita y T_2 entonces X es un espacio normado.*

En efecto, sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X y sea $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ la aplicación definida por $\varphi(x^1e_1 + \cdots + x^ne_n) = (x^1, \dots, x^n)$. Observemos, en el teorema anterior, que la topología T es la determinada por: i) $\emptyset \in T$; ii) Si $A \subset X$ y $A \neq \emptyset$, $A \in T$ si y sólo si $\varphi(A)$ es abierto en $\mathbb{K}^n$. Consideremos en $\mathbb{K}^n$ la norma

$$\| (x^1, \dots, x^n) \| = max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Definimos, para $x \in X$, $\|x\| = \|\varphi(x)\|$; es claro que $\| \ \|$ es una norma en X. Sea $T_{\| \ \|}$ la topología que esta norma induce en X. Si $A \in T_{\| \ \|}$ y $x \in A$ entonces existe $B(x, \alpha) \subset A$ y $B(\varphi(x), \alpha) \subset \varphi(A)$. Esto prueba que A es un entorno de x para la topología T. Recíprocamente, si $A \in T$ y $x \in A$ entonces $\varphi(x) \in \varphi(A)$ y $B(\varphi(x), \alpha) \subset \varphi(A)$. De esta forma, $B(x, \alpha) \subset A$ y, por tanto, se deduce que A es un entorno de x para la topología $T_{\| \ \|}$.

2.- Si (X, T) es un espacio normado entonces X es un espacio vectorial topológico T_2. Supongamos que X es de dimensión finita y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X entonces acabamos de probar que $T = T_{\| \ \|}$, donde

$$\| x^1e_1 + \cdots + x^ne_n \| = max\{|x^i| : i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Por tanto, si T' es una topología de norma en X entonces también se verifica $T' = T_{\| \ \|}$ y deducimos que **todas las normas en X son topológicamente equivalentes** y por tanto sabemos que serán equivalentes (todo esto ya fue probado en su momento). Además, (X, T) será completo por serlo $\mathbb{K}^n$. También tenemos que $(X.T)$ es localmente compacto pues la compacidad local se conserva por homeomorfismos y $\mathbb{K}^n$ es localmente compacto.

3.- Sea X un espacio vectorial topológico y sea A un subconjunto de X. Se dice que A es **precompacto** si para cada entorno V de 0 existe un número finito, $x_1, x_2, \dots x_n$, de vectores de X tales que $A \subset \cup_{i=1}^n (x_i + V)$. Recordemos que se dice que A es **acotado** si para cada entorno V de 0 existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha A \subset V$.

Probaremos ahora que *si A es precompacto entonces A es acotado.* Sea W un entorno de 0 y sea V entorno equilibrado y absorbente de 0 tal que $V + V \subset W$. Existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^n (x_i + V)$. Por ser V absorbente, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\alpha_i > 0$ tal que si $|\beta| < \alpha_i$ es $\beta x_i \in V$. Sea $\alpha = min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y sea $\beta > 0$ tal que $\beta < \alpha$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene $\beta x_i \in V$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < min\{1, \beta\}$; entonces,

$$\varepsilon A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\varepsilon x_i + \varepsilon V) \subset \{\varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n\} + \varepsilon V \subset V + V \subset W.$$

4.- Sea X espacio vectorial topológico. Si $A \subset X$ es compacto es claro que A será precompacto y por tanto acotado. Si además X fuese un espacio T_2 tendremos que A será cerrado y acotado. Si ahora fuese X un espacio T_2 y con $dim X = n$ sería X isomórfico a $\mathbb{K}^n$ y podremos afirmar, por tanto, que los cerrados y acotados de X serán compactos.

5.- **Producto de espacios vectoriales topológicos**. Sea $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el correspondiente espacio vectorial producto. Sea T la topología en X producto de $\{(X_i, T_i)\}_{i \in I}$. Veremos que (X, T) es un espacio vectorial topológico. En efecto, veamos que $T : X \times X \to X$ es continua. Sea $\{(x^\alpha, y^\alpha)\}_{\alpha \in A}$ una red en $X \times X$ tal que $(x^0, y^0) \in \lim_\alpha (x^\alpha, y^\alpha)$. Entonces $x^0 \in \lim_\alpha x^\alpha$, $y^0 \in \lim_\alpha y^\alpha$ y, para cada $i \in I$, será $x_i^0 \in \lim_\alpha x_i^\alpha$, $y_i^0 \in \lim_\alpha y_i^\alpha$. Por tanto, $x_i^0 + y_i^0 \in \lim_\alpha (x_i^\alpha + y_i^\alpha)$, de donde se deduce que $x^0 + y^0 \in \lim_\alpha (x^\alpha + y^\alpha)$. De manera análoga se prueba que la aplicación $h : \mathbb{K} \times X \to X$ definida por $h(\alpha, x) = \alpha x$ es continua.

6.- **Cociente de un espacio vectorial topológico**. Sea X un espacio vectorial topológico y sea Z un subespacio vectorial de X. Se verifica que Z, con la topología inducida de X, es un espacio vectorial topológico. Consideremos el espacio vectorial cociente X/Z con la correspondiente topología cociente. Veremos que X/Z es espacio vectorial topológico y que la aplicación canónica $p : X \to X/Z$ es abierta. Recordemos que p es continua y que $B \subset X/T$ es abierto en la topología cociente si y sólo si $p^{-1}(B)$ es abierto en X. Consideremos la aplicación $f : X/Z \times X/Z \to X/Z$ definida por $f(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} + \overline{b} = a + b + Z$.

Sea W un entorno abierto en X/Z de $(a + b) + Z$. Se verifica que $a + b \in p^{-1}(W)$, donde $p^{-1}(W)$ es abierto en X, por lo que existen A y B abiertos en X tales que $a \in A$, $b \in B$ y $A + B \subset p^{-1}(W)$. Por tanto, $p(A) + p(B) \subset W$ y $f^{-1}(W) \supset p(A) \times p(B)$. Para probar la continuidad de f bastará probar que $p(A)$ y $p(B)$ son abiertos en X/Z, con lo que de paso se probaría que p es abierta. Sea pues A un conjunto abierto en X. Probaremos que $p^{-1}(p(A))$ es abierto en X. Tenemos que $p^{-1}(p(A)) = A + Z = \cup_{x \in Z}(A + x)$ que es abierto en X.

De manera análoga se puede probar que la aplicación $h : \mathbb{K} \times X/Z \to X/Z$ definida por $h(\alpha, \overline{a}) = \alpha\overline{a}$ es continua. Observemos finalmente que los entornos de cero en X/Z son de la forma $p(A)$ donde A es entorno de cero en X.

7.- **Complementos topológicos**. Sea X un espacio vectorial y sean X_1, X_2 dos subespacios vectoriales de X. Sabemos que si $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ y $X_1 + X_2 = X$ entonces se dice que X_1 y X_2 son complementos algebraicos de X. En esta situación, cada $x \in X$ se puede expresar de manera única en la forma $x = x_1 + x_2$, donde $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. La proyección de X sobre X_1 (desde X_2) es la aplicación definida por $p_1(x) = x_1$ (de manera similar se define la proyección p_2).

Si X es un espacio vectorial topológico y X_1, X_2 son complementos algebraicos es claro que la aplicación $\varphi : X_1 \times X_2 \to X$n definida por $\varphi((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$ es lineal y continua. Si además φ es un homeomorfismo (es decir, φ es un isomorfismo topológico) diremos que X_1 y X_2 son complementos topológicos de X. Claramente, en esta situación podemos identificar $X_1 \times X_2$ con X, $X_1 \times \{0\}$ con X_1 y $\{0\} \times X_2$ con X_2.

Si X_1 y X_2 son complementos topológicos en X y X es un espacio T_2 entonces X_1 y X_2 son cerrados. En efecto, $X_1 \times \{0\}$ es cerrado en $X_1 \times X_2$ y $X_1 = \varphi(X_1 \times \{0\})$ será pues cerrado en X. Lo mismo puede afirmarse para X_2. El recíproco de la afirmación anterior no es cierto en general, aunque en el caso de espacios de Banach sabemos que los complementos algebraicos cerrados son complementos topológicos.

Sabemos que cada subespacio vectorial F de X admite complemento algebraico pero es falso, en general, que lo admita topológico. Por ejemplo c_0 en l_∞.

Veamos ahora las siguientes caracterizaciones y propiedades.

i) Sean X_1 y X_2 complementos algebraicos de X. Entonces X_1 y X_2 son complementos topológicos si y sólo si la proyección $p_1 : X \to X_1$ es continua (análogamente para la correspondiente proyección p_2). En efecto si $\varphi : X_1 \times X_2 \to X$ es la aplicación definida por $\varphi((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$ y es un isomorfismo sobre X entonces tenemos que $\varphi^{-1} : X \to X_1 \times X_2$ es lineal y continua. Como la aplicación $q_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ definida por $q_1((x_1, x_2)) = x_1$ es lineal y continua se tiene que la aplicación $p_1 = q_1 \cdot \varphi$ también es lineal y continua.

   Recíprocamente, si p_1 es continua entonces también es continua $p_2 : X \to X_2$ ya que $p_2 = I - p_1$. Consideremos la aplicación $\varphi : X_1 \times X_2 \to X$. Esta aplicación es lineal y biyectiva, por ser X_1 y X_2 complementos algebraicos, y además es continua, por ser X espacio vectorial topológico. Para cada $x \in X$ tenemos que $\varphi^{-1}(x) = (p_1(x), p_2(x))$ y deducimos que φ^{-1} es continua en X.

ii) Sea X un espacio vectorial topológico y sean X_1, X_2 complementos algebraicos en X, entonces X_1 y X_2 son complementos topológicos si y sólo si la biyección canónica $h_1 : X_1 \to X/X_2$ es homeomorfismo (o la $h_2 : X_2 \to X/X_1$).

   En efecto, sea $h : X \to X/X_2$ la proyección canónica, que sabemos que es continua. Como $h_1 = h_{X_1}$, resulta que h_1 es continua. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p_1} & X_1 \\ q_1 \downarrow & & \downarrow I_{X_1} \\ X/\ker p_1 & \xrightarrow{h_1^{-1}} & p_1(X) = X_1 \end{array}$$

   Tenemos que $\ker p_1 = X_2$ y $p_1 = I_{X_1} \cdot h_1^{-1} \cdot q_1$ y es claro que h_1^{-1} es continua si y sólo si p_1 es continua. Por tanto, h_1 es un isomorfismo sobre X/X_2 si y sólo si X_1 y X_2 son complementos topológicos.

iii) Sea X un espacio vectorial topológico y sean X_1, X_2 dos subespacios de X que sean complementos topológicos en X. Sea Y otro espacio vectorial topológico y sea $U : X \to Y$ una aplicación lineal. Consideremos $U_1 = U_{|X_1}$, $U_2 = U_{|X_2}$. Es claro que para cada $x \in X$ se tiene que $U(x) = U_1(x) + U_2(x)$ y que U es continua si y sólo si lo son U_1, U_2.

iv) Sea X un espacio vectorial topológico y sea X_1 un subespacio vectorial de X. Entonces se verifica que toda aplicación lineal y continua de X_1 en otro espacio vectorial topológico Y tiene extensión lineal y continua a X si y sólo si X_1 tiene complemento topológico en X.

En efecto, si $I_{X_1} : X_1 \to X_1$ tiene extensión, $U : X \to X_1$, lineal y continua entonces si $x \in X$ es $U(U(x)) = U(x)$ y $x = U(x) + (x - U(x))$. Como $x - U(x) \in \ker U$, deducimos que X y $\ker U$ son complementos algebraicos, ya que $X_1 \cap \ker U = \{0\}$. Observemos que $U = p_1$, la proyección canónica de X en X, es p_1 continua. Por tanto X_1 y $\ker U$ son complementos topológicos.

Supongamos ahora que X_1 y X_2 son complementos topológicos y que $U_1 : X_1 \to Y$ es lineal y continua, donde Y es un espacio vectorial topológico. Tenemos que la proyección $p_1 : X \to X_1$ es lineal y continua. Por tanto, $U = U_1 p_1$ es una aplicación lineal y continua de X en Y tal que $U(x_1) = U_1(p_1(x_1)) = U_1(x_1)$ si $x_1 \in X_1$.

8.- Sea X un espacio vectorial topológico; sabemos que si X es T_2 entonces para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado. Demostraremos que si X es tal que $\{0\}$ es cerrado entonces necesariamente X es T_2. En efecto, consideremos $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como $x - y \neq 0$ y $\{0\}$ es cerrado, existe U entorno de 0 tal que $0 \notin (x-y)+U$ y existe W entorno equilibrado de 0 tal que $W + W \subset U$. Tenemos que $x + W$, $y + W$ son entornos de x e y respectivamente. Supongamos que existe $z \in (x + W) \cap (y + W)$. Se verifica que $z = x + z_1 = y + z_2$, con $z_1, z_2 \in W$. Por tanto, $y - x = z_1 - z_2 \in W + W \subset U$ y $0 = (x - y) + (y - x) \in x - y + U$, lo que es una contradicción.

Finalmente probaremos que si X es un espacio vectorial topológico y F es un subespacio vectorial de X entonces X/F es T_2 si y sólo si F es cerrado. En efecto, X/F es T_2 si y sólo si $\{\overline{0}\}$ es cerrado en X/F y esto sucede si y sólo si $p^{-1}(\{\overline{0}\}) = F$ es cerrado en X, donde $p : X \to X/F$ es la proyección canónica.

9.- Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos. Denotemos por $C\mathcal{L}(X,Y)$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y. Es sencillo comprobar que $C\mathcal{L}(X, Y)$, con las operaciones usuales $f + g$ y αf, es un espacio vectorial.

Supongamos que X es de dimensión finita y T_2. Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Demostraremos que T es continua. En efecto, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de X y definamos la aplicación $\varphi : \mathbb{K}^n \to X$ definida por $\varphi(x^1, \ldots, x^n) = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$. Sabemos que φ es un isomorfismo topológico sobre X. Sea $T' : \mathbb{K}^n \to Y$ la aplicación definida por $T' = T \cdot \varphi$. Si probamos que T' es continua tendremos la continuidad de T, ya que $T = T' \cdot \varphi^{-1}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean $j_i : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^n$ y $T'_i : \mathbb{K} \to Y$ las aplicaciones definidas, respectivamente, por $j_i(x) = (0 \cdots \overbrace{x}^{i}$

$\ldots 0)$ y $T'_i = T' \cdot j_i$. Es claro que $T'(x) = \sum_{i=1}^{n} T'_i(x^i)$. Para cada $i \in \{1 \ldots n\}$ tenemos que $T'_i(x^i) = x^i T'_i(1)$, que es claramente continua. Por ser Y un espacio vectorial topológico, también es continua la aplicación T' y, por tanto, T también lo es.

10.- Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y sean X_1 y X_2 dos subespacios vectoriales de X que son complementos algebraicos en X. Probaremos que si X_1 es de dimensión finita y X_2 es cerrado entonces X_1 y X_2 son complementos topológicos. En efecto, X_1 con la topología inducida es T_2 y, por tanto, la topología de X_1 es la canónica. Por otra parte, como X_2 es cerrado, el espacio X/X_2 es T_2 y como es de dimensión finita también tendrá la topología canónica. Por el apartado anterior, la biyección canónica $\varphi : X_1 \to X/X_2$ es tal que las aplicaciones φ y φ^{-1} son continuas, por lo que hemos probado el resultado anunciado.

Sea ahora X_1 un subespacio vectorial de X que es cerrado y de codimensión finita. Como estamos entonces en la situación de antes, podemos deducir que X_1 está complementado topológicamente en X.

11.- Sea X un espacio vectorial topológico T_2. *Si F es un subespacio vectorial de X que es de dimensión finita entonces F es cerrado.* En efecto, sea $x \in \mathrm{cl}(F)$ y sea $G = F + \mathcal{L}(x)$. Se tiene que $x \in G$. Como G es de dimensión finita tenemos que G es un espacio de Banach y también lo es F, por lo que F es cerrado en G. Como $\mathrm{cl}_G(F) = \mathrm{cl}(F) \cap G = F$, resulta que $x \in F$.

12.- Sea X un espacio vectorial topológico. *Si F es un subespacio vectorial cerrado y G es un subespacio vectorial de dimensión finita entonces $F + G$ es cerrado.* En efecto, tenemos que la aplicación canónica $q : X \to X/F$ es continua y, como F es cerrado, se tiene que X/F es un espacio T_2. Como $q(G)$ es de dimensión finita se tiene que $q(G)$ es cerrado. Dado que $G + F = q^{-1}(q(G))$, deducimos que $G + F$ es cerrado.

Observemos que si tenemos un espacio vectorial X dotado de dos topologías T y T' de espacio vectorial topológico T_2 entonces las restricciones de estas a un mismo subespacio vectorial de dimensión finita dan una única topología, que es la canónica.

Observemos finalmente que *si X es un espacio vectorial de dimensión infinita entonces podemos definir en X dos normas no equivalentes.* En efecto, sea $\{e_i\}_{i \in I}$ una base algebraica de X; es claro que si $x = \sum_{i \in I} x^i e_i \in X$ se tiene que $x^i = 0$ para cada $i \in I \setminus F$, donde F es cierto subconjunto finito de I. Podemos definir

$$\| x \|_1 = \sum_{i \in I} |x^i|, \qquad \| x \|_\infty = sup\{|x^i| : i \in I\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{i_1, \ldots, i_n\}$ un subconjunto de n elementos distintos de I tenemos que $\| e_{i_1} + \ldots e_{i_n} \|_\infty = 1$ pero $\| e_{i_1} + \cdots + e_{i_n} \|_1 = n$. Por tanto, no existe $k > 0$ tal que $\| x \|_1 \leq k \| x \|_\infty$ para cada $x \in X$, aunque es cierto que si $x \in X$ entonces $\| x \|_\infty \leq \| x \|_1$.

10.3 Espacios vectoriales topológicos de dimensión finita

Nuestro propósito ahora es caracterizar claramente a los espacios vectoriales topológicos de dimensión finita.

LEMA 10.3.1 *Sea X espacio vectorial topológico y sea F un subconjunto cerrado de X. Si $A \subset X$ es un conjunto acotado equilibrado y no vacío entonces $\bigcap\{F + \frac{1}{n}A : n \in \mathbb{N}\} = F$.*

DEMOSTRACIÓN Como A es equilibrado, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $0 \in \frac{1}{n}A$ y deducimos que $F \subset \cap\{F + \frac{1}{n}A : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\mathcal{B}$ la familia de los entornos de 0 en X. Es claro que $F \subset \cap\{F+U : U \in \mathcal{B}\}$. Probaremos que, como F es cerrado, se da la igualdad. Si $x \notin F$ entonces existirá un entorno equilibrado U de 0 tal que $(x + U) \cap F = \emptyset$. Tenemos que $x \notin F + U$ ya que si $x = y + z$, con $y \in F$ y $z \in U$, se verifica $x - z = y \in x + U$. Dado $V \in \mathcal{B}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{m}A \subset V$. Por tanto, $F + \frac{1}{m}A \subset F + V$ y deducimos que $\bigcap\{F + \frac{1}{n}A : n \in \mathbb{N}\} \subset F + V$, para cada $V \in \mathcal{B}$. Por consiguiente, $\bigcap\{F + \frac{1}{n}A : n \in N\} \subset \cap\{F + V : V \in \mathcal{B}\}$. ▪

LEMA 10.3.2 *Sea X espacio vectorial topológico y sea F un subespacio vectorial cerrado de X tal que $F \neq X$. Si U y V son dos entornos de 0 tales que U es acotado, V es equilibrado y $V+V \subset U$ entonces existe $z \in U$ tal que $(z+V) \cap F = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que para cada $x \in U$ existe $z_x \in (x+V) \cap F$. Como V es equilibrado, se verifica $x \in z_x + V \subset F + V$; así pues $U \subset F + V$ y se tiene $2V \subset V + V \subset U \subset F + V$. Supongamos probado que $nV \subset F + V$. Entonces, $(n+1)V \subset nV + V \subset F + V + V \subset F + F + V = F + V$. Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$, es $V \subset F + \frac{1}{n}V$ y $V \subset \cap\{F + \frac{1}{n}V : n \in \mathbb{N}\} = F$; esto es una contradicción, ya que V es absorbente y se deduce que F es también absorbente y, como F es subespacio vectorial, se verifica $F = X$. ▪

TEOREMA 10.3.3 **[Teorema de Riesz]**

Sea X un espacio vectorial topológico T_2. Entonces, X es de dimensión finita si y sólo si existe un entorno U de 0 que es precompacto.

DEMOSTRACIÓN

Si $dim X = n$ sabemos que existe un isomorfismo T de $\mathbb{K}^n$ sobre X. Consideremos el conjunto $V = \{(x^1 \ldots x^n) : |x^i| \leq 1, 1 \leq i \leq \alpha\}$. Tenemos que V es entorno compacto de 0 en $\mathbb{K}^n$; por tanto, $T(V)$ es entorno compacto de 0 en X.

Recíprocamente, supongamos que U es un entorno precompacto de 0 en X. Sea V un entorno equilibrado de 0 tal que $V + V \subset U$. Supongamos que la dimensión de X es infinita. Sea $x_1 \in X$, con $x_1 \neq 0$; entonces $F_1 = \mathcal{L}(x_1)$ es un subespacio cerrado de X con $F_1 \neq X$. Por el lema anterior, tenemos que existe un $x_2 \in U$ tal que $(x_2 + V) \cap F_1 = \emptyset$. Supongamos que hemos obtenido $x_1, \cdots, x_n \in U$ de modo que si $F_{n-1} = \mathcal{L}(x_1 \ldots x_{n-1})$ se verifica $(x_n + V) \cap F_{n-1} =$

$\emptyset$. Consideremos $F_n = \mathcal{L}(x_1 \dots x_n)$. Aplicando el lema anterior, existe $x_{n+1} \in U$ tal que $(x_{n+1} + V) \cap F_n = \emptyset$. Así pues hemos obtenido, inductivamente, una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en U tal que $(x_{n+1} + V) \cap F_n = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $F_n = \mathcal{L}(x_1 \dots x_n)$. Observemos que si $p > q$ se tiene que $(x_p + V) \cap F_{p-1} \supset (x_p + V) \cap F_q$ y deducimos que $(x_p + V) \cap F_q = \emptyset$. Por tanto, $x_q \notin x_p + V$ y, como V es equilibrado, se tiene $x_p \notin x_q + V$. Sea $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Como M es un subconjunto de U, tenemos que M es precompacto. Sea W un entorno equilibrado de 0 tal que $W + W \subset V$. Entonces existirán $\{y_1 \dots y_m\} \subset X$ tales que $M \subset \cup\{y_j + W : 1 \leq j \leq m\}$. Dado que M es infinito, existen $j_0 \in \{1 \dots m\}$ y $p > q$ tales que $x_p, x_q \in y_{j_0} + W$ y entonces $y_{j_0} - x_q \in W$ y $x_p - y_{j_0} \in W$. Así pues, $x_p - x_q \in W + W \subset V$ y obtenemos $x_p \in x_q + V$, lo que es contradictorio. ▪

NOTA 10.3.4 1.- *Si X es un espacio vectorial topológico y $f : X \to \mathbb{K}$ es una aplicación lineal y no nula entonces f es abierta.*

En efecto, sea $A \subset X$ un conjunto abierto y no vacío. Sea $x \in A$; entonces $-x + A$ es un entorno abierto de 0 y por tanto será absorbente. Tenemos que existe $y \in X$ tal que $f(y) \neq 0$. Consideremos $z = \frac{1}{f(y)}y$ y sea $r > 0$ tal que $\lambda z \in -x + A$ si $|\lambda| \leq r$. Entonces, si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| \leq r$ es $\lambda z + x \in A$ y por tanto $f(\lambda z + x) = \lambda f(z) + f(x) \in f(A)$. Consideremos en $\mathbb{K}$ la bola $B(f(x), r)$. Tenemos que si $t \in B(f(x), r)$ es $|t - f(x)| \leq r$ y será $z_0 = (t - f(x))z + x \in A$. Por tanto, $f(z_0) = t - f(x) + f(x) = t \in f(A)$ y $B(f(x), r) \subset f(A)$.

2.- *Sean X, Y dos espacios vectoriales topológicos. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal tal que para cierto entorno U de 0 es TU acotado en Y entonces T es continua.*

En efecto, sea V un entorno de 0 en Y. Tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha(TU) \subset V$. Así pues, $\alpha U \subset T^{-1}(V)$ y $T^{-1}(V)$ es un entorno de 0.

3.- *Sea X un espacio vectorial topológico. Si $A \subset X$ es equilibrado entonces cl(A) es equilibrado.* En efecto, sea $x \in \text{cl}(A)$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Si $\lambda = 0$ es claro que $\lambda x = 0 \in A \subset \text{cl}(A)$. Supongamos que $\lambda \neq 0$ y sea U entorno de 0 en X. Tenemos que $\lambda^{-1}U$ es también un entorno de 0 y, por tanto, $(x + \lambda^{-1}U) \cap A \neq \emptyset$. Así pues, $\emptyset \neq (\lambda x + U) \cap \lambda A \subset (\lambda x + U) \cap A$ y se verifica $\lambda x \in \text{cl}(A)$.

Supongamos ahora que $A \subset X$ es convexo. Demostraremos que cl(A) es también convexo. Sean $x, y \in \text{cl}(A)$ y $\alpha \in (0,1)$. Sea V un entorno de 0 en X y sea W un entorno equilibrado de 0 tal que $W + W \subset V$. Tenemos que αW y $(1-\alpha)W$ están contenidos en W y como $x, y \in \text{cl}(A)$ se verifica $(x+W) \cap A \neq \emptyset$ $(y+W) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto $(\alpha x + \alpha W) \cap \alpha A \neq \emptyset$ y $[(1-\alpha)y + (1-\alpha)W] \cap (1-\alpha)A \neq \emptyset$. Sean $z_1 \in (\alpha x + \alpha W) \cap \alpha A$ y $z_2 \in [(1-\alpha)y + (1-\alpha)W] \cap (1-\alpha)A$. Entonces,

$$z_1 + z_2 \in \alpha x + (1-\alpha)y + \alpha W + (1-\alpha)W \subset \alpha x + (1-\alpha)y + W + W \subset \alpha x + (1-\alpha)y + V.$$

Además, $z_1 + z_2 \in \alpha A + (1-\alpha)A = A$ así pues $(\alpha x + (1-\alpha)y + V) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, $\alpha x + (1-\alpha)y \in \text{cl}(A)$ y deducimos que cl(A) es convexo. Observemos que si $A \subset X$ es convexo y equilibrado entonces cl(A) es convexo y equilibrado.

4.- Sea X un espacio normado y consideremos (X, T_w). Sabemos que (X, T_w) es un espacio vectorial topológico. Si $x, y \in X$ y $x \neq y$ existe $f \in X$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Sea $\delta = \frac{1}{3}|f(x) - f(y)|$ y sean $B_1 = B(x; f; j)$, $B_2 = B(y; f; j)$. Si

$z \in B_1 \cap B_2$ sería $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq \frac{2}{3}|f(x) - f(y)|$, lo que no es posible. Por tanto, deducimos que (X, T_w) es T_2. Por otra parte, es posible probar que

$$\mathcal{B}(0) = \{B(f_1, \ldots, f_n; \varepsilon)\varepsilon > 0, \{f_1, \ldots, f_n\} \subset X, n \in \mathbb{N}\}$$

verifica las propiedades (1), (2) y (3) de espacio vectorial topológico y que cada elemento de $\mathcal{B}(0)$ es convexo. Así pues, (X, T_w) es un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo.

Consideremos ahora (X^*, T_{*-w}). Si $f, g \in X^*$ y $f \neq g$ existe $x \in X$ tal que $|f(x) - g(x)| > 0$; entonces, si $\delta = \frac{1}{3}|f(x) - f(y)|$, los conjuntos $B_1 = B(f; x; h)$ y $B_2 = B(g; x; \delta)$ son disjuntos. Esto prueba que (X^*, T_{*-w}) es T_2. Por otra parte, es fácil probar que

$$\mathcal{B}(0) = \{B(x_1, \ldots, x_n : \varepsilon), \varepsilon > 0, \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, n \in \mathbb{N}\}$$

verifica las propiedades (1), (2), (3) y que cada elemento de $\mathcal{B}(0)$ es convexo. Por tanto, (X, T_{*-w}) es un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo.

10.4 El funcional de Minkowski

El **funcional de Minkowski** o **calibrador**: Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$ un conjunto convexo, equilibrado y absorbente. Definimos

$$j_A(x) = inf\{\lambda : \lambda > 0, x \in \lambda A\}.$$

Si $x \in X$, como A es absorbente, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha x \in A$ y por tanto $x \in \frac{1}{\alpha}A$; así pues, existe $j_A(x)$ y será $j_A(x) \geq 0$. A la aplicación $j_A : X \to \mathbb{R}$ así definida se le llama funcional de Minkowski o calibrador.

Si $j_A(x) < 1$ tenemos que existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $x \in \alpha A$. Como A es equilibrado, se tiene $\alpha A \subset A$. Por otra parte, si $x \in A$ es claro que $j_A(x) \leq 1$; así pues

$$\{x : j_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x : j_A(x) \leq 1\}.$$

Demostraremos ahora que j_A es una seminorma en X. Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. De la definición de j_A tenemos que $j_A(x) \geq 0$ y $j_A(0) = 0$. Si $\alpha \neq 0$, para cada $\lambda > 0$ tenemos que, como A es equilibrado, se verifica $\frac{\lambda}{\alpha}A = \frac{\lambda}{|\alpha|}A$. Por tanto,

$$\begin{aligned} j_A(\alpha x) &= inf\{\lambda : \lambda > 0, \alpha x \in \lambda A\} = inf\{\lambda : \lambda > 0, x \in \tfrac{\lambda}{\alpha}A\} \\ &= inf\{\lambda : \lambda > 0, x \in \tfrac{\lambda}{|\alpha|}A\} = |\alpha| inf\{\tfrac{\lambda}{|\alpha|} : \lambda > 0, x \in \tfrac{\lambda}{|\alpha|}A\} = |\alpha| j_A(x). \end{aligned}$$

Sean ahora λ, μ números reales positivos tales que $x \in \lambda A$, $y \in \mu A$; entonces, $x + y \in \lambda A + \mu A$. Como A es convexo, se tiene $\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)A$ y por tanto $j_A(x + y) \leq \lambda + \mu$, de donde podemos deducir que $j_A(x + y) \leq j_A(x) + j_A(y)$.

Supongamos que X está dotado de una topología vectorial. Si la aplicación j_A fuese continua tendremos que $V = \{x : j_A(x) < 1\}$ es abierto y como $0 \in V$ deducimos que A es entorno de cero.

Demostraremos ahora que si A es entorno de 0 entonces j_A es continua, $IntA = \{x \in X : j_A(x) < 1\}$ y $\mathrm{cl}(A) = \{x \in X : j_A(x) \leq 1\}$.

Primero observemos que si p es una seminorma en X y p es continua en 0 entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe U entorno de 0 tal que $p(x) \leq \varepsilon$ si $x \in U$. Si $x, y \in X$ son tales que $x - y \in U$ se verifica $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) \leq \varepsilon$. Por consiguiente, p es uniformemente continua en X.

Veamos que j_A es continua en X. Sea $\varepsilon > 0$; tenemos que εA es entorno de 0 y, si $x \in \varepsilon A$, se tiene $j_A(x) \leq \varepsilon$.

Por ser j_A continua, se verifica que $V = \{x \in X, j_A(x) < 1\}$ es un entorno abierto de 0 y, por tanto, $V \subset Int(A)$. Sea $z \in Int(A)$; tenemos que existe un W entorno de 0 tal que $z \in W \subset Int(A)$ y podemos hallar $\alpha > 0$ tal que $\alpha z \in W$. Entonces, $z + \alpha z \in z + W \subset Int(A) \subset A$. Así pues, $z \in \frac{1}{1+\alpha}A$ y será $j_A(z) \leq \frac{1}{1+\alpha} < 1$. Por tanto $z \in V$ y deducimos que $V = Int(A)$.

Por otra parte, como j_A es continua, se verifica que $C = \{x \in X : j_A(x) \leq 1\}$ es un conjunto cerrado y es claro que $\mathrm{cl}(A) \subset C$. Sea ahora $z \in C$ y sea $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\lim \alpha_n = 1$. Tenemos que $j_A(\alpha_n z) = \alpha_n j_A(z) \leq \alpha_n < 1$ y $\alpha_n z \in V \subset A \subset \mathrm{cl}(A)$ y, como $\mathrm{cl}(A)$ es cerrado, se verifica $\lim \alpha_n z = z \in \mathrm{cl}(A)$. Por tanto $\mathrm{cl}(A) = C$.

Sea ahora X un espacio vectorial y sea p una seminorma en X. Consideremos en X la topología definida por la seminorma p. Puede probarse fácilmente que el conjunto $B = \{x : p(x) < 1\}$ es un entorno de cero que es equilibrado convexo y acotado. Probaremos sólo que B es acotado. En efecto, sea U entorno de cero; entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\{x \in X : p(x) < \alpha\} = \alpha B \subset U$.

En el siguiente teorema veremos que la existencia de algún entorno de cero que sea equilibrado convexo y acotado caracteriza a los espacios vectoriales topológicos que son seminormables (espacios cuya topología coincide con la topología definida por una seminorma).

TEOREMA 10.4.1 *Sea X un espacio vectorial topológico tal que existe un entorno de cero que es convexo equilibrado y acotado. Entonces X es seminormable.*

DEMOSTRACIÓN Sea U un entorno de cero que sea convexo, equilibrado y acotado y sea p el calibrador de U. Demostraremos que la topología T de X coincide con la topología T_p definida por la seminorma p. Sea W un entorno de cero para T. Como U es acotado, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha U \subset W$. Tenemos que $\{x \in X : p(x) < \alpha\} \subset \alpha U \subset W$. Esto prueba que W es un entorno de cero para T_p.

Por otra parte, sabemos que la aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ es continua para la topología T. Por tanto, dado $\alpha > 0$ existe W entorno de cero para T, tal que si $x \in W$ es $p(x) < \alpha$. Es decir, $W \subset \{x : p(x) < \alpha\}$. Esto prueba que $\{x : p(x) < \alpha\}$ es un entorno de cero para la topología T.

Como consecuencia inmediata, se deduce que si X es un espacio vectorial topológico T_2 entonces X es normable si y sólo si existe un entorno de cero que es convexo equilibrado y acotado. ∎

10.5 Consecuencias del teorema de Hahn-Banach

Estudiaremos ahora, en el marco de los espacios vectoriales topológicos, algunos resultados geométricos que se deducen del teorema de Hahn-Banach.

TEOREMA 10.5.1 *Sea X un espacio vectorial topológico. Sea $A \subset X$ un subconjunto no vacío abierto, y convexo. Sea L un subespacio afín de X que no corta a A. Entonces, existe un hiperplano cerrado H tal que $L \subset H$ y $H \cap A = \emptyset$. Si L fuese subespacio vectorial puede escogerse H de modo que H sea hiperplano vectorial*

DEMOSTRACIÓN En un principio vamos a suponer que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Además, estudiaremos primero el caso en que $0 \in A$ (en cuyo caso $0 \notin L$). Definimos $j(x) = inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0, x \in \lambda A\}$. Observemos que, como A es entorno de cero, si $x \in X$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \lambda A$.

Si consideramos los comentarios de la nota anterior, es sencillo comprobar que $j(\alpha x) = \alpha j(x)$, para $\alpha > 0$, y que $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$. Demostraremos que $\{x : j(x) < 1\} = A$.

Si $x \in X$ y $j(x) < 1$, existe un $\alpha > 0$ tal que $j(x) \leq \alpha < 1$ y $x \in \alpha A$. Se tiene entonces $x = \alpha y$ con $y \in A$, y entonces $x = \alpha y + (1 - \alpha) \cdot 0$. Como A es convexo, se tiene que $x \in A$. Por otra parte, si $x \in A$, existe $\varepsilon \in (0, 1)$ tal que $(1 + \varepsilon)x \in A$ y será $j(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Por hipoótesis existe un $x_0 \in X$ y existe un subespacio vectorial F de X de modo que $L = x_0 + F$. Como $A \cap L = \emptyset$, se verifica $j(x_0 + y) \geq 1$ para cada $y \in F$. Además $x_0 \notin F$, ya que de lo contrario será $-x_0 \in F$ y $0 = x_0 + (-x_0) \in L$.

Consideremos $F_0 = F + \mathcal{L}(x_0)$ y definamos la aplicación $f : F_0 \to \mathbb{R}$ por $f(\alpha x_0 + y) = \alpha$. Se verifica que $f(\alpha x_0 + y) \leq j(\alpha x_0 + y)$. En efecto, si $\alpha \leq 0$ es claro que $\alpha \leq j(\alpha x_0 + y)$. Si $\alpha > 0$ es $1 \leq j(x_0 + \frac{y}{\alpha})$ y por tanto $f(\alpha x_0 + y) = \alpha \leq \alpha j(x_0 + \frac{y}{\alpha}) = j(\alpha x_0 + y)$. Observemos que si $x \in L$ es $f(x) = 1$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación $g : X \to \mathbb{R}$ lineal tal que $g(x) \leq j(x)$, para cada $x \in X$, y $g(x) = f(x)$, si $x \in F_0$.

Probaremos que g es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos el conjunto εA. Por ser εA un entorno de cero, existe algún entorno equilibrado W de 0 con $W \subset \varepsilon A$. Si $x \in W$ y $g(x) \geq 0$ se verifica $|g(x)| = g(x) \leq j(x) \leq \varepsilon$ y si $g(x) < 0$ se tiene $|g(x)| = -g(x) = g(-x) \leq j(-x) \leq \varepsilon$, ya que $-x \in W$.

Como g es continua, tenemos que $H = \{x \in X : g(x) = 1\}$ es un hiperplano cerrado de X. Además se verifica que $A = \{x : j(x) < 1\} \subset \{x : g(x) < 1\}$ y se tiene $A \cap H = \emptyset$. Por otra parte es claro que $L \subset H$.

Supongamos ahora el caso en que $0 \in L$; es decir, L es un subespacio vectorial de X. Sea $a \in A$ y consideremos los conjuntos $A' = -a + A$, $L' = -a + L$. Claramente $0 \in A'$ y $A' \cap L' \neq \emptyset$. Reproduciendo los pasos anteriores, podemos afirmar que existe $g : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $L' \subset H' = \{x : g(x) = 1\}$ y $A' \cap H' = \emptyset$ (observemos que $g(-a) = 1$). Entonces, si $x \in L$ se tiene que $-a + x \in L'$ y $g(x) - g(a) = 1$. Por tanto $g(x) = 0$ y $L \subset H = \{x : g(x) = 0\}$, que será un hiperplano vectorial cerrado. Veamos que $H \cap A = \emptyset$. Si $x \in H \cap A$

se tiene $g(-a+x)=1$ y $-a+x \in H'$. Como $x \in A$, resulta que $-a+x \in A'$ y deducimos que $H' \cap A' \neq \emptyset$, en contra de lo probado anteriormente.

En el caso en que $0 \notin A$ y $0 \notin L$, consideremos $b \in L$; entonces $L' = -b+L$ y $A' = -b+A$ son tales que $0 \in L'$ y $L' \cap A' = \emptyset$. Por tanto existe $g : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $L' \subset H' = \{x : g(x) = 0\}$ y $H' \cap A' = \emptyset$. Deducimos así que, si $H = b + H'$, se verifica $L \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$.

Supongamos ahora que X es un espacio vectorial complejo, que A es un subconjunto abierto y convexo y que L es un subespacio afín de X tal que $L \cap A = \emptyset$. Sea $b \in L$, entonces $L' = -b+L$ y $A' = -b+A$ son tales que $0 \in L'$ y $L' \cap A' = \emptyset$. Si $X_{\mathbb{R}}$ es el espacio vectorial real asociado a X es sencillo entender que L' es un subespacio vectorial de $X_{\mathbb{R}}$ y $A' \subset X_{\mathbb{R}}$ es abierto y convexo. Por tanto, existe una aplicación, $g : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que $L' \subset H' = \{x \in X : g(x) = 0\}$ y $A' \cap H' = \emptyset$. Para $x \in X$, sea $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Claramente la aplicación f así definida es lineal y continua de X, como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, en $\mathbb{C}$. Si $x \in L'$ se tiene $g(x) = 0$. Como $ix \in L'$, también será $g(ix) = 0$ y por tanto $f(x) = 0$. Esto significa que $L' \subset M = \{x \in X : f(x) = 0\}$ y además $M \cap A' = \emptyset$, ya que si $z \in M$ y $z \in A'$ será $g(z) - ig(iz) = 0$ y, como $g(z)$ es real, necesariamente tiene que ser $g(z) = 0$; por tanto, $z \in H' \cap A'$. Finalmente observemos que $L = b + L' \subset b + M$ es un hiperplano afín cerrado y que $(b+M) \cap A = \emptyset$, ya que si $z \in (b+M) \cap A$ se tendría que $z - b \in M$, $z - b \in -b + A = A'$, lo que no es posible. ▪

TEOREMA 10.5.2 *Sea X un espacio vectorial topológico real. Sea $A \subset X$ un subconjunto abierto, convexo y no vacío. Sea $B \subset X$ un conjunto convexo y no vacío de modo que $A \cap B = \emptyset$. Existe una aplicación, $f : X \to \mathbb{R}$, lineal y continua y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que*

$$A \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}, \qquad B \subset \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}.$$

DEMOSTRACIÓN Tenemos que el conjunto $C = \bigcup_{z \in B} (A - z) = A - B$ es abierto y convexo. Como C no contiene a $0 \in X$, por el teorema anterior, existe un hiperplano vectorial cerrado H tal que $H \cap C = \emptyset$. Por tanto existe una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $H = \ker f$. Por la convexidad de C podemos suponer que para cada $x \in C$ es $f(x) < 0$. Así pues, para cada $y \in A$ y cada $z \in B$ se tiene $f(y) < f(z)$. Sea $\alpha = inf\{f(z) : z \in B\}$. Tenemos que $f(y) \leq \alpha \leq f(z)$ si $y \in A$, $z \in B$. Observemos que A es abierto y que si existe $y \in A$ tal que $f(y) = \alpha$ tenemos que $\alpha \in f(A)$, que es un conjunto abierto. Por consiguiente, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon \in f(A)$, lo que es contradictorio. Por tanto $A \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}$. Observemos que si B fuese también abierto tendremos que $B \subset \{x \in X : f(x) > \alpha\}$. ▪

NOTA 10.5.3 En relación al teorema anterior, es conveniente recordar los siguientes conceptos.

- Si $A \subset \{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ y $B \subset \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ diremos que el hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ separa A y B.

- Si tenemos $A \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $B \subset \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ diremos que H separa estrictamente A y B.
- A los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ se les llama semiespacios reales.

Ahora veremos un resultado similar al teorema anterior, pero para el caso complejo. Recordemos que si X es un espacio vectorial topológico complejo y $A \subset X$ se dice que A es $\mathbb{C}$-simétrico si para $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, con $|\lambda| = 1$, se tiene que $\lambda x \in A$. Si A es equilibrado es claro que A es $\mathbb{C}$-simétrico. Si A es convexo y $\mathbb{C}$-simétrico entonces A es equilibrado.

TEOREMA 10.5.4 *Sea X un espacio vectorial topológico complejo. Sea $A \subset X$ un conjunto no vacío, abierto, $\mathbb{C}$-simétrico y convexo. Si $B \subset X$ es un conjunto no vacío y convexo de modo que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe una aplicación, $f : X \to \mathbb{C}$, lineal y continua y existe $\alpha > 0$ tales que*

$$A \subset \{x \in X : |f(x)| < \alpha\}, \; B \subset \{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}$$

DEMOSTRACIÓN Tenemos que existe una aplicación, $g : X \to \mathbb{R}$, lineal y continua y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset \{x \in X : g(x) < \alpha\}$ y $B \subset \{x \in X : g(x) \geq \alpha\}$. Como A es $\mathbb{C}$-simétrico y convexo, se tiene $0 \in A$ y $0 = g(0) < \alpha$. Consideremos $f(x) = g(x) - ig(ix)$; entonces, $Ref = g$ y por tanto $|f(x)| \geq Ref(x) \geq \alpha$, si $x \in B$. Sea ahora $x \in A$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$. Entonces, $|f(x)| = f(e^{-i\theta}x) = g(e^{-i\theta}x)$. Como A es $\mathbb{C}$-simétrico, se verifica $e^{-i\theta}x \in A$ y $|f(x)| < \alpha$. ∎

TEOREMA 10.5.5 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2, real y localmente convexo. Sea $A \subset X$ un conjunto convexo, compacto y no vacío. Si $B \subset X$ es un conjunto convexo y cerrado de modo que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe un hiperplano afín cerrado que separa A y B estrictamente.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathcal{B}$ el sistema de todos los entornos abiertos de 0. Veamos que existe $U \in \mathcal{B}$ tal que $(A + U) \cap B = \emptyset$. En caso contrario, para cada $U \in \mathcal{B}$ existirían $x_U \in A$, $y_U \in U$ tales que $x_U + y_U \notin B$. Consideremos en $\mathcal{B}$ la relación $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_2 \subset U_1$. Claramente $(\mathcal{B}, \leq)$ es un conjunto dirigido. Consideremos las redes $\{x_U\}$, $\{y_U\}$, en A y en U respectivamente. Tenemos que $\lim\{y_U\} = 0$ (pues X es T_2) y, por ser A es compacto, existe $\{x_{U'}\}$, subred de $\{x_U\}$, tal que $\lim\{x_{U'}\} = x \in A$. Por tanto, $\lim\{y_{U'} + x_{U'}\} = x$. Como esta última red es de B, que es cerrado, deducimos que $x \in B$, lo cual es una contradicción.

Como X es localmente convexo, existe un entorno de cero W equilibrado y convexo tal que $W \subset U$. Entonces, $j_W(x)$ es una seminorma continua y $\{x \in X : j_W(x) < 1\} \subset W \subset U$. Sea $V = \{x \in X : j_W(x) < \frac{1}{2}\}$. Tenemos que V es entorno abierto y convexo de 0 y que $A_1 = A + V$, $B_1 = B + V$ son conjuntos abiertos convexos. Veamos que son disjuntos. Supongamos que $x = a + x_1 = b + x_2$, con $a \in A$, $b \in B$ y $x_1, x_2 \in V$. Tenemos que $b - a = x_1 - x_2 \in V + V \subset W \subset U$. Entonces $b \in A + W \subset A + U$ y $b \in B$, lo cual es una contradicción. Por otra parte, se tiene que $A \subset A_1$, $B \subset B_1$. Existe una aplicación $f: X \to \mathbb{R}$ lineal y continua y existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $A_1 \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}$, $B_1 \subset \{x \in X : f(x) > \alpha\}$. ∎

Observemos que si, por ejemplo, A fuese equilibrado se verificaría que si $x \in A$ entonces $-x \in A$ y sería $f(-x) < \alpha$. Por tanto, $-\alpha < f(x) < \alpha$ y será $|f(x)| < \alpha$.

TEOREMA 10.5.6 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2, localmente convexo y complejo. Sea $A \subset X$ es un conjunto compacto, convexo y no vacío. Si $B \subset X$ es un conjunto $\mathbb{C}$-simétrico, cerrado y convexo de modo que $A \cap B = \emptyset$, entonces existe una aplicación, $f: X \to \mathbb{C}$, lineal y continua y existe $\alpha > 0$ tales que $A \subset \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$ y $B \subset \{x \in X : |f(x)| < \alpha\}$.*

DEMOSTRACIÓN Es similar a la del teorema 10.5.4. Tenemos que existe una aplicación, $g: X \to \mathbb{R}$, lineal y continua y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $B \subset \{x \in X : g(x) < \alpha\}$ y $A \subset \{x \in X : g(x) > \alpha\}$. Como B es $\mathbb{C}$-simétrico y convexo se tiene $0 \in B$ y $0 = g(0) < \alpha$. Consideremos la aplicación $f(x) = g(x) - ig(ix)$. Entonces, si $x \in A$ es $|f(x)| \geq Ref(x) = g(x) > \alpha$. Sea ahora $x \in B$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$. Entonces, $|f(x)| = f(e^{-i\theta}x) = g(e^{-i\theta}x)$. Como B es $\mathbb{C}$-simétrico se tiene que $e^{-i\theta}x \in B$ y $|f(x)| < \alpha$. ∎

Veremos ahora algunas sencillas consecuencias de las formas geométricas del teorema de Hahn-Banach.

COROLARIO 10.5.7 *Sea X un espacio vectorial topológico real. Sea $A \subset X$ un conjunto abierto y convexo y sea $x_0 \notin A$. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y existe una aplicación, $f: X \to \mathbb{R}$, lineal y continua tales que $f(x_0) = \alpha$ y $A \subset \{x \in X : f(x) < \alpha\}$.*

En efecto, basta aplicar el teorema 10.5.2 para A y $B = \{x_0\}$. En esta situación, si además A fuese equilibrado tendremos que si $x \in A$ es $-x \in A$ y $f(-x) < \alpha$. Así pues, $-\alpha < f(x) < \alpha$ y $|f(x)| < \alpha$. Obsérvese que en este caso sería $\alpha > 0$.

COROLARIO 10.5.8 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2, real y localmente convexo. Sea $B \subset X$ un conjunto cerrado y convexo y sea $x_0 \notin B$. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y existe una aplicación, $f: X \to \mathbb{R}$, lineal y continua tales que $f(x_0) > \alpha$ y $f(x) < \alpha$ si $x \in B$.*

En efecto, basta aplicar el teorema 10.5.5 para $A = \{x_0\}$ y B. Observemos que, en esta situación, si además es B equilibrado tenemos que si $x \in B$ es $-x \in B$ y $f(-x) < \alpha$ así pues $|f(x)| < \alpha$.

COROLARIO 10.5.9 *Sea X un espacio vectorial topológico complejo. Sea $A \subset X$ un conjunto no vació, abierto, $\mathbb{C}$-simétrico y convexo y sea $x_0 \notin A$. Existe $\alpha > 0$ y existe una aplicación, $f: X \to \mathbb{C}$, lineal y continua tales que $A \subset \{x \in X : |f(x)| < \alpha\}$ y $|f(x_0)| \geq \alpha$.*

Esto es consecuencia del teorema 10.5.4, tomando $B = \{x_0\}$.

COROLARIO 10.5.10 *Sea X un espacio vectorial topológico complejo T_2 y localmente convexo y sea $B \subset X$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo $\mathbb{C}$ simétrico. Si $x_0 \notin B$, entonces existe $\alpha > 0$ y existe una aplicación, $f: X \to \mathbb{C}$, lineal y continua tales que $|f(x_0)| > \alpha$ y $|f(x)| < \alpha$ si $x \in B$.*

Esto es consecuencia del teorema 10.5.6, tomando $A = \{x_0\}$.

COROLARIO 10.5.11 *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Sea $F \subset X$ un subespacio vectorial y sea $f : F \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua, entonces existe $g : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $g = f$ en F.*

Por la continuidad de f en F existe un entorno abierto U de 0 que es equilibrado y convexo y tal que si $x \in U \cap F$ es $|f(x)| < 1$. Sea j el calibrador de U. Tenemos que j es una seminorma sobre X que verifica que $U = \{x \in X : j(x) < 1\}$. Sea $x \in F$. Si fuese $j(x) < |f(x)|$ tendríamos que $j\left(\frac{1}{|f(x)|}x\right) < 1$, por tanto $\frac{1}{|f(x)|}x \in U$ y sería $\frac{1}{|f(x)|}|f(x)| < 1$, lo cual es contradictorio. Así pues, $|f(x)| \leq j(x)$, para cada $x \in F$, y existe una aplicación, $g : X \to \mathbb{K}$, lineal tal que $g = f$ en F y $|g(x)| \leq j(x)$, para $x \in X$. Como g es lineal y es tal que transforma a U, que es entorno de 0, en un conjunto acotado, tenemos que g es continua.

COROLARIO 10.5.12 *Sea X un espacio vectorial y sea p una seminorma en X. Dado $z \in X$ existe una aplicación, $g : X \to \mathbb{K}$, lineal tal que $|g(x)| \leq p(x)$, para $x \in X$, y $g(z) = p(z)$.*

En efecto, sea $F = \mathcal{L}(z)$ y sea $f : F \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $f(\lambda z) = \lambda p(z)$. Claramente, f es lineal y para cada $x = \lambda z \in F$ se verifica $|f(x)| = |\lambda| p(z) = p(\lambda z) = p(x)$. Por tanto, existe una aplicación, $g : X \to \mathbb{K}$, lineal tal que $|g(x)| \leq p(x)$, para $x \in X$, y $g(x) = f(x)$, para $x \in F$. Por consiguiente, $g(z) = p(z)$.

De este resultado vamos a deducir el siguiente:

COROLARIO 10.5.13 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo. Si $z \in X$ es tal que para cada aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua es $f(z) = 0$ entonces $z = 0$.*

En efecto, si $z \neq 0$ entonces existe un entorno de cero U, abierto, equilibrado y convexo, tal que $z \notin U$. Sea $j(x)$ el calibrador de U. Tenemos que $j(z) \geq 1$. Sea $g : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal tal que $|g(x)| \leq j(x)$ si $x \in X$ y $g(z) = j(z) \geq 1$. Tenemos que g transforma U, que es entorno de cero, en un conjunto acotado y, por tanto, g es continua.

COROLARIO 10.5.14 *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo. Sea $F \subset X$ subespacio vectorial. Si Y es un espacio vectorial topológico T_2 de dimensión finita y $f : F \to Y$ es una aplicación lineal y continua, entonces existe una aplicación, $g : X \to Y$, lineal y continua tal que $g = f$ en F.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de Y y definimos la aplicación $\varphi : Y \to \mathbb{K}^n$ por $\varphi(y^1 e_1 + \cdots + y^n e_n) = (y^1, \ldots, y^n)$. Tenemos que φ es un isomorfismo. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $q_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $q_i(x^1, \ldots, x^n) = x^i$ y sea $f_i : F \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $f_i = q_i \varphi f$. Tenemos que f_i es lineal y continua y, por tanto, existe una aplicación $g_i : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, tal que $g_i = f_i$ en F. Consideremos la aplicación $g : X \to Y$ definida por $g(x) = g_1(x)e_1 + \cdots + g_n(x)e_n$. Es claro que g es lineal y continua y que $g = f$ en F. ■

Sea X un espacio vectorial topológico T_2. En su momento se demostró que si $F \subset X$ es un subespacio vectorial de dimensión finita entonces F tiene complemento topológico. Veremos ahora otra demostración. Como F es T_2 y de dimensión finita, para la aplicación $f : F \to F$ (donde f es la identidad) existe una aplicación $g : X \to F$, lineal y continua, tal que $g = f$ en F. Esto prueba que F tiene complemento topológico.

TEOREMA 10.5.15 *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo y T_2. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ un sistema linealmente independiente y sea $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathbb{K}$. Entonces, existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, tal que $f(x_i) = \alpha_i$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

En efecto, sea $F = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y definimos la aplicación $g : F \to \mathbb{K}$ por $g(x_i) = \alpha_i$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que g es lineal y continua, por ser F de dimensión finita y T_2. Entonces existe una aplicación, $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua tal que $f = g$ en F.

Si ahora es Y un espacio vectorial topológico T_2 y si $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset Y$, entonces existe una aplicación, $f : X \to Y$, lineal y continua tal que $f(x_i) = y_i$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. En efecto, definimos $h : F \to Y$ por $h(x_i) = y_i$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como h es lineal y continua y su imagen es de dimensión finita, existe una aplicación $f : X \to Y$, lineal y continua, tal que $f = h$ en F.

COROLARIO 10.5.16 *Si X es un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo de dimensión infinita entonces X^* es también de dimensión infinita, donde X^* es el espacio vectorial de las aplicaciones $f : X \to \mathbb{K}$ lineales y continuas.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un sistema libre $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ y, para $j \in \{1, \ldots, n\}$, existe $f_j \in X^*$ tal que $f_j(x_i) = \delta_{ij}$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset X^*$; además es un conjunto libre, ya que si $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ entonces $(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)(x_i) = \lambda_i = 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. ■

10.6 Envolturas cerradas y convexas y envolturas equilibradas

Sea X un espacio vectorial topológico. Si $A \subset X$ denotamos por $\overline{co}(A) = \mathrm{cl}(co(A))$, este conjunto se denomina **envoltura convexa cerrada de** A. Este conjunto es cerrado y convexo. Es claro que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua donde $f(x) \leq \alpha$, para cada $x \in A$, entonces es $f(x) \leq \alpha$, para cada $x \in \overline{co}(A)$. Por tanto si $x_0 \in \overline{co}(A)$ se tiene $f(x_0) \leq sup\{f(x) : x \in A\}$.

Supongamos que X es localmente convexo y T_2. Sea $A \subset X$ y sea $x_0 \in X$ un punto con la propiedad de que para cada aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua con $f(x) \leq 1$, para $x \in A$, se verifica $f(x_0) \leq 1$. Entonces $x_0 \in \overline{co}(A)$.

En efecto, supongamos que $x_0 \notin \overline{co}(A)$. Como $B = \{x_0\}$ es compacto y convexo, existe una aplicación $g : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) < \alpha$, para $x \in \overline{co}(A)$, y $g(x_0) > \alpha$. Tomando $f = \frac{1}{\alpha}g$ obtenemos una contradicción.

De manera análoga se demuestra que si para cada $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua es $f(x_0) \leq sup\{f(x) : x \in A\}$ entonces $x_0 \in \overline{co}(A)$.

Sea X un espacio vectorial. Si $A \subset X$ denotamos por $[A]$ al menor conjunto equilibrado que contiene a A. Es claro que este conjunto será la intersección de todos los conjuntos equilibrados que contienen a A. Al conjunto $[A]$ se le denomina **envoltura equilibrada** de A y se verifica que

$$[A] = \{\lambda x : x \in A, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\}.$$

Es fácil probar que si A es equilibrado entonces $co(A)$ es equilibrado. Dado $A \subset X$ el conjunto $co([A])$ es equilibrado y convexo y se denomina **envoltura equilibrada y convexa** de A.

Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo T_2 y sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua tal que $|f(x)| \leq \alpha$ para $x \in A$. Si $z \in [A]$ se verifica que se puede escribir $z = \lambda x$ con $|\lambda| \leq 1$ y $x \in A$. Por tanto, $|f(z)| = |\lambda||f(x)| \leq \alpha$; así pues, se deduce fácilmente que si $z \in \overline{co}([A])$ es $|f(z)| \leq \alpha$.

Recíprocamente, *supongamos que $x_0 \in X$ es tal que se verifica $|f(x_0)| \leq \alpha$, para cada aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua y tal que $|f(x)| \leq \alpha$, para $x \in A$. Entonces se verifica que $x_0 \in \overline{co}([A])$.*

En efecto, en caso contrario será $x_0 \notin \overline{co}([A])$ y existirá una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, y existirá un $\beta > 0$ tales que $f(x_0) = \beta$ y $|f(x)| < \beta$, para $x \in \overline{co}([A])$. Sea $g = \frac{\alpha}{\beta}f$, se tiene entonces que $g(x_0) = \alpha$ y $|g(x)| < \alpha$, para $x \in A$, lo cual es contradictorio.

TEOREMA 10.6.1 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo y sea $F \subset X$ un subespacio vectorial. Si $B \subset X$ entonces $B \subset cl(F)$ si y sólo si para cada aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $f(F) = \{0\}$ se verifica que $f(B) = 0$.*

En efecto, si la aplicación $f : X \to \mathbb{K}$ es lineal y continua y $f(F) = 0$ entonces es claro que $f(\mathrm{cl}(F)) = 0$ y, por tanto, $f(B) = 0$. Por otra parte, si B no está contenido en F, existe $x_0 \in B$ tal que $x_0 \notin \mathrm{cl}(F)$. Como $\mathrm{cl}(F)$ es un subespacio vectorial cerrado, $\mathrm{cl}(F)$ es un conjunto equilibrado, convexo y cerrado; por tanto, existe una aplicación $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, tal que $|f(x)| < 1$, para $x \in F$, y $|f(x_0)| > 1$. Por tanto, $f_B \neq 0$. Si existe algún $x \in F$ tal que $f(x) = \alpha \neq 0$ existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(nx)| = n|\alpha| > 1$, lo que no es posible ya que $nx \in F$. Por consiguiente, $f(F) = \{0\}$.

Como consecuencia de este último resultado deducimos que *si X es un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo y si $F \subset X$ es un subespacio vectorial, entonces F es denso en X si y sólo si para cada aplicación, $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua tal que $f(F) = 0$ se verifica que $f = 0$.*

TEOREMA 10.6.2 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo. Sea $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Entonces $\overline{co}(A)$ es la intersección M de los semiespacios reales cerrados que contienen a A.*

En efecto, es claro que si F es un semiespacio real cerrado con $A \subset F$ será $\overline{co}(A) \subset F$. Así pues, $\overline{co}(A) \subset M$. Recíprocamente, si $x_0 \notin \overline{co}(A)$ sabemos que existe un hiperplano real cerrado tal que un semiespacio contiene a $\{x_0\}$ y otro a $\overline{co}(A)$; es claro que entonces $x_0 \notin M$.

10.7 Puntos extremos. El teorema de Krein-Milman

Sea X un espacio vectorial. Sea $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, y sea E un subconjunto no vacío de K. Se dice que E es **subconjunto extremal de** K si para cada $x, y \in K$ y cada $\alpha \in (0,1)$ la relación $\alpha x + (1-\alpha)y \in E$ implica que $x, y \in E$.

Se llama **punto extremo de** K a aquel punto $x_0 \in K$ tal que $\{x_0\}$ es un conjunto extremal de K. Es decir, $x \in K$ es punto extremo de K si para cada $\alpha \in (0,1)$ y cada $y, z \in K$ la relación $x = \alpha y + (1-\alpha)z$ implica que $x = y = z$. El conjunto de los puntos extremos de K será denotado por Ext K.

Supongamos que E es extremal en un conjunto convexo K y que se tiene que los conjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset (0,1)$ son tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in E$. Entonces $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$.

En efecto, sea $j \in \{1, \ldots, n\}$; tenemos que $\sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_j} x_i \in K$. Por tanto, como

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_j x_j + (1-\alpha_j) \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_j} x_i$, deducimos que $x_j \in K$.

Supongamos que E_1 es un conjunto extremal de K y que $E_2 \subset E_1$ es un conjunto extremal de E_1. Se verifica que E_2 es extremal de K. En efecto, sean $x, y \in K$ y $\alpha \in (0,1)$ tales que $\alpha x + (1-\alpha)y \in E_2$. Como $E_2 \subset E_1$, se verifica que $x, y \in E_1$, por ser E_1 conjunto extremal de K. Como E_2 es un conjunto extremal en E_1, se tiene que $x, y \in E_2$.

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el cuadrado centrado en el origen que denotamos por K. Es claro que la frontera es un subconjunto extremal de K y los correspondientes vértices son los únicos puntos extremos de K, cada uno de los lados es también un subconjunto extremal de K.

A los subconjuntos extremales de un conjunto convexo se les llama **caras**. Dos caras F y F' de un conjunto convexo K se dice que son complementarias si $F \cap F' = \emptyset$ y si $x \in K - (F \cup F')$ entonces existe un único $y \in F$ y un único $z \in F'$ tal que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, donde $\lambda \in (0,1)$. Si F es una cara de un conjunto convexo K se verifica que Ext $F \subset$ Ext K.

TEOREMA 10.7.1 *Sea X un espacio vectorial topológico y sea $K \subset X$ un conjunto no vacío compacto y cerrado. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua y si*

$\beta = sup\{f(x) : x \in K\}$ se verifica que $E = \{x \in K : f(x) = \beta\}$ es un subconjunto no vacío, cerrado, compacto y extremal de K.

DEMOSTRACIÓN Como K es compacto y f es continua, se verifica que $E \notin \emptyset$. Además, E es cerrado y compacto. Supongamos que $x_0 \in E$ es tal que $x_0 = \alpha x + (1-\alpha)y$, donde $\alpha \in (0,1)$, $x, y \in K$. Tenemos que $f(x) \leq \beta$ y $f(y) \leq \beta$. Si alguna de las desigualdades fuese estricta deduciríamos que $f(x_0) < \beta$; así pues $f(x) = f(y) = \beta$ y será $x, y \in E$. ∎

Observemos que si f es constante en K entonces es $E = K$. Además si X fuese T_2 sólo necesitaríamos suponer que K es compacto.

TEOREMA 10.7.2 *Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo y sea $K \subset X$ un conjunto compacto y no vacío. Entonces K tiene al menos un punto extremo.*

DEMOSTRACIÓN Sea S la colección de los subconjuntos compactos extremales de K. Claramente $S \neq \emptyset$, pues $K \in S$. Consideremos en S el siguiente orden parcial $E_1 \leq E_2$ si y sólo si $E_1 \supset E_2$. Sea $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ una cadena en S entonces $\bigcap\{E_\alpha : \alpha \in I\} = E_0$ es un subconjunto compacto extremal de K y es claro que $E_\alpha \leq E_0$, para cada $\alpha \in I$. Por tanto, E_0 es cota superior de la cadena. Por el lema de Zörn, existe en S algún elemento E que será maximal. Entonces, E no tiene subconjunto que sea propio, compacto y extremal; por tanto, si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua tiene que ser f constante en E y deducimos que E tiene que ser unitario. ∎

TEOREMA 10.7.3 **[Teorema de Krein-Milman]**

Sea X un espacio vectorial topológico T_2 y localmente convexo. Sea $K \subset X$ un conjunto no vacío y compacto. Se verifica que K está contenido en la envoltura convexa y cerrada de sus puntos extremos. En particular, si K es convexo y compacto tendremos que K es igual a la envoltura cerrada y convexa de sus puntos extremos.

DEMOSTRACIÓN Sea Ext K el conjunto de los puntos extremos de K, que sabemos que es no vacío. Si existe $a \in K$ tal que $a \notin \overline{co}(\text{Ext } K)$, sabemos, por el teorema anterior, que existe una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que $sup\{f(x) : x \in \overline{co}(\text{Ext } K)\} < f(a)$. Sea $\beta = sup\{f(x) : x \in K\}$ y sea $E = \{x \in K : f(x) = \beta\}$. Es claro que $E \cap \overline{co}(\text{Ext } A) = \emptyset$. Como E es no vacío y es un compacto contenido en K, tiene algún punto extremo, que lo será también de K. Esto significa que $E \cap \text{Ext } K \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $K \subset \overline{co}(\text{Ext } K)$. Si además K fuese convexo tendríamos que $\overline{co}(\text{Ext } K) \subset K$ y por consiguiente $K = \overline{co}(\text{Ext } K)$. ∎

NOTA 10.7.4 1.- Si X es un espacio normado, entonces Ext $B_{X^*} \neq \emptyset$ y además $\overline{co}^{*-w}$ (Ext $B_{X^*}) = B_{X^*}$, ya que B_{X^*} es compacto en (X^*, T_{*-w}).

2.- Sobre el principio del mínimo de Bauer.

Para abordar convenientemente el principio del mínimo de Bauer, necesitaremos algunos conceptos preliminares.

Sea X un espacio vectorial y sea $A \subset X$ un subconjunto convexo. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una aplicación. Se dice que f es **convexa** si para cada $x, y \in C$ y cada $\lambda \in [0,1]$ se verifica que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Se dice que f es **cóncava** si $-f$ es convexa. Esto sucederá si para cada $x, y \in C$ y cada $\lambda \in [0,1]$ se verifica que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Sea X un espacio topológico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación. Se dice que f es **semicontinua superior** en $x_0 \in X$ si dado $\varepsilon > 0$ existe U_{x_0}, entorno de x_0, tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ si $x \in U_{x_0}$. Se dice que f es semicontinua superior en X si f es semicontinua superior en cada $x_0 \in X$. Es sencillo comprobar que son equivalentes:

i.- f es semicontinua superior en X.

ii.- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es abierto.

iii.- Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica que el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es cerrado.

Se dice que f es **semicontinua inferior** en $x_0 \in X$ si la aplicación $-f$ es semicontinua superior en x_0.

Vamos a demostrar que *si f es semicontinua superior en X y X es compacto entonces f está acotada superiormente en X y además alcanza el supremo.*

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $M = \{x \in X : f(x) \geq n\}$. Tenemos que M_n es cerrado y $\cap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \emptyset$. Así pues, existe $F \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\cap_{i\in F} M_i = \emptyset$. Si $m = \max F$, se verifica que $\cap_{i\in F} M_i = M_m = \emptyset$. Por tanto, si $x \in X$ es $f(x) < m$.

Sea $\beta = \sup\{f(x) : x \in X\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = \{x \in X : f(x) \geq \beta - \frac{1}{n}\}$. Tenemos que F_n es cerrado y, si $F \in \mathbb{N}$ es finito, es claro que $\cap_{i\in F} F_i \neq \emptyset$. Así pues, $\cap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$ y se deduce que $\{x \in X : f(x) = \beta\}$ es distinto del vacío.

De forma similar se demostraría que *si X es compacto y $f : X \to \mathbb{R}$ es semicontinua inferior en X entonces f está acotada inferiormente en X y f alcanza el ínfimo.*

El principio del mínimo de Bauer afirma lo siguiente:

Sea X un espacio vectorial topológico real, localmente convexo y T_2. Sea $A \subset X$ un conjunto compacto y convexo. Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una aplicación semicontinua inferior y cóncava en A entonces f alcanza su mínimo en un punto extremo de A.

Veamos la demostración: sea $\beta = \inf\{f(x) : x \in X\}$: tenemos que $\{x \in A : f(x) = \beta\} = \{x \in A : f(x) \leq \beta\}$. Por consiguiente, $M = \{x \in A : f(x) = \beta\}$ es cerrado y por tanto M es compacto.

Veamos que M es extremal. Sean $x, y \in K$ y $\lambda \in (0,1)$ tales que $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$. Tenemos que

$$\beta = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq \lambda\beta + (1-\lambda)\beta = \beta$$

y deducimos que $\beta = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Como $f(x) \geq \beta$ y $f(y) \geq \beta$, tenemos que necesariamente es $f(x) = \beta$ y $f(y) = \beta$. Por tanto, por ser M es compacto y extremal en A, tenemos que $\operatorname{Ext} M \neq \emptyset$ y, para $x \in \operatorname{Ext} M$, deducimos que $x \in \operatorname{Ext} A$. Por consiguiente, el principio de Bauer ha quedado probado.

De manera similar se demostraría que *si f es semicontinua superior y convexa en A entonces f alcanza su máximo en un punto extremo de A.*

Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua entonces f, sobre cada conjunto compacto convexo, alcanza tanto su máximo como su mínimo en algún punto extremo del mismo.

3.- Sea X un espacio normado tal que $\dim X = n$. Sea $A \subset X$ un conjunto acotado, recordemos que el teorema de Carathéodory afirma que *si $x \in co(A)$ entonces existen $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset A$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\} \subset [0,1]$ de modo que*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i = x.$$

Demostraremos ahora que *si $A \subset X$ es compacto entonces $co(A)$ es compacto.* Consideremos el compacto $[0,1]^{n+1}$ y sea h la aplicación de $[0,1]^{n+1}$ en $\mathbb{R}$ definida por $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}$. Es claro que h es continua. Por tanto el conjunto

$$M = h^{-1}(\{1\}) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} : \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1\}$$

es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Consideremos la aplicación $\varphi : M \times A^{n+1} \to \mathrm{co}(A)$ definida por $\varphi((\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}), (a_1, \ldots, a_{n+1})) = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{n+1} a_{n+1}$. Es sencillo comprobar que φ es continua y, del teorema de Carathéodory, se deduce que φ es sobreyectiva. Por tanto $\mathrm{co}(A)$ es compacto.

Demostraremos ahora que *si $A \subset X$ es un conjunto acotado entonces $\overline{co}(A) = co(\overline{A})$.*

En efecto, tenemos que $\overline{A}$ es compacto y por tanto $\mathrm{co}(\overline{A})$ es compacto. Como $A \subset \mathrm{co}(\overline{A})$ se deduce que $\overline{\mathrm{co}}(A) \subset \mathrm{co}(\overline{A})$. Por otra parte, tenemos que $A \subset \mathrm{co}(A)$; así pues $\overline{A} \subset \overline{\mathrm{co}}(A)$ y se deduce que $\mathrm{co}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{co}}(A)$.

4- No estamos en condiciones de probar el teorema de Krein-Smulian que afirma que *si X es un espacio de Banach y $K \subset X$ es débil compacto entonces $\overline{co}^w(k) = \overline{co}(k)$ es débil compacto* (esto será probado en el próximo capítulo).

No obstante, probaremos aquí el teorema de Mazur que afirma que *si $K \subset X$ es compacto entonces $\overline{co}(K)$ es compacto.*

Como en un espacio métrico un conjunto es compacto si y sòlo si es precompacto y completo, demostraremos que $\overline{\mathrm{co}}(K)$ es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ tal que $\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \frac{\varepsilon}{4}) \supset K$. Tenemos que $\mathrm{co}(x_1, \cdots, x_n)$ es un conjunto cerrado y acotado en $\mathcal{L}(x_1, \cdots, x_n)$. Por tanto, este conjunto es compacto y existirán $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \mathrm{co}(x_1, \ldots, x_n)$ tales que

$$co(x_1, \ldots, x_n) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_j, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Si $t \in \overline{co}(K)$ existe $z \in co(K)$ tal que $\|t - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Supongamos que $z = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l$, donde $\{u_1, \ldots, u_l\} \subset k$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset [0,1]$ con $\sum_{p=1}^{l} \alpha_p = 1$. Para cada $p \in \{1, \ldots, l\}$, sea $j(p) \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\|u_p - x_{j(p)}\| < \varepsilon/4$. De esta forma,

$$\|z - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p u x_{j(p)}\| = \|\sum_{p=1}^{l} \alpha_p (u_p - x_{j(p)})\| \leq \sum_{p=1}^{l} \alpha_p \|u_p - x_{j(p)}\| \leq \varepsilon/4.$$

Como $\sum_{p=1}^{l} \alpha_p x_{j(p)} \in \mathrm{co}(x_1 \ldots x_n)$, existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|\sum_{p=1}^{l} \alpha_p x_{j(p)} - y_i\| < \varepsilon/4$. Entonces

$$\|t - y_i\| \leq \|t - z\| + \|z - \sum_{p=1}^{l} \alpha_p u_{j(p)}\| + \|\sum_{p=1}^{l} \alpha_p u_{j(p)} - y_i\| < \varepsilon$$

y podemos afirmar que $\overline{co}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \varepsilon)$.

5.- Supongamos ahora que X es un espacio vectorial topológico T_2 tal que $B_X = \overline{co}(A)$, donde $A \subset X$ es finito. Demostraremos que X es finito dimensional.

Tenemos que $\mathcal{L}(A)$ es cerrado en X y, como $\mathrm{co}(A) \subset \mathcal{L}(A)$, deducimos que $B_X \subset \mathcal{L}(A)$. Por tanto, $X = \mathcal{L}(A)$.

Desde este resultado es sencillo deducir que *un espacio normado X tal que Ext B_X sea finito no puede ser isométricamente isomórfico al dual de otro espacio normado.*

6.- *Sea X un espacio vectorial topológico y sean $K_1, \ldots, K_n$ n subconjuntos compactos convexos no vacíos de X. Se verifica que $M = co(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$ es compacto.*

En efecto, cada elemento de M puede escribirse en la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ donde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $x_i \in K_i$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\alpha} x_i^{\alpha}\right)_{\alpha \in I}$$

una red de M. Como cada K_i es compacto y $[0,1]$ es también compacto, existe cierta subred $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\beta} x_i^{\beta}\right)_{\beta \in J}$ tal que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ es $x_i^0 \in \lim_{\beta \in J} x_i^{\beta}$, donde $x_i^0 \in K_i$ y además $\lim_{\beta \in J} \lambda_i^{\beta} = \lambda_i^0$ con $\lambda_i^0 \in [0,1]$. Como la aplicación

$h : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ definida por $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ es continua, deducimos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 = 1$. Tenemos así que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_1^0 x_i^0 \in \lim_{\beta \in J} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\beta x_i^\beta .$$

Esto prueba que M es compacto.

7.- Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo y T_2. Sea K un subconjunto compacto no vacío de X tal que $\overline{\text{co}}(K)$ es también compacto. Entonces Ext $\overline{\text{co}}(K) \subset$ Ext K.

En efecto, sea $e \in$ Ext $\overline{\text{co}}(K)$. Es claro que basta con probar que $e \in K$ y para esto será suficiente con demostrar que si U es entorno de cero entonces $(e + U) \cap K \neq \emptyset$.

Sea V entorno de cero equilibrado y convexo tal que $\overline{V} \subset U$. De la compacidad de K se deduce que existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ tal que $K \subset \cup_{i=1}^{n} (x_i + V)$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $K_i = \overline{\text{co}}(K \cap (x_i + \overline{V}))$. Tenemos que K_i es compacto, ya que es un subconjunto cerrado del compacto $\overline{co}(K)$ y deducimos que:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} (K \cap (x_i + \overline{V})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i .$$

Por tanto, $\overline{\text{co}}(K) = \overline{\text{co}}(K_1 \cup \cdots \cup K_n) = \text{co}(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$.

Como $e \in$ Ext $\overline{\text{co}}(K)$, tenemos que existen $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\{z_1, \cdots, z_n\}$ tales que $z_i \in K_i$, para $i \in \{1, \cdots, n\}$, y $e = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x z_i$. Por tanto, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $e = z_j$. Así pues,

$$e \in K_j = \overline{\text{co}}(K \cap (x_j + V)) \subset x_j + \overline{V} = x_j - \overline{V}.$$

Por tanto, $x_j \in (e + \overline{V}) \cap K$ y esto concluye la demostración.

Supongamos ahora que A es un subconjunto no vacío de X tal que $\overline{\text{co}}(A)$ es compacto. Probaremos que entonces Ext $\overline{\text{co}}(A) \subset \overline{A}$. En efecto, tenemos que $\overline{A}$ es compacto y es sencillo comprobar que $\overline{\text{co}}(A) = \overline{\text{co}}(\overline{A})$; por tanto, Ext $\overline{\text{co}}(A) \subset$ Ext $\overline{A}$.

Finalmente, si X es un espacio normado y $A \subset X^*$ es acotado entonces, de lo anterior, se deduce que Ext $\overline{\text{co}}^{*-w}(A) \subset$ Ext $\overline{A}^{*\ w}$.

Tema 11

Compacidad débil y aplicaciones lineales que alcanzan la norma

11.1 Teoremas de Grothendieck y de Goldstine

TEOREMA 11.1.1 **[Teorema de Grothendieck]**

Sea X un espacio normado. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $K \subset \overline{co}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $2K \subset \displaystyle\bigcup_{x\in 2K} B\left(x, \frac{1}{4}\right)$. Por tanto, existen $x_1, \cdots, x_{n(1)}$ $\in 2K$ tales que $2K \subset B(x_1, \frac{1}{4}) \cup \cdots \cup B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})$.

Consideremos el compacto

$$K_2 = \left\{[2K \cap B(x_1, \frac{1}{4})] - \{x_1\}\right\} \cup \cdots \cup \left\{[2K \cap B(x_{n(1)}, \frac{1}{4})] - \{x_{n(1)}\}\right\}.$$

Como $2K_2 \subset \displaystyle\bigcup_{x\in 2K_2} B(x, \frac{1}{16})$, existen $x_{n(1)+1}, \cdots, x_{n(2)}$ en $2K_2$ tales que las correspondientes bolas centradas en ese punto y de radio $\frac{1}{16}$ recubren a $2K_2$. Observemos que, para $i \in \{n(1)+1, \cdots, n(2)\}$, se tiene $x_i \in 2K_2$ y por tanto existe un $j \in \{1, \ldots, n(1)\}$ tal que $\frac{1}{2}x_i \in \{[2K \cap B(x_j, \frac{1}{4})] - \{x_j\}\}$. Por tanto, $\frac{1}{2}x_i = z - x_j$, donde $z \in 2K \cap B(x_j, \frac{1}{4})$. Esto prueba que $\|z - x_j\| \leq \frac{1}{4}$ y $\|x_i\| \leq \frac{1}{2}$.

Consideremos el compacto

$$K_3 = \left\{[2K_2 \cap B(x_{n(1)+1}, \frac{1}{16})] - \{x_{n(1)+1}\}\right\} \cup \cdots \cup \left\{(2K_2 \cap B(x_{n(2)}, \frac{1}{16})] - \{x_{n(2)}\}\right\}.$$

De manera análoga a la anterior, podemos obtener $x_{n(2)+1}, \cdots, x_{n(3)}$ en $2K_3$ de modo que las bolas centradas en estos puntos y de radio $\frac{1}{64}$ recubren a $2K_3$.

De esta manera obtenemos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Sea $x \in K$. Se tiene $2x \in 2K$ y existe $i(1) \in \{1, \ldots, n(1)\}$ tal que $2x \in B(x_{i(1)}, \frac{1}{4})$. Por consiguiente $2x - x_{i(1)} \in K_2$ y $4x - 2x_{i(1)} \in 2K_2$ y existe $i_2 \in \{n(1)+1, \ldots, n(2)\}$ tal que $4x - 2x_{i(1)} \in B(x_{i(2)}, \frac{1}{16})$. Además, $4x - 2x_{i(1)} - x_{i(2)} \in K_3$ y tendremos que $8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} \in 2K_3$. Razonando de igual manera obtenemos $i(3) \in \{n(2)+1, \ldots, n(3)\}$ tal que $8x - 4x_{i(1)} - 2x_{i(2)} \in B(x_{i(3)}, \frac{1}{64})$ y tendremos que $16x - 8x_{i(1)} - 4x_{i(2)} - 2x_{i(3)} \in 2K_4$. Observemos entonces que:

$$\begin{aligned}
z_1 &= x - \frac{1}{2}x_{i(1)} \in \frac{1}{2}K_2, & \|z_1\| \leq \frac{1}{8}\\
z_2 &= x - \frac{1}{2}x_{i(1)} - \frac{1}{4}x_{i(2)} \in \frac{1}{4}K_3, & \|z_2\| \leq \frac{1}{8^2}\\
z_3 &= x - \frac{1}{2}x_{i(1)} - \frac{1}{4}x_{i(2)} - \frac{1}{8}x_{i(3)} \in \frac{1}{8}K_4, & \|z_3\| \leq \frac{1}{8^3}
\end{aligned}$$

Así pues, $\lim z_n = 0$ y podemos afirmar que $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_{i(k)}$. Esto prueba que $x \in \overline{co}(x_{i(1)}, x_{i(2)}, \ldots) \subset \overline{co}(x_n)$. ∎

NOTA 11.1.2 Quizás esta nota aclare el final de la anterior demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto acotado y denotamos por $s\,\mathrm{co}(A)$ el conjunto de los $x \in X$ que se pueden expresar como serie convexa de elementos de A, (envoltura serie convexa de A) tenemos que $\mathrm{co}(A) \subset s\,\mathrm{co}(A)$ y probaremos que $s\,\mathrm{co}(A) \subset \overline{\mathrm{co}}(A)$.

En efecto, sea $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, donde $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset A$ y $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$ con $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $M > 0$ tal que $\|x\| < M$ si $x \in A$. Como $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_1$ se verifica $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i\right| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Existe también un $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $n \geq n_2$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > \max(n_1, n_2)$ y consideremos $z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m + \left(\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i\right) x_{m+1}$. Tenemos que $z \in \mathrm{co}(A)$ y

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i - z\| = \|\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i x_i - \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \alpha_i\right) x_{m+1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} M = \varepsilon.$$

En realidad lo que afirma el teorema anterior es que $s\,\mathrm{co}(x_n : n \in \mathbb{N}) \supset K$.

Obsérvese que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ que hemos obtenido es compacto. Por tanto, también podemos afirmar que todo compacto está contenido en la envoltura serie convexa de un conjunto compacto y numerable.

TEOREMA 11.1.3 *Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S_X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica*

$$d\left(x_{n+1}\,,\ \mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) \geq 1.$$

En particular, se verifica que si $n \neq m$ es $d(x_n, x_m) \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN Sean $x_1 \in S_X$ y $F_1 = \mathcal{L}(x_1)$. Sea $z \in X$ tal que $z \notin F_1$. Sea $G_1 = \mathcal{L}(z, x_1)$ y sea $f_1 : G_1 \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua tal que $f_1 = 0$ en $\mathcal{L}(x_1)$ y $\| f_1 \| = 1$. Como $\| f_1 \| = \sup\{|f_1(x)| : x \in G_1\ \|x\| = 1\}$ y la esfera de G_1 es compacta, existe $x_2 \in G_1$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $|f_1(x_2)| = 1$. Entonces, para cada $a_1 \in \mathbb{K}$ se verifica que $\|x_2 - a_1x_1\| \geq |f_1(x_2 - a_1x_1)| = 1$. Por consiguiente, $d(x_2, \mathcal{L}(x_1)) \geq 1$.

Supongamos construidos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_X$ con la propiedad deseada. Sea $F_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y sea $z \notin F_n$. Sea $G_n = \mathcal{L}(z, x_1, \ldots, x_n)$ y sea $f_n : G_n \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua tal que $f_n = 0$ en F_n y $\|f_n\| = 1$. Como la esfera unidad de G_n es compacta, existe $x_{n+1} \in G_n$ tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ y $|f_n(x_{n+1})| = 1$. Para cada $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{K}$ tenemos que $\|x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_ix_i\| \geq |f_n(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} a_ix_i)| = 1$; por tanto, $d(x_{n+1}, \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)) \geq 1$. Procediendo inductivamente se obtiene la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S_X con la propiedad deseada. ∎

Sea X un espacio normado y sea $j : X \to X^{**}$ la inyección canónica de X en su bidual (usualmente denotaremos a $j(x)$ por $\hat{x}$). En capítulos anteriores se probó que $j(X)$ era $*$-w denso en X^{**}; ahora veremos un resultado, del que se deduce el anterior como consecuencia inmediata. Queremos hacer notar que la inyección canónica de cualquier espacio en su bidual será denotada por j.

TEOREMA 11.1.4 **[Teorema de Goldstine]**
Sea X un espacio normado. Se verifica que $j(B_X)$ es $*$-w denso en $B_{X^{**}}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ y supongamos que $x_0^{**} \notin \overline{j(B_X)}^{*-w}$. Tenemos que $\overline{j(B_X)}^{*-w}$ es convexo y cerrado en (X^{**}, T_{*-w}). Por el teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación $f : (X^{**}, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$, lineal y continua, tal que

$$\sup\{|f(y^{**})|, y^{**} \in \overline{j(B_X)}^{*-w}\} < |f(x_0^{**})|.$$

Podemos suponer que $\|f\| = 1$. Recordemos que si Z es un espacio normado entonces $\mathcal{L} = \{h : (Z^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K} : f \text{ es lineal y continua}\} = j(Z)$. Por tanto, $\mathcal{L} = \{f : (X^{**}, T_{*-w}) \to \mathbb{K} : f \text{ es lineal y continua}\} = j(X^*) \subset X^{***}$ y por tanto existe $x^* \in X^*$ tal que para cada $x^{**} \in X^{**}$ se verifica $f(x^{**}) = x^{**}(x^*)$. Por consiguiente, tenemos que

$$1 = \|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\} \leq \sup\{|y^{**}(x^*)| : y^{**} \in \overline{j(B_X)}^{*-w}\} < x_0^{**}(x^*).$$

Por tanto, $\|x_0^{**}\| > 1$, lo que está en contradicción con que $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$. ∎

11.2 Compacidad débil. Teoremas de Eberlein-Smulian y de Krein-Smulian.

Trataremos ahora de estudiar algunas cuestiones relacionadas con la compacidad débil. Sabemos que todo débil compacto es cerrado y acotado.

NOTA 11.2.1 1.- Veamos en c_0 un ejemplo de conjunto cerrado y acotado que no es débil compacto.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z_n = e_1 + \cdots + e_n$. Tenemos que $\|z_n\| = 1$ y $\|z_i - z_j\| = 1$ si $i \neq j$. Por tanto, $M = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cerrado y acotado. Sea y un punto de débil aglomeración de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como B_{c_0} es débil cerrado, será $\|y\| \leq 1$. Para cada $f \in (c_0)^*$ se tiene que $f(y)$ es un punto de aglomeración de $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, $e_k^*(y) = y(k)$ es un punto de aglomeración de $(e_k^*(z_n))_{n\in\mathbb{N}} = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$. Por consiguiente, $y(k) = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, lo que implica que $y \notin c_0$. Por tanto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene punto de aglomeración débil y deducimos que M no es débil compacto.

2.- Veamos en l_1 un ejemplo de cerrado y acotado que no es débil compacto. Sea B_{l_1}. Tenemos que si $X = c_0$ es $X^* = l_1$. Si (B_{l_1}, T_w) fuese compacto, como (B_{l_1}, T_{*-w}) es también compacto y $T_{*-w} \subset T_w$ tendremos que $T_{*-w} = T_w$ en B_{l_1}, ya que dos topologías que sean compacto T_2 y comparables son iguales. Tenemos que la sucesión de vectores canónicos $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de l_1 es tal que $*$-$w \lim e_i = 0$. Por tanto, del teorema de Schur se deduce que $\lim \|e_i\| = 0$, lo que es falso.

Más adelante se verá que B_{l_1} no puede ser débil compacto, ya que l_1 no es reflexivo.

3.- Si X es un espacio normado y separable tenemos que (B_{X^*}, T_{*-w}) es métrico compacto y por tanto es separable.

En efecto, sea $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en X. Tenemos que $M = \{qf_j : q \in \mathbb{Q}, j \in \mathbb{N}\}$ es numerable y probaremos que es denso en (X^*, T_{*-w}). En efecto, sea $f \in X^*$ tal que $\|f\| > 1$ y consideremos $B(f; x_1, \ldots, x_n)$, donde $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $f_j \in B(\frac{f}{\|f\|}; x_1, \ldots, x_n; \frac{1}{2\|f\|})$. Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$||\|f\| - q| < \min\{\frac{1}{2|f_j(x_i)|} : f_j(x_i) \neq 0, i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Entonces, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ se verifica

$$\begin{array}{l} |f_j(x_i) - \frac{f}{\|f\|}(x_i)| < \frac{1}{2\|f\|}, \\ |\|f\| f_j(x_i) - f(x_i)| < \frac{1}{2}. \end{array}$$

Así pues,

$$|qf_j(x_i) - f(x_i)| \leq |qf_j(x_i) - \|f\| f_j(x_i)| + |\|f\| f_j(x_i) - f(x_i)| < 1.$$

Esto prueba que $qf_j \in B(f; x_1, \ldots, x_n)$ y que M es denso en (X^*, T_{*-w}). Por tanto, (X^*, T_{*-w}) es separable.

4.- Sea Z un espacio topológico y sea $A \subset Z$. Recordemos los siguientes conceptos.

a) Se dice que A es **numerablemente compacto** si cada sucesión de A tiene algún punto de aglomeración en A.

b) Se dice que A es **relativamente numerablemente compacto** si $cl(A)$ es numerablemente compacto.

c) Se dice que A es **secuencialmente compacto** si cada sucesión de A tiene alguna subsucesión que converge a algún elemento de A.

d) Se dice que A es **relativamente secuencialmente compacto** si $cl(A)$ es secuencialmente compacto.

Se verifica que:

i.- A compacto $\Rightarrow$ A numerablemente compacto.

ii.- A secuencialmente compacto $\Rightarrow$ A numerablemente compacto.

Es conocido que las implicaciones contrarias no son ciertas en general y que las tres propiedades son equivalentes en un espacio métrico.

Se dice que A tiene la **propiedad Bolzano-Weierstrass** (BW), si cada subconjunto infinito de A tiene punto de acumulación. En un espacio métrico esta propiedad equivale a las tres anteriores. En general se verifica: A es numerablemente compacto $\Rightarrow$ A es BW. En un espacio T_1 las propiedades BW y numerablemente compacto son equivalentes.

Si un espacio normado X es tal que (B_{X^*}, T_{*-w}) es secuencialmente compacto, diremos que X es un espacio sk. En un espacio de este tipo toda sucesión acotada del dual tendrá alguna subsucesión $*-$débil convergente, ya que existirá $\alpha > 0$ tal que αB_{X^*} contenga a la sucesión.

Es sencillo comprobar que si X es un espacio de Banach sk entonces $A \subset X^*$ es $*$-w débil compacto si y sólo si A es $*$-w secuencialmente compacto.

Si X es separable tenemos que (B_{X^*}, T_{*-w}) es métrico y compacto; por tanto, es secuencialmente compacto y X será sk, el recíproco no es cierto en general.

Probaremos ahora que $X = l_\infty$ no es sk. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $f_i : l_\infty \to \mathbb{K}$ la aplicación definida, en cada $x \in l_\infty$, por $f_i(x) = x(i)$. Tenemos que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de (B_{X^*}, T_{*-w}) y que este conjunto es compacto. Veamos que $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesión convergente en T_{*-w}. Supongamos que $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión $*$-w convergente a $f \in X^*$. Se verifica entonces que $f \in B_{X^*}$. Sea $x \in l_\infty$ tal que la correspondiente subsucesión determinada por $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ no es convergente. Tendremos que $\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$ y obtenemos la contradicción de que $(x(n_j))_{j\in\mathbb{N}}$ es convergente a $f(x)$.

Así pues, en la topología $*$-débil pueden existir compactos que no son secuencialmente compactos. En el próximo teorema se verá que esto no sucede con la topología débil. En primer lugar, observemos que si X^* es separable entonces $(B_{X^{**}}, T_{*-w})$ es metrizable, en cuyo caso también será metrizable (B_X, T_w); en esta situación sería fácil probar que, para $A \subset X$, se verifica que A es débil compacto si y sólo si A es débil secuencialmente compacto. En el teorema anunciado se verá que la afirmación es cierta para cualquier espacio de Banach X.

5.- Sea X un espacio normado y separable y sea $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable y denso en S_X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua tal que $f_n(y_n) = 1$ y $\|f_n\| = 1$. Veremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es total en X^* sobre X; es decir, si $f_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$. En efecto, supongamos que $x \neq 0$ y que $f_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|\frac{x}{\|x\|} - y_j\| < \varepsilon$; entonces, $1 = |f_j(\frac{x}{\|x\|} - y_j)| \leq \|\frac{x}{\|x\|} - y_j\| < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por tanto, necesariamente $x = 0$.

Es sencillo deducir (en el capítulo 6 se hizo) que si $M \subset X^*$ es total sobre X entonces $\mathcal{L}(M)$ es denso en (X^*, T_{*-w}). Desde aquí se deduce que si X es separable entonces (X^*, T_{*-w}) es separable.

En la situación anterior definimos $d(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x-y)|$, para $x, y \in X$, donde $\{f_n\}$ es una sucesión en X^* con las propiedades anteriores. Es sencillo comprobar que d es una métrica en X.

Supongamos que $A \subset X$ es un conjunto débil compacto y consideremos la aplicación identidad $J : (A, T_w) \to (A, d)$. Veremos que J es continua. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red en A tal que $w\lim x_\alpha = x_0 \in A$. Tenemos que existe $M > 0$ tal que $\|x\| < M$ si $x \in A$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{4M}$. Como

$$\lim_{\alpha\in I} f_1(x_\alpha) = f_1(x_0), \cdots, \lim_{\alpha\in I} f_m(x_\alpha) = f_m(x_0),$$

tenemos que existe $\alpha_0 \in I$ tal que si $\alpha \geq \alpha_0, \alpha \in I$, se verifica

$$|f_1(x_\alpha - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, |f_m(x_\alpha - x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y entonces

$$\begin{aligned} d(x_\alpha, x_0) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i}|f_i(x_\alpha - x_0)| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|f_i(x_\alpha - x_0)| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} + 2M \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

para $\alpha \geq \alpha_0$. Por tanto, J es un homeomorfismo y será $T_w = T_d$. Como para un espacio métrico los conceptos compacto y secuencialmente compacto son equivalentes, resulta que (A, T_w) es secuencialmente compacto; es decir $A \subset X$ es débil secuencialmente compacto.

Supongamos ahora que X es un espacio normado no necesariamente separable y sea $A \subset X$ un conjunto débilmente relativamente compacto, es decir tal que $\overline{A}^w$ es débil compacto. Probaremos que $\overline{A}^w$ es débilmente secuencialmente compacto; es decir, para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{A}^w$ existe alguna subsucesión que es débil convergente a un elemento de $\overline{A}^w$.

En efecto, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{A}^w$ y consideremos $F = [a_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que F es débil cerrado y $\overline{A}^w \cap F$ será débil compacto. Como F es separable, se verifica que $\overline{A}^w \cap F$ es débilmente secuencialmente compacto, para la topología débil de F. Por tanto, existe $a_0 \in \overline{A}^w \cap F$ y existe una subsucesión $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que si $f : F \to \mathbb{K}$ es una aplicación lineal y continua entonces $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(a_0)$. Es claro que también para cada aplicación $f : X \to \mathbb{K}$, lineal y continua, se verifica que $\lim_{j\to\infty} f(a_{n_j}) = f(a_0)$. Por tanto $w \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = a_0$.

Obsérvese que también ha quedado probado que si A es débil compacto entonces A es débil secuencialmente compacto.

6.- *Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un subconjunto acotado. Entonces $\overline{A}^w$ es débil compacto si y sólo si en X^{**} es $\overline{j(A)}^{*-w} \subset X$.*

En efecto, supongamos que $\overline{A}^w$ es débil compacto en X. Sea $x^{**} \in \overline{j(A)}^{*-w}$; entonces existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ en A tal que $*$-$w \lim \hat{x}_\alpha = x^{**}$. Como $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red en $\overline{A}^w$, que es débil compacto, existe una subred $(x_\beta)_{\beta\in I'}$ de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ y existe $x \in \overline{A}^w$ tales que $w \lim_{\beta\in I'} x_\beta = x$. Como $*$-$w \lim_{\beta\in I'} \hat{x}_\beta = x^{**}$, tenemos, para $x^* \in X^*$, que $x^{**}(x^*) = x^*(x) = \hat{x}(x^*)$. Por consiguiente, $x^{**} = \hat{x}$ y podemos afirmar que $\overline{j(A)}^{*-w} \subset X$.

Recíprocamente, supongamos que $cl^{*-w}(j(A)) \subset X$. Como A es acotado, existe un $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha B_{X^{**}}$. Por tanto, $cl^{*-w}(j(A))$ es $*$-w compacto. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red en A tenemos que para $(\hat{x}_\alpha)_{\alpha\in I}$ existe un $\hat{x}_0 \in \overline{j(A)}^{*-w}$ y existe una subred $(\hat{x}_\beta)_{\beta\in I'}$ de $(\hat{x}_\alpha)_{\alpha\in I}$ de modo que $*$-$w \lim_{\beta\in I'}(\hat{x}_\beta) = \hat{x}_0$. Es inmediato comprobar que entonces $w \lim_{\beta\in I'} x_\beta = x_0$.

La demostración puede ser simplificada breve si se recuerda bien que la topología T_w de X es la topología que hereda $\hat{X} = j(X)$ de la topología T_{*-w} de X^{**}.

7.- El siguiente teorema contiene dos demostraciones muy sugerentes. No obstante, una de las implicaciones fue probada en el punto 5 de la nota anterior.

TEOREMA 11.2.2 **[Teorema de Eberlein-Smulian]**

Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$. Entonces, A es relativamente débil compacto si y sólo si cada sucesión de A tiene subsucesión débil convergente.

DEMOSTRACIÓN $\underline{\Rightarrow}|$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A. Trataremos de probar que existe una subsucesión débil convergente. Sea $F = \overline{\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})} = \overline{\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})}^w$. Claramente F es separable y F^* es $*$-w separable. Sea $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F^*$ un conjunto $*$-w denso en F^*. Para cada $i \in \mathbb{N}$ podemos extender, con igual norma, la aplicación h_i de F a todo X. Seguiremos denotando a esta nueva aplicación por h_i. Como A es acotado, para cada $i \in \mathbb{N}$, se verifica que $(h_i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.

Procederemos de la siguiente forma: para $(h_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(h_1(x_n^1))$ que converge en $\mathbb{K}$; para $(h_2(x_n^1))$ existe una subsucesión $(h_2(x_n^2))$ que converge en $\mathbb{K}$. Observemos que $h_1(x_n^2)$ tiene el mismo límite que $h_1(x_n^1)$. De esta forma se obtienen las subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n^1), (x_n^2), $\cdots$, $(x_n^k), \ldots$, donde cada una es subsucesión de la anterior. Observemos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $(h_i(x_n^k))$ es convergente a un cierto elemento de $\mathbb{K}$, si $k \geq i$. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $y_n = x_n^n$. Para $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $(y_k, y_{k+1}, \ldots)$ es una subsucesión de (x_n^k); por tanto $(h_k(y_n))$ converge, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, como A es relativamente débilmente compacto, existe $y_0 \in \overline{A}^w$ que es punto de aglomeración débil de (y_n). Demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} h_m(y_n) = h_m(y_0)$, para $m \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$. La sucesión $(h_m(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{K}$, luego tiene un único punto de aglomeración que es su límite. Si probamos que $h_m(y_0)$ es punto de aglomeración de $(h_m(y_n))$ deduciríamos que $\lim\limits_{n\to\infty} h_m(y_n) = h_m(y_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $B_1 = B(h_m(y_0); \varepsilon)$, que es un entorno de $h_m(y_0)$ en $\mathbb{K}$. Sea $B_2 = B(y_0; h_m; \varepsilon)$, que es un entorno débil de y_0. Existe una subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) tal que $(y_{n_k}) \subset B_2$; por tanto se verifica que $(h_m(y_{n_k})) \subset B_1$.

Veamos ahora que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un único punto de aglomeración débil. En efecto, si tuviese como puntos de aglomeración débil a y_0 y a y_0' tendríamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ se verifica $h_m(y_0) = h_m(y_0') = \lim\limits_{n\to\infty} h_m(y_n)$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $*$-w denso en F^*, resulta que si $f \in F^*$ existe una red $\{h_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $H = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $*$-$w \lim h_\alpha = f$. Como para cada $h_n \in H$ se tiene que $h_n(y_0 - y_0') = 0$, resulta que $f(y_0 - y_0') = 0$. De aquí deducimos que $y_0 = y_0'$. Por tanto, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un único punto y_0 que es de aglomeración débil y la sucesión está contenida en un conjunto A que es débil compacto, deducimos que $w \lim y_n = y_0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $A \subset X$ es un conjunto tal que cada sucesión de A tiene una subsucesión débil convergente. Probaremos que A es relativamente débil compacto. Antes de abordar la demostración de este resultado, necesitaremos probar los siguiente: *sea* $x^{**} \in cl^{*-w}\overline{j(A)}^{*-w}$, *si* $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\} \subset X^*$ *entonces existe* $z \in \overline{A}^w$ *tal que* $x_i^*(z) = x^{**}(x_i^*)$ *si* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

En efecto, para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $B_m = B(x^{**}; x_1^*, \ldots, x_n^*; \frac{1}{m})$, que es un entorno $*$-w de x^{**} y por lo que existe $\hat{z}_m \in B_m \cap j(A)$. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, tendremos que $|x^{**}(x_i^*) - x_i^*(z_m)| \leq \frac{1}{m}$. Existe una subsucesión (z_{n_j}) de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w \lim z_{n_j} = z \in \overline{A}^w$. Es claro que en X^{**} se verifica $*$-$w \lim \hat{z}_{n_j} = \hat{z}$. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$; tenemos que $x_i^*(z) = \lim\limits_{j\to\infty} x_i^*(z_{n_j})$, así pues dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$ se cumple $|x_i^*(z) - x_i^*(z_{n_j})| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{1}{n_j} < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $|x^{**}(x_i^*) - x_i^*(z)| \leq |x^{**}(x_i^*) - x_i^*(z_{n_j}) + |x_i^*(z_{n_j}) - x_i^*(z)| < \varepsilon$. Por tanto, $x_i^*(z) = x^{**}(x_i^*)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lo segundo que vamos a probar es que *si* X *es un espacio normado y* $x^{**} \in X^{**}$ *entonces* $x^{**} = \hat{x}$, *para algún* $x \in X$, *si y sólo si* $\ker x^{**} = \{x^* \in X^* : x^{**}(x^*) = 0\}$ *es* $*$-w *cerrado en* X^*.

En efecto, si $x^{**} = \hat{x}$, entonces $\hat{x} : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua y $\ker \hat{x}$ es un conjunto $*$-w cerrado. Por otra parte, si $\ker x^{**}$ es $*$-w cerrado tenemos que $x^{**} : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua. Por tanto, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = \hat{x}$.

En tercer lugar probaremos que *si* $F \subset X^*$ *es un subespacio vectorial entonces* F *es* $*$-w *cerrado si y sólo si* $F \cap B_{X^*}$ *es* $*$-w *cerrado.*

En efecto, es claro que si F es $*$-w cerrado entonces $F \cap B_{X^*}$ será $*$-w cerrado. Supongamos que $F \cap B_{X^*}$ es $*$-w cerrado pero que F no lo es. Existe pues una red $\{x_\alpha^*\}_{\alpha\in I}$ en F tal que $\lim\{x_\alpha^*\} = x^*$ pero $x^* \notin F$. Tendremos que $x^* \neq 0$ y por tanto existen $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_X$ y $\delta > 0$ tales que $0 \notin B = B(x^*; x_1, \ldots, x_n; \delta)$ y existirá $\alpha_0 \in I$ tal que para cada $\alpha \geq \alpha_0$ es $x_\alpha^* \in B(x^*; x_1, \ldots, x_n; \frac{\delta}{2})$. Como existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|x^*(x_j)| > \delta$ tenemos que si $\alpha \in I$ y $\alpha \geq \alpha_0$ es $\|x_\alpha^*\| > |x_\alpha^*(x_j)| > |x^*(x_j)| - |x^*(x_j) - x_\alpha^*(x_j)| > \frac{\delta}{2}$. Así pues, $\left(\dfrac{1}{\|x_\alpha^*\|}\right)_{\substack{\alpha\in I\\ \alpha\geq\alpha_0}}$ es una red en $[0, \frac{\delta}{2}]$, por lo que existe cierta subred $\left(\dfrac{1}{\|y_\beta^*\|}\right)_{\beta\in I'}$ que converge a cierto $\lambda \in [0, \frac{\delta}{2}]$. Entonces, $\left(\dfrac{y_\beta^*}{\|y_\beta^*\|}\right)_{\beta\in I'}$ es una red en $B_{X^*} \cap F$ que converge, para la topología $*$-w, hacia λx^* pero $\lambda x^* \notin F$. Por consiguiente, $\lambda x^* \notin B_{X^*} \cap F$ y esto es una contradicción.

Finalmente, *probaremos que A es relativamente débil compacto, demostrando que* $\overline{j(A)}^{*-w} \subset X$. Sea $x^{**} \in cl^{*-w}(j(A))$ y sea $D = \{x^* : x^{**}(x^*) = 0\}$. Demostraremos que $D \cap B_{X^*}$ es $*$-w cerrado. Sea $y_0^* \in \overline{D \cap B_{X^*}}^{*-w}$; veremos que $y_0^* \in D \cap B_{X^*}$. Sea $\varepsilon > 0$. Vamos a construir tres sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{A}^w$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(y_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \cap B_{X^*}$ de la siguiente manera:

- Para $y_0^* \in X^*$ existe $z_1 \in \overline{A}^w$ tal que $y_0^*(z_1) = x^{**}(y_0^*)$. Como $z_1 \in \overline{A}^w$, existe $x_1 \in A$ tal que $|y_0^*(x_1) - y_0^*(z_1)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $y_0^* \in \overline{D \cap B_{X^*}}^{*-w}$, existe $y_1^* \in D \cap B_{X^*}$ tal que $|y_1^*(x_1) - y_0^*(x_1)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

- Para $\{y_0^*, y_1^*\} \subset X^*$ existe $z_2 \in \overline{A}^w$ tal que $y_0^*(z_2) = x^{**}(y_0^*)$ y $y_1^*(z_2) = x^{**}(y_0^*) = 0$. Como $z_2 \in \overline{A}^w$, existe $x_2 \in A$ tal que $|y_0^*(x_2) - y_0^*(z_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $|y_1^*(x_2) - y_1^*(z_2)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Como $y_0^* \in \overline{D \cap B_{X^*}}^{*-w}$, existe $y_2^* \in D \cap B_{X^*}$ tal que

$$|y_2^*(x_1) - y_0^*(x_1)| < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad |y_2^*(x_2) - y_0^*(x_2)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Así, inductivamente, se obtienen las sucesiones anunciadas, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ sea:

(a) $y_j^*(z_n) = x^{**}(y_j^*)$ si $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

(b) $|y_j^*(x_n) - y_j^*(z_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $j \in \{0, \ldots, n-1\}$.

(c) $|y_n^*(x_i) - y_0^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Observemos que además se tiene, para cada m, que $\|y_m^*\| \leq 1$ y, para $m \leq n-1$, $y_m^*(z_n) = 0$.

De (a), (b) y (c) se deduce que, si $i \in \{1, \ldots, n\}$, se verifica $x^{**}(y_0^*) = y_0^*(z_i)$, $|y_0^*(z_i) - y_0^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$ y $|y_0^*(x_i) - y_n^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Por consiguiente,

$$|x^{**}(y_0^*) - y_n^*(x_i)| = |y_0^*(z_i) - y_n^*(x_i)| \leq |y_0^*(z_i) - y_0^*(x_i) + |y_0^*(x_i) - y_n^*(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto,

(d) $|x^{**}(y_0^*) - y_n^*(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, si $i \in \{1, \dots, n\}$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y A es débilmente secuencialmente compacto, existe alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que denotamos igual para no liarla, que es débil convergente a cierto $x \in \overline{A}^w$. Por tanto, estamos suponiendo que $w\lim x_n = x$. Tenemos que $|y_j^*(x_n) - y_j^*(z_n)| = |y_j^*(x_n)| < \frac{\varepsilon}{4}$, para $j = 1, \dots, n-1$. De aquí se deduce, al hacer $n \to \infty$, que $|y_j^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, para $j \in \mathbb{N}$.

Como $w\lim(x_n) = x$ tenemos que $x \in \overline{co}(x_n : n \in \mathbb{N})$. Por consiguiente, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\{a_1, \dots, a_N\} \subset [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$ y $\|x - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Por la desigualdad (d), para $n = N$ tenemos que

$$|x^{**}(y_0^*) - y_N^*\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right)| \leq \sum_{i=1}^{N} a_i |x^{**}(y_0^*) - y_N^*(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |x^{**}(y_0^*)| &\leq |x^{**}(y_0^*) - y_N^*\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right)| + |y_N^*\left(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i\right) - y_N^*(x)| + |y_N^*(x)| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \|y_N^*\|\, \|x - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i\| + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

De aquí deducimos que $x^{**}(y_0^*) = 0$ y, por tanto, $y_0^* \in D$. Como $y_0^* \in \overline{B_{X^*}}^{*-w} = B_{X^*}$ será $y_0^* \in D \cap B_{X^*}$ ■

NOTA 11.2.3 El propósito de esta nota es probar que si A es un subconjunto de un espacio normado X entonces son equivalentes

i.- A es débil compacto.

ii.- A es secuencialmente compacto.

iii.- A es numerablemente compacto.

También tenemos el propósito de probar la equivalencia de las propiedades "relativamente". Necesitaremos algunos resultados previos que pasamos a estudiar.

1.- *Si $A \subset X$ es relativamente débil numerablemente compacto entonces A es acotado.*

En efecto, sabemos que A es acotado si y sólo si $f(A)$ es acotado. Supongamos que A no es acotado; esto significa que existe $f \in X^*$ tal que $f(A)$ no es acotado. Por tanto, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tal que $|f(x_{n+1})| > f(x_n) + 1$. Sea $z \in X$ tal que z es un punto de débil aglomeración de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que $B = B(z; f; \frac{1}{2})$ es un entorno débil de z. Como en B a lo sumo hay un elemento de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esto es una contradicción.

2.- *Sea Y un subespacio finito dimensional de X^*. Para cada número real $M > 1$ existe un subconjunto finito F_M de B_X tal que $\|f\| \leq M$ máx$\{|f(x)| : x \in F_M\}$.*

En efecto, vamos a suponer que $Y \neq \{0\}$. De la compacidad de S_Y se deduce que existe $\{f_1 \dots f_n\} \subset S_Y$ tal que $S_Y \subset \bigcup_{i=1}^n B(f_i, \frac{M-1}{2M})$. Como $\frac{M+1}{2M} < 1$, existe $\{x_1, \dots, x_n\} \subset B_X$ tal que $|f_i(x_i)| > \frac{M+1}{2M}$, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos $F_M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Sea $f_0 \in S_Y$, tenemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_0, \dots, f_j\| < \frac{M-1}{2M}$. Entonces

$$\begin{aligned}|f_0(x_j)| &= |f_0(x_j) - f_j(x_j) + f_j(x_j) > |f_j(x_j)| - |f_j(x_j) - f_0(x_j)| \\ &> \frac{M+1}{2M} - \frac{M-1}{2M} = \frac{1}{M}.\end{aligned}$$

Por tanto, máx$\{|f_0(x)| : x \in F_M\} \geq \frac{1}{M}$ si $f_0 \in S_Y$. Por consiguiente, si $f \in Y \setminus \{0\}$ se tiene que $\|f\| \leq M$ máx$\{|f(x)| : x \in F_M\}$.

3.- Lema de Day *a) Sea $B \subset X^*$ un conjunto infinito de modo que cada sucesión en B tiene punto de débil aglomeración (no necesariamente en B). Si $f_0 \in \overline{B}^{*-w}$ existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B tal que $w \lim f_n = f_0$.*

b) Sea $A \subset X$ un conjunto de modo que cada sucesión de A tiene punto de débil aglomeración (no necesariamente en A). Entonces si $x_0 \in \overline{A}^w$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A tal que $w \lim x_n = x_0$.

Comenzaremos demostrando a) y obtendremos, como consecuencia, la demostración de b).

Sea $f_0 \in \overline{B}^{*-w}$. Podemos suponer que $f_0 \notin B$. Sea $B_0 = -f_0 + B$. Tenemos que B_0 es también relativamente débil numerablemente compacto y que $\overline{B_0}^{*-w} = -f_0 + \overline{B}^{*-w}$. Así pues, $0 \in \overline{B_0}^{*-w} \setminus B_0$.

Construiremos una sucesión creciente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de subconjuntos finitos de B_X, y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en B_0, de modo que $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$ y si $n \in \mathbb{N}$ se verifique:

i) $\|f\| \leq 2$ máx$\{|f(x)| : x \in F_n\}$, para $f \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

ii) máx$\{|f_{n+1}(x)| : x \in F_n\} \leq \frac{1}{n+1}$.

Sea $f_1 \in B_0$. Sea $x_1 \in B_X$ tal que $2|f(x_1)| \geq \|(f_1)\|$. Sea $F_1 = \{x_1\}$. Como $B(0; x_1; \frac{1}{2})$ es entorno $*$-w de cero y $0 \in \overline{B_0}^{*-w}$, existe $f_2 \in B_0 \setminus \{f_1\}$ tal que $f_2 \in B(0; x_1; \frac{1}{2})$; es decir, $|f_2(x_1)| \leq \frac{1}{2}$. Por el resultado del punto anterior, existe $F_1' \subset B_X$ finito y tal que $\|f\| \leq 2$ máx$\{|f(x)| : x \in F_1'\}$, para $f \in \mathcal{L}(f_1, f_2)$. Definimos $F_2 = F_1 \cup F_1'$. Si $f \in \mathcal{L}(f_1, f_2)$ es claro que $\|f\| \leq 2$ máx$\{|f(x)| : x \in F_2\}$.

Supongamos que hemos obtenido $\{f_1, \dots, f_n\}$ en B_0 (con $f_i \neq f_j$ si $i, j \in \{1, \dots, n\}$) y $F_1, \cdots, F_n$ subconjuntos finitos de B_X con $F_1 \subset \cdots \subset F_n$ de modo que si $i \in \{1, \dots, n-1\}$ se cumple

1) $\|f\| \leq 2$ máx$\{|f(x)| : x \in F_i\}$ si $f \in \mathcal{L}(f_1 \dots, f_i)$.

2) máx$\{|f_{i+1}(x)| : x \in F_i\} \leq \frac{1}{i+1}$.

Tenemos que

$$B = B(0; F_n; \frac{1}{n+1}) = \{f \in X^* : |f(x)| \leq \frac{1}{n+1}, x \in F_n\}$$

es un entorno $*$-w de cero y existirá $f_{n+1} \in B_0 \setminus \{f_1, \dots, f_n\}$ tal que $f_{n+1} \in B$. Es decir, $|f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$ si $x \in F_n$. Para $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_{n+1})$, existe $F'_n \subset B_X$ y finito tal que, si $f \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_{n+1})$, se cumple $\|f\| \leq 2 \max\{|f(x)| : x \in F'_n\}$. Definamos $F_{n+1} = F_n \cup F'_n$.

Sea $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Tenemos que $F \subset B_X$ y, para $f \in \mathcal{L}(f_n : n \in \mathbb{N})$, es claro que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$ y se cumple

$$\|f\| \leq 2 \max\{|f(x)| : x \in F_n\} \leq 2 \sup\{|f(x)| : x \in F\}.$$

Por tanto, si $f \in M = cl\mathcal{L}(f_n : n \in \mathbb{N})$ también será $\|f\| \leq 2 \sup\{|f(x)| : x \in F\}$.

Tenemos que existe un punto g de aglomeración débil de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Como M es débil cerrado será $g \in M$ y, por tanto, $\|g\| \leq \sup\{|g(x)| : x \in F\}$. Probaremos que para cada $x \in F$ se cumple $g(x) = 0$ y que, por tanto, $g = 0$.

Sea $x \in F$ y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos $B = B(g : x : \frac{\varepsilon}{2})$. Tenemos que B es entorno $*$-débil de g y por tanto también será entorno débil de g. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_n$ y $\frac{1}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Se verifica que existe $m > n$ tal que $f_{m+1} \in B$ y que $|g(x) - f_{m+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in F_n$, se tiene que $|f_{m+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$; así pues $|g(x)| \leq \varepsilon$ y se deduce que $g(x) = 0$.

Hemos probado que el punto cero es el único punto de débil aglomeración de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Demostraremos que $w \lim f_n = 0$. Si este resultado fuese falso, existiría un abierto U entorno débil de cero y una subsucesión (f_{n_j}) contenida en $X \setminus U$. Como A es débil numerablemente compacto, deduciríamos que existe un punto h de débil aglomeración de (f_{n_j}). Como $X \setminus U$ es débil cerrado, tendríamos que $h \in X \setminus U$ y obtendríamos la contradicción de que $h \neq 0$.

Para finalizar, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in B$ tal que $f_n = -f_0 + g_n$. Tenemos que (g_n) es una sucesión de B tal que $w \lim g_n = f_0$.

Veremos ahora la demostración del apartado b). Sea $x_0 \in \overline{A}^w$ y consideremos la inyección canónica $j : X \to X^{**}$. Por ser j continua, también será débil-débil continua. Deducimos que cada subsucesión de $j(A)$ tiene punto de débil aglomeración. Tenemos que $j(x_0) \in cl^{*-w}(j(A))$. Por tanto, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $w \lim j(x_n) = j(x_0)$ en X^{**}; es claro que en X se tiene que $w \lim x_n = x_0$.

4.- Sea A un conjunto tal que cada sucesión de A tiene una subsucesión débil convergente. Por medio del lema de Day, probaremos, de una forma más breve que la expuesta en el teorema anterior, que A es relativamente débil compacto.

Sea $x_0^{**} \in \overline{j(A)}^{*-w}$. De la débil-débil continuidad de j se deduce que cada sucesión de $j(A)$ tiene algún punto de débil aglomeración. Por tanto, existe una sucesión $(j(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $j(A)$ tal que $w \lim a_{nj} = x_0^{**}$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en A, existe alguna subsucesión (a_{n_j}) de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y existe $x_0 \in X$ tal que $w \lim a_{n_j} = x_0$. Por tanto, $w \lim j(a_{nj}) = j(x_0)$ y deducimos que $x_0^{**} = j(x_0)$.

5.- Demostraremos que *si A es débil secuencialmente compacto entonces A es débil compacto.*

Sea $x_0 \in \overline{A}^w$. Por el lema de Day, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A tal que $w \lim x_n = 0$. Como A es débil secuencialmente compacto, existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y existe $x_1 \in A$ tal que $w \lim x_{n_j} = x_1$. Deducimos que $x_0 = x_1 \in A$.

Sabemos que si A es tal que cada subsucesión de A tiene una subsucesión débil convergente entonces $\overline{A}^w$ es débil compacto. Como $\overline{A}^w = A$, se deduce que A es débil compacto. Como $\overline{A}^w = A$, se deduce que A es débil compacto.

Si A es un conjunto relativamente débil secuencialmente compacto será $\overline{A}^w$ secuencialmente compacto; por tanto $\overline{A}^w$ es débil compacto y tenemos que A es relativamente débil compacto.

Si A es relativamente débil compacto tenemos que $\overline{A}^w$ es débil compacto; por tanto, $\overline{A}^w$ es débil secuencialmente compacto y tenemos que A es relativamente débil secuencialmente compacto.

Sin lugar a dudas, ha quedado probado que *son equivalentes las afirmaciones:*

i) Cada sucesión en A tiene una subsucesión débil convergente.

ii) A es relativamente débil compacto.

iii) A es relativamente secuencialmente compacto.

Obsérvese que si cada sucesión en A tiene subsucesión débil convergente (necesariamente el límite estará en $\overline{A}^w$) entonces cada sucesión de $\overline{A}^w$ también tiene subsucesión débil convergente (aunque la sucesión sea $\overline{A}^w \setminus A$).

6.- Sea A un conjunto tal que cada sucesión de A tiene un punto de débil aglomeración. Demostraremos que cada sucesión de A tiene una subsucesión débil convergente.

En efecto, sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A. Podemos suponer que $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Sea y_0 un punto de aglomeración débil de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $A' = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que $y_0 \in \overline{A'}^w$ y que cada sucesión de A' tiene punto de débil aglomeración. Por tanto, del lema de Day se deduce que existe una sucesión de A' que es débil convergente a y_0.

De todo lo anterior se deducen, sin dificultad, las equivalencias:

i.- A es relativamente débil numerablemente compacto.

ii.- Cada sucesión de A tiene punto de débil aglomeración.

iii.- Cada sucesión de A tiene subsucesión débil convergente.

iv.- A es relativamente débil secuencialmente compacto.

v.- A es relativamente débil compacto.

Obsérvese que si cada sucesión de A tiene un punto de débil aglomeración entonces cada sucesión de $\overline{A}^w$ también tiene un punto de débil aglomeración (aunque la sucesión esté en $\overline{A}^w \setminus A$).

Sea A un conjunto numerablemente compacto, demostraremos que A es secuencialmente compacto.

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de A. Tenemos que existe un punto y_0 de débil aglomeración de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_0 \in A$. Repitiendo los argumentos de la demostración anterior se deduce que existe una subsucesión $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w\lim y_{n_j} = y_0$.

Tenemos las equivalencias:

a) A es débil numerablemente compacto.

b) A es débil secuencialmente compacto.

c) A es débil compacto.

7.- Sea X un espacio normado. En la demostración del teorema de Eberlein - Smulian probamos, porque fue necesario, que si F es un subespacio vectorial de X^* entonces F era $*$-w cerrado si y sólo si $F \cap B_{X^*}$ era $*$-w cerrado. Desde este resultado es sencillo deducir los siguientes:

Dada una aplicación lineal $f : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ se verifica que:

i) f es continua si y sólo si es continua la restricción de f a B_{X^*}.

ii) Si X es separable entonces f es continua si y sólo si f es secuencialmente continua (recordemos que (B_{X^*}, T_{*-w}) sería metrizable).

Estos resultados serán útiles en el próximo teorema.

TEOREMA 11.2.4 **[Teorema de Krein - Smulian]**

Sea X un espacio de Banach y sea K un subconjunto de X que es débil compacto. Se verifica que $\overline{\text{co}}(K)$ es débil compacto.

DEMOSTRACIÓN Es conveniente recordar que $\overline{\text{co}}^w(K) = \overline{\text{co}}(K)$.

En un principio, vamos a suponer que X es separable.

Es conocido, del curso de teoría de la medida, que el dual de $C(K)$ es linealmente isométrico al espacio $M_r(K)$ de las medidas regulares de variación acotada sobre K, con la norma de la variación sobre K. Aquí identificaremos, cuando sea preciso, a $C(K)^*$ con $M_r(K)$. Sea i la aplicación identidad de K en X. Si $x^* \in X^*$ tenemos que $x^*i \in C(K)$ y, por tanto, si $\mu \in M_r(K)$, existe $\int_K x^*id\mu$. Sea $\mu_0 \in M_r(K)$. Vamos a demostrar que existe un único $x_{\mu_0} \in X$ de modo que $\int_K x^*id\mu_0 = x^*(x_{\mu_0})$, para cada $x^* \in X^*$. Para nuestro objetivo, será suficiente considerar la aplicación lineal: $\varphi_0 : (X^*, T_{*-w}) \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi(x^*) = \int_K x^*id\mu_0$ y probar que φ_0 es secuencialmente continua. Sea pues (x_n^*) una sucesión en X^* tal que $*$-$w \lim x_n^* = x_0^*$. Para cada $x \in K$ y cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|x_n^*i(x)| \leq \|x_n^*\| \, \|x\| \leq \sup\{\|x_m^*\| : m \in \mathbb{N}\} \cdot \sup\{\|y\| : y \in K\} < \infty.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x_n^*i(x) = x_0^*i(x)$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_0(x_n^*) = \lim_{n\to\infty} \int_K x_n^*id\mu_0 = \int_K x_0^*id\mu_0 = \varphi_0(x_0^*).$$

Vamos a definir la aplicación $T : C(K)^* \to X$ de la siguiente forma: para cada $\mu \in C(K)^*$ sea $T(\mu)$ el único elemento x_μ de X tal que $\int_K x^*id\mu = x^*(x_\mu)$, para $x^* \in X^*$. Es sencillo comprobar que T es lineal. Probaremos que T es $*$-débil

$\leftrightarrow$ débil continua. Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red de $C(K)^*$ tal que $*\text{-}w\lim \mu_\alpha = \mu_0$. Si $x^* \in X^*$ tenemos que

$$\lim_{\alpha\in I} x^*(T\mu_\alpha) = \lim_{\alpha\in I} \int_K x^* i d\mu_\alpha = \lim_{\alpha\in I} \mu_\alpha(x^* i) = \mu_0(x^* i) = x^*(T\mu_0).$$

Esto prueba que $w \lim_{\alpha\in I} T\mu_\alpha = T\mu_0$.

Por tanto, podemos afirmar que $T(B_{C(K)^*})$ es un subconjunto débil compacto y convexo de X. Demostraremos ahora que $K \subset T(B_{C(K)^*})$. Sea $x_0 \in K$ y consideremos la aplicación lineal $\delta_{x_0} : C(K) \to \mathbb{K}$ definida por $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$; es claro que $\delta_{x_0} \in C(K)^*$ y $\|\delta_{x_0}\| = 1$. Si $x^* \in X^*$ tenemos que $x^*(T\delta_{x_0}) = \int_K x^* i d\delta_{x_0} = x^* i(x_0) = x^*(x_0)$ y esto prueba que $T\delta_{x_0} = x_0$.

Por tanto, $K \subset T(B_{C(K)^*})$ y, como $\overline{co}(K) \subset T(B_{C(K)^*})$, deducimos que $\overline{co}(K)$ es débil compacto.

Estudiaremos ahora la situación en que X es un espacio de Banach, no necesariamente separable.

Sea K un subconjunto débil compacto de X. Demostraremos que $\overline{co}(K)$ es débil secuencialmente compacto. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $\overline{co}(K)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que x_n es el límite en norma de una sucesión de $co(K)$, cuyo recorrido denotamos por A_n. Sea $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; tenemos que $A \subset co(K \cap A)$ y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{co}(A) \subset \overline{co}(K \cap [A]) \subset [A]$. Como $K \cap [A]$ es un subconjunto débil compacto del espacio $[A]$, que es separable, deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión que es débil convergente en $[A]$ a cierto elemento x_0 de $\overline{co}(K)$ (ya que $\overline{co}(K)$ es débil cerrado). Es claro que esta misma subsucesión converge débilmente a x_0 en X. ∎

11.3 Espacios Reflexivos. Teoremas de James

Sea X un espacio normado y sea $j : X \to X^{**}$ la inyección canónica de X en su bidual: $j(x) = \hat{x}$. Recordemos que se dice que X es reflexivo si $j(X) = X^{**}$. En su momento se demostraron las siguientes cuestiones:

i) Todo espacio reflexivo es completo.

ii) Todo subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo.

iii) Un espacio normado X es reflexivo si y sólo si en X^* se verifica que $T_w = T_{*-w}$.

Recordemos que la topología débil de X es la topología determinada por la que hereda $j(X)$ de T_{*-w} en X^{**}. Por tanto, (B_X, T_w) es homeomorfo a $(j(B_X), T_{*-w})$. Si X es reflexivo será $j(B_X) = B_{X^{**}}$ y, como $(B_{X^{**}}, T_{*-w})$ es compacto, deducimos que B_X es débil compacto.

Demostraremos que *si X es un espacio normado tal que B_X es débil compacto entonces X es reflexivo.* En efecto, tenemos que $j(B_X)$ será $*$-w compacto y por tanto, como $B_{X^{**}} = cl^{*-w}(j(B_X)) = j(B_X)$, se deduce que $j(X) = X^{**}$ y que X es reflexivo.

Desde lo anterior es sencillo deducir que *un espacio normado X es reflexivo si y sólo si toda sucesión acotada tiene alguna subsucesión débil convergente.*

Sea X un espacio reflexivo y sea $f \in X^*$. Tenemos que $f : (B_X, T_w) \to \mathbb{K}$ es lineal y continua; por tanto, como (B_X, T_w) es compacto, deducimos que existe $x_0 \in B_X$ tal que $|f(x_0)| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\} = \|f\|$. Así pues, también existirá $x_1 \in B_X$ tal que $f(x_1) = \|f\|$. En esta situación, se dice que f **alcanza la norma en** x_1 (observemos que $x_1 \in S_X$ ya que $\|f\| = |f(x_1)| \leq \|f\|\,\|x_1\|$). R. James demostró que si cada $f \in X^*$ alcanza la norma entonces X es reflexivo, más adelante trataremos de probar este resultado.

NOTA 11.3.1 1. Sea X un espacio normado complejo y consideremos el correspondiente espacio normado real $X_{\mathbb{R}}$. Demostraremos que *X es reflexivo si y sólo si lo es $X_{\mathbb{R}}$.*

Si X es reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X tenemos que existen $x_0 \in X$ y una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $w\lim_j x_{n_j} = x_0$. Si $f \in (X_{\mathbb{R}})^*$ tenemos que la aplicación definida por $g(x) = f(x) - if(ix)$ es de X^*. Por tanto, $\lim_j g(x_{n_j}) = g(x_0)$. Como $Reg = f$, deducimos que $\lim f(x_{n_j}) = f(x_0)$. Esto prueba que $w\lim_j x_{n_j} = x_0$ en $X_{\mathbb{R}}$ y por tanto que $X_{\mathbb{R}}$ es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que $X_{\mathbb{R}}$ es reflexivo y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de X. Tenemos que existen $x_0 \in X$ y $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de modo que $w\lim x_{n_j} = x_0$ en $X_{\mathbb{R}}$.

Consideremos la aplicación $\varphi : X_{\mathbb{R}} \to X_{\mathbb{R}}$ definida por $\varphi(x) = ix$. Es sencillo ver que φ es lineal ($\mathbb{R}$-lineal) y continua (es isometría). Por tanto, se tiene que $w\lim_j ix_{n_j} = ix_0$ en $X_{\mathbb{R}}$. Sea g un elemento de X^*. Tenemos que $f = Reg$ es de $(X_{\mathbb{R}})^*$ y que, por tanto, $\lim_j f(x_{n_j}) = f(x_0)$ y $\lim_j f(ix_{n_j}) = if(x_0)$. Como $g(x) = f(x) - if(ix)$, deducimos que $\lim_j g(x_{n_j}) = g(x_0)$. Por tanto $w\lim x_{n_j} = x_0$ en X y podemos afirmar que X es reflexivo.

2. Sea X un espacio normado. Sabemos que si X es reflexivo entonces cada subespacio cerrado de X también es reflexivo.

Demostraremos aquí que *si X es tal que cada subespacio cerrado separable es reflexivo entonces X es reflexivo.*

En efecto, si X no es reflexivo existirá una sucesión acotada, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en X que no tiene una subsucesión débil convergente en X. Sea $Y = cl\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$. Tenemos que Y es un subespacio cerrado y separable de X y es sencillo comprobar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Y que no tiene subsucesión débil convergente. Por tanto Y no es reflexivo.

Con un razonamiento similar al aquí expuesto proponemos que se demuestre el siguiente resultado:

Sea A un subconjunto de X. Entonces A es débil compacto si y sólo si para cada subespacio cerrado y separable F de X se verifica que $A \cap F$ es débil compacto.

TEOREMA 11.3.2 *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) X no es reflexivo.

b) Para cada $\theta \in (0,1)$ existen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_X$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{X^*}$ tales que $f_n(x_k) = \theta$ si $n \leq k$ y $f_n(x_k) = 0$ si $n > k$.

c) Para cada $\theta \in (0,1)$ existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_X$ tal que para cada $h, k \in \mathbb{N}$ con $h \leq k$ si $\alpha_1, \cdots, \alpha_h, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k$ son positivos con $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i = \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i = 1$ entonces $\|\sum_{i=1}^{h} \alpha_i x_i - \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i x_i\| \geq \theta$. Esta condición puede expresarse por: para cada $h, k \in \mathbb{N}$ con $h \leq k$ es

$$dist(co(x_1, \ldots, x_h), co(x_{h+1}, \ldots, x_k)) \geq \theta$$

y es conocida como la condición J de James.

DEMOSTRACIÓN $\boxed{a \Rightarrow b}$ Si X no es reflexivo tenemos que $j(X) \neq X^{**}$. Por tanto, existe $g \in X^{**}$ tal que $g(j(X)) = \{0\}$ y $\|g\| = 1$.

Sean $\theta \in (0,1)$ y $f \in X^{**}$ tales que $\|f\| < 1$ y $g(f) > \theta$. Para cada $x \in X$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| = 1$ tenemos que

$$\theta < g(f) = |g(\alpha f)| = |g(\alpha f - x)| \leq \|g\|\|\alpha f - x\| = \|\alpha f - x\|.$$

Por tanto, $P = \inf\{d(\alpha f, X) : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1\} > \theta$ y se verifica que $\|f\| \in (\theta, 1)$.

Por el teorema de Helly, para $f \in X^{**}$, existe $f_1 \in X^*$ con $\|f_1\| = 1$ y tal que $f(f_1) = \theta$. También por el teorema de Helly, para f_1 existe $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$ y $f_1(x_1) = \theta$. Consideremos, de nuevo, el teorema de Helly para $\{\hat{x_1}, f\} \subset X^{**}, \{0, \theta\}$ y $M = \frac{\theta}{P}$. Para cada $\{a_1, a_2\} \subset \mathbb{K}$ se verifica que

$$|a_1 0 + a_2\theta| = |a_2\theta| \leq \frac{\theta}{P}\|a_1 x_1 + a_2 f\|,$$

ya que si $a_2 \neq 0$ se tiene que

$$P|a_2\theta| \leq \theta|a_2| d(\frac{a_2}{|a_2|} f, X) \leq \theta|a_2| \|\frac{a_2}{|a_2|} f - (\frac{a_1}{|a_2|})(-x_1)\| = \theta\|a_1 x_1 + a_2 f\|.$$

Por tanto, para $\varepsilon = 1 - M$ existe $f_2 \in X^*$ con $\|f_2\| = M + \varepsilon = 1$ y tal que $\hat{x_1}(f_2) = f_2(x_1) = 0$ y $f(f_2) = \theta$.

Consideremos nuevamente el teorema de Helly para $\{f_1, f_2\}$, $\{\theta, \theta\}$ y $M = \|f\| < 1$. Para cada $a_1 a_2 \in \mathbb{K}$ se verifica que

$$|a_1\theta + a_2\theta| = |a_1 f(f_1) + a_2 f(f_2)| \leq \|f\|\|a_1 f_1 + a_2 f_2\|.$$

Por consiguiente, para $\varepsilon = 1 - M$ existe $x_2 \in X$ con $\|x_2\| = M + \varepsilon = 1$ y tal que $f_1(x_2) = \theta$, $f_2(x_2) = \theta$. El segundo paso ya está dado y aunque no sea necesario daremos el tercero para que se observe con claridad cual debería ser el procedimiento inductivo.

Aplicamos el teorema de Helly a $\{\hat{x_1}, \hat{x_2}, f\} \subset X^{**}$, $\{0,0,\theta\}$ y $M = \frac{\theta}{P}$. Si $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{K}$ se verifica que

$$|a_1 0 + a_2 0 + a_3 0| = |a_3\theta| \leq \frac{\theta}{P}\|a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 f\|,$$

ya que si $a_3 \neq 0$ se tiene que

$$P|a_3\theta| \leq \theta|a_3| d(\frac{a_3}{|a_3|}f, X) \leq \theta|a_3|\|\frac{a_3}{|a_3|}f - (\frac{-a_1}{|a_3|}x_1 + \frac{-a_2}{|a_3|}x_2)\| = \theta\|a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 f\|.$$

Por tanto, para $\varepsilon = 1 - M$ existe $f_3 \in X^*$ tal que $\|f_3\| = M + \varepsilon = 1$ y $\hat{x_1}(f_3) = f_3(x_1) = 0, \hat{x_2}(f_3) = f_3(x_2) = 0$ y $f(f_3) = \theta$. De nuevo aplicando el teorema de Helly a $\{f_1, f_2, f_3\}$, $\{\theta, \theta, \theta\}$ y $M = \|f\| < 1$, podemos observar que si $\{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{K}$ se verifica

$$|a_1\theta + a_2\theta + a_3\theta| = |a_1 f(f_1) + a_2 f(f_2) + a_3 f(f_3)| \leq \|f\|\|a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3\|.$$

Por tanto, existirá $x_3 \in X$ con $\|x_3\| = 1$ y tal que $f_1(x_3) = \theta, f_2(x_3) = \theta$ y $f_3(x_3) = \theta$. Procediendo por inducción se obtiene lo deseado.

$b \Rightarrow c$ Sea $\theta \in (0,1)$ y consideremos las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, obtenidas por (b). Sean $h, k \in \mathbb{N}$ tales que $h < k$ y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k$ números positivos con $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i = \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i = 1$. Tenemos que

$$\theta = f_{h+1}(\sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{h} \alpha_i x_i) \leq \|f_{h+1}\| \, \|\sum_{i=1}^{h} \alpha_i x_i - \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i x_i\|.$$

Por tanto, podemos afirmar que $dist(co(x_1, \ldots, x_h), co(x_{h+1} \ldots x_k)) \geq \theta$.

$c \Rightarrow a$ Vamos a demostrar que si c) se verifica para algún $\theta \in (0,1)$ entonces X no es reflexivo. Supongamos que X es reflexivo y que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ tal que para cada $h, k \in \mathbb{N}$ con $h < k$ es

$$d(\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_h), \mathrm{co}(x_{h+1}, \ldots, x_k)) = \theta,$$

donde $\theta \in (0,1)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sean $A_k = \{x_j : j \geq k\}$ y $B_k = co(A_k)$. Tenemos que $\overline{B_k}^{\|\cdot\|} = \overline{B_k}^{w}$ y que $(\overline{B_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados débiles, contenida en el débil compacto B_X. Por tanto, existe $y_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_k}$. Como $y_0 \in \overline{B_1}$, para $\theta/3$, existen $l \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subset [0,1]$ tales que $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1$ y $\|y_0 - \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i\| < \theta/3$. Como $y_0 \in \overline{B_l}$, para $\theta/3$, existen $t \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_{l+1} \ldots \alpha_t\} \subset [0,1]$ tales que $\sum_{i=l+1}^{t} \alpha_i = 1$ y $\|y_0 - \sum_{i=l+1}^{t} \alpha_i x_i\| < \theta/3$. Entonces,

$$\|\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i - \sum_{i=l+1}^{t} \alpha_i x_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i - y_0\| + \|y_0 - \sum_{i=l+1}^{t} \alpha_i x_i\| < \frac{2\theta}{3},$$

lo que no es posible. ∎

Si observamos detenidamente la demostración del teorema anterior entenderemos que si X es un espacio de Banach entonces son equivalentes:

1.- X es reflexivo.

2.- Existen $\theta \in (0,1)$, una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_X y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X^* de modo que $f_n(x_k) = \theta$ si $n \leq k$ y $f_n(x_k) = 0$ si $n > k$ (es el enunciado de b) del teorema anterior donde se ha cambiado "para cada $\theta \in (0,1)$" por "existe $\theta \in (0,1)$").

3.- Existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_X tales que para cada $h, k \in \mathbb{N}$ con $h < k$ se verifica que $dist(\text{co}(x_1, \ldots, x_h), \text{co}(x_{h+1}, \ldots, x_k)) \geq \theta$.

El siguiente teorema está inspirado en el contenido de la demostración de $c \Rightarrow a$ del teorema anterior.

TEOREMA 11.3.3 **[Teorema de Smulian (1939)])**

Sea X un espacio normado. Entonces, X es reflexivo si y sólo si para sucesión $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados convexos no vacíos, donde $C_{n+1} \subset C_n$ para $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que X es reflexivo y que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión del enunciado. Como C_1 es acotado, tenemos que existe $M > 0$ tal que $C_1 \subset MB_X$. Claramente, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de (MB_X, T_w) que tiene la propiedad de intersección finita no vacía (P.I.F). De la compacidad de (MB_X, T_w) se deduce que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que X es tal que para cada sucesión decreciente $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados convexos no vacíos se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

Demostraremos en primer lugar que X tiene que ser completo. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $B_n = \{y_j : j \in \mathbb{N}, j \geq n\}$ y $C_n = \overline{\text{co}}(B_n)$. Tenemos, por hipótesis, que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que diam C_n = diam B_n y, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, se deduce que $\lim_n$ diam $C_n = 0$. Por tanto, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es unitario. Sea $y_0 \in X$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \{y_0\}$. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para probar que $\lim y_n = y_0$ bastará probar que y_0 es punto de aglomeración de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Supongamos que y_0 no es punto de aglomeración de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces existirán $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $B_m \cap B(y_0, \delta) = \emptyset$. Como existe $h_0 \in \mathbb{N}$, $h_0 > m$, tal que $B_{h_0} \subset B(y_{h_0}, \frac{\delta}{3})$, también será $C_{h_0} \subset B(y_{h_0}, \frac{\delta}{3})$. Entonces obtenemos la contradicción de que $y_0 \notin C_{h_0}$.

Finalmente demostraremos que X es reflexivo.

Si X no es reflexivo, como X es de Banach, existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en S_X de modo que si $h, k \in \mathbb{N}$ con $h < k$ es

$$dist(co(x_1, \ldots, x_h), co(x_{h+1}, \ldots, x_k)) \geq \theta.$$

Procederemos ahora como se hizo con la demostración de $c \Rightarrow a$, en el teorema anterior.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $B_n = \{x_j : j \in \mathbb{N}, j \geq n\}$ y $C_n = \overline{\text{co}}(B_n)$. Por hipótesis, existe $y_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Como $y_0 \in C_1$, existe $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\} \subset [0,1]$ con $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i = 1$, de modo que $\|y_0 - \sum_{i=1}^{h} \alpha_i x_i\| < \frac{\theta}{3}$. Como también $y_0 \in C_h$ existe $\{\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k\} \subset [0,1]$ con $\sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i = 1$, de modo que $\|y_0 - \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i x_i\| < \frac{\theta}{3}$.
Deducimos así que

$$\|\sum_{i=1}^{h} \alpha_i x_i - \sum_{i=h+1}^{k} \alpha_i x_i\| \leq \frac{2\theta}{3},$$

lo que no es posible. ∎

Los teoremas de James, sobre las caracterizaciones de la reflexividad, están basados en la caracterización de la compacidad débil de la bola unidad. Una versión más general de estos resultados sería el estudio de la caracterización de la compacidad débil de los subconjuntos acotados débil cerrados. Comenzaremos estudiando el caso separable y posteriormente se estudiará el caso general. Como consecuencias inmediatas se obtendrán diversas caracterizaciones de la reflexividad.

LEMA 11.3.4 **[Lema de R.C. James (1972)]**

Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto no vacío de B_X. Sea $\theta \in (0,1)$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_X^* tal que $\sup\{|f(x)| : x \in A\} \geq \theta$ si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$. Supongamos que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $(0,1]$ con $\sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i = 1$. Entonces existen $\alpha \in [\theta, 1]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_X^* de modo que:

i.- $g_n \in co(f_j : j \in \mathbb{N}, j \geq n)$ *si* $n \in \mathbb{N}$.

ii.- $\sup\left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j(x)| : x \in A \right\} = \alpha.$

iii.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sup\left\{ |\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j(x)| : x \in A \right\} < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j).$

DEMOSTRACIÓN Si $g \in B_{X^*}$ denotaremos $|g|_A = \sup\{|g(x)| : x \in A\}$. Es sencillo comprobar que $|\cdot|_A$ es una seminorma continua en X^* tal que $|g|_A \leq \|g\|$.

Construiremos, por inducción, una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_{X^*} y una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$, convergente a cierto α, de la siguiente forma.

Escogemos una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales positivos convergiendo a cero tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k \varepsilon_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j} < 1 - \theta.$$

Para esto, bastaría con escoger cada ε_k de modo que $\varepsilon_k > 0$ y

$$\varepsilon_k < \frac{1}{2^k}\frac{1}{\beta_k}(1-\theta)\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j.$$

Construiremos inductivamente una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $g_n \in \mathrm{co}(f_j : j \geq n)$ y

$$\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) g_n\right|_A < \alpha_n(1+\varepsilon_n), \tag{11.3.1}$$

donde

$$\alpha_n = \inf\left\{\left|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) g\right|_A : g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq n)\right\}. \tag{11.3.2}$$

Tanto en (11.3.1) como en (11.3.2), por $\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j$ se entenderá que es el cero de X^* si $n = 1$.

Comenzaremos con el proceso inductivo y, para una mejor comprensión, daremos más pasos de lo necesario.

Primer paso, ($n = 1$). Por hipótesis, tenemos que $|g|_A \geq \theta$ para cada $g \in \mathrm{co}(f_n : n \in \mathbb{N})$. Sea $\alpha_1 = \inf\{|g|_A : g \in \mathrm{co}(f_n : n \geq 1)\} \geq \theta > 0$. Tenemos que $\alpha_1 \leq 1$. Sea $g_1 \in \mathrm{co}(f_n : n \geq 1)$ tal que $|g_1|_A < \alpha_1(1+\varepsilon_1)$.

Segundo paso ($n = 2$). Sea $g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 2)$; entonces $\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\right) g$ es una combinación convexa de dos elementos de $\mathrm{co}(f_j : j \geq 1)$ y, por tanto, pertenece a $\mathrm{co}(f_j : j \geq 1)$. Si $\alpha_2 = \inf\left\{|\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right) g|_A : g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 2)\right\}$ se tiene que $\alpha_2 \geq \alpha_1$ y es sencillo comprobar que $\alpha_2 \leq 1$. Sea $g_2 \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 2)$ tal que $|\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right) g_2|_A \leq \alpha_2(1+\varepsilon_2)$.

Tercer paso ($n = 3$). Sea $g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 3)$. Tenemos que

$$(\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) + \left(\sum_{j=3}^{\infty}\beta_j\right) g = \beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_2}{\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j} g_2 + \frac{\sum_{j=3}^{\infty}\beta_j}{\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j} g\right).$$

Observemos que el elemento del último paréntesis es una combinación convexa de dos elementos de $\mathrm{co}(f_j : j \geq 2)$ y, por tanto, pertenece a $\mathrm{co}(f_j : j \geq 2)$. Así pues,

$$\alpha_3 = \inf \left\{ |\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \left(\sum_{j=3}^{\infty} \beta_j \right) g\Big|_A : g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 3) \right\} \geq \alpha_2.$$

Es sencillo comprobar que $\alpha_3 \leq 1$. Sea $g_3 \in \mathrm{co}(f_j : j \geq 3)$ tal que

$$|\beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \left(\sum_{j=3}^{\infty} \beta_j \right) g_3|_A \leq \alpha_3(1 + \varepsilon_3).$$

Supongamos que, por fin, hemos obtenido $g_1, \ldots, g_{n-1} (n \geq 4)$ verificando las relaciones 11.3.1 y 11.3.2. Sea $g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq n)$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) g = \sum_{j=1}^{n-2} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j \right) \left(\frac{\beta_{n-1}}{\sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} g_{n-1} + \frac{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} g \right)$$

y el elemento del último paréntesis es una combinación convexa de dos elementos de $\mathrm{co}(f_j : j \geq n-1)$ y, por tanto, pertenece a $\mathrm{co}(f_j : j \geq n-1)$. Desde este hecho deducimos que

$$\alpha_n = \inf \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) g \right|_A : g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq n) \right\} \geq \alpha_{n-1}$$

y es sencillo comprobar que $\alpha_n \leq 1$. Sea $g \in \mathrm{co}(f_j : j \geq n)$ tal que

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) g_n \right|_A \leq \alpha_n(1 + \varepsilon_n).$$

Como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $[\theta, 1]$, tenemos que existe $\alpha \in [\theta, 1]$ tal que $\lim_n \alpha_n = \alpha$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\alpha_n \leq |\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j \right) g_n|_A < \alpha_n(1 + \varepsilon_n).$$

Tomando límites para $n \to \infty$, se deduce que $|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j|_A = \alpha$.

Finalmente demostraremos que se verifica el punto iii) del enunciado.

Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 2$ tenemos:

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j g_j\right|_A = \left|\frac{\beta_n}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) g_n\right) + \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j\right|_A \leq$$

$$\leq \frac{\beta_n}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\right) g_n|_A + \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A <$$

$$< \frac{\beta_n}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}\alpha_n(1+\varepsilon_n) + \frac{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A =$$

$$= \left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{\beta_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j} + \frac{1}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j}|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A\right).$$

Por tanto, hemos obtenido una cota superior de $|\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j g_j|_A$ en función de $|\sum\limits_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A$. De la misma manera, si $n \geq 3$ se habría obtenido una cota de $|\sum\limits_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A$ en función de $|\sum\limits_{j=1}^{n-2}\beta_j g_j|_A$:

$$|\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j g_j|_A < \sum_{j=n}^{\infty}\beta_j\left(\frac{\beta_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=n-1}^{\infty}\beta_j} + \frac{1}{\sum\limits_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}|\sum_{j=1}^{n-2}\beta_j g_j|_A\right).$$

Por tanto, para $n \geq 2$ y reiterando sucesivas veces (si n es suficientemente grande), se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right|_A &< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \left(\frac{\beta_n \alpha_n (1+\varepsilon_n)}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=n}^{\infty} \beta_j} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\beta_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\sum\limits_{j=n}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} + \frac{1}{\sum\limits_{j=n-1}^{\infty} \beta_j} \left|\sum_{j=1}^{n-2} \beta_j g_j\right|_A \right) \\
&< \cdots < \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \left(\sum_{k=2}^{n} \left\{ \frac{\beta_\alpha \alpha_k (1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right\} + \frac{1}{\sum\limits_{j=2}^{\infty} \beta_j} |\beta_1 g_1|_A \right) \\
&< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta_k \alpha_k (1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right)
\end{aligned}
$$

Esta desigualdad es válida para el caso $n = 1$ ya que en esa situación equivale a $|\beta_1 g_1|_A < \sum\limits_{j=2}^{\infty} \beta_j \dfrac{\beta_1 \alpha_1 (1+\varepsilon_1)}{\sum\limits_{j=2}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j} = \beta_1 \alpha_1 (1+\varepsilon_1)$.

Finalmente, como $\alpha_k \leq \alpha$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\right|_A &< \alpha \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\beta_k (1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right) \\
&< \alpha \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\beta_k}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty} \beta_j} \right\} + (1-\theta) \right),
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\beta_k}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\} = |\sum_{j=1}^{n}\beta_j g_j|_A \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j - \sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j} - \frac{1}{\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j} - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j} = \frac{1}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j} - 1.$$

Por tanto,

$$|\sum_{j=1}^{n}\beta_j g_j|_A < \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j} - 1 + (1-\theta)\right) = \alpha(1-\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j).$$

∎

Teorema 11.3.5 **[Teorema de R.C. James (1972)]**

Sea X un espacio de Banach. Si A es un subconjunto no vacío de B_X que es débil cerrado y separable entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) El conjunto A no es débil compacto.

b) Existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_{X^*} tales que $\lim f_n(x) = 0$ si $x \in A$ y $\sup\{|f(x)| : x \in A\} \geq \theta$ si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$.

c) Existe $\theta \in (0,1)$ de modo que para cada sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(0,1]$ con $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n = 1$ existen $\alpha \in [\theta, 1]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} tales que:

i. $\lim_n g_n(x) = 0$ *si* $x \in A$.

ii. $\sup\left\{|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j g_j(x)| : x \in A\right\} = \alpha.$

iii. $\sup\left\{|\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j g_j(x)| : x \in A\right\} < \alpha(1-\theta\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

d) Existe $f \in X^*$ tal que $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$ *no se alcanza.*

DEMOSTRACIÓN *a) ⇒ b)* Supongamos que A no es débil compacto. Sea $E = [A]$ y sea F el dual de E, dotado con la norma $\|h\|_F = \sup\{|h(x)| : x \in A\}$ (es sencillo comprobar que $\|\cdot\|_F$ es efectivamente una norma en F). Denotaremos por E^* el dual de E con la norma usual.

Consideremos la aplicación $\varphi : A \to F^*$ definida por $\varphi(x)(h) = h(x)$. Es claro que φ es inyectiva y que para cada $x \in A$ es $\varphi(x)$ una aplicación lineal de F en $\mathbb{K}$ tal que $|\varphi(x)(h)| = |h(x)| \leq \|h\|_F$. Por tanto, $\varphi(A) \subset B_{F^*}$. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red de A y sea $x_0 \in A$. Es sencillo entender que $w\lim_\alpha x_\alpha = x_0$ si y sólo si $*\text{-}w\lim_\alpha \varphi(x_\alpha) = \varphi(x_0)$ en F^*. Esto significa que φ es un homeomorfismo de (A, T_w) en $(\varphi(A), T_{*-w})$. Por tanto, $\varphi(A)$ es un subconjunto de B_{F^*} que no es $*$-w compacto; por tanto tampoco será $*$-w cerrado.

Fijamos un elemento p de $cl^{*-w}(\varphi(A))$ que no pertenezca a $\varphi(A)$. Observemos que no existe $x \in E$ tal que $p(h) = h(x)$ para cada $h \in F$. En efecto, si existiese $x \in E$ tal que $p(h) = h(x)$ si $h \in F$, entonces será $x \notin A$. Para p existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ de A de modo que $*\text{-}w\lim_\alpha \varphi(x_\alpha) = p$. En esta situación, para cada $h \in F$ será $\lim_\alpha \varphi(x_\alpha)(h) = \lim_\alpha h(x_\alpha) = p(h) = h(x)$. Esto significa que $w\lim_\alpha x_\alpha = x$ y que $x \in \overline{A}^w \setminus A$, lo que contradice el que A sea débil cerrado.

En particular también se deduce que $p \neq 0$ y que $\|p\|_{F^*} > 0$. Sea j la inyección canónica de E en E^{**}. Como E es completo, tenemos que $j(E)$ es cerrado en E^{**} y hemos visto que $p \notin j(E)$. Se deduce que $d(p, j(E)) > 0$ (aquí d es la distancia relativa a la norma de E^{**}). Sea $M > 0$ tal que $M < d(p, j(E))$ y sea $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto numerable y denso de A. Si $n \in \mathbb{N}$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}\} \subset \mathbb{K}$ se verifica que

$$|\alpha_1 M + \sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j 0| = |\alpha_1| M \leq \frac{M}{d(p, j(E))} \|\alpha_1 p + \sum_{j=2}^{n-1} \alpha_j j(a_j)\|.$$

Del teorema de Helly se deduce que existe $g_n \in E^*$ de modo que

$$\|g_n\|_{E^*} = \frac{M}{d(p, j(E))} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{d(p, j(E))}\right) < 1, \tag{11.3.3}$$

$$p(g_n) = M, \tag{11.3.4}$$

$$j(a_j)(g_n) = g_n(a_j) = 0, \tag{11.3.5}$$

para $j \leq n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea f_n una extensión, usando el teorema de Hahn-Banach, de g_n a X con $\|f_n\| = \|g_n\| < 1$. Si fijamos $j \in \mathbb{N}$, es claro que $\lim_n f_n(a_j) = \lim_n g_n(a_j) = 0$. Por la densidad de $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ en A, se deduce que $\lim_n f_n(x) = 0$ para $x \in A$. Si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ y g es la restricción de f a E, tenemos que

$$M = p(g) \leq \|p\|_{F^*} \sup\{|g(x)| : x \in A\} = \|p\|_{F^*} \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Tenemos que $0 < M = p(g_1) \leq \|p\|_{E^{**}} \|g_1\|_{E^*} < \|p\|_{F^*}$ y, por tanto, si $\theta = \dfrac{M}{\|p\|_{F^*}}$ se verifica $\theta \in (0, 1)$.

b) $\Rightarrow$ *c)* Sea $\theta \in (0,1)$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_{X^*} de modo que se verifica b). Consideremos el $\alpha \in [\theta, 1]$ y la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} que nos garantiza el lema anterior. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ se verifica $g_n \in co(f_j : j \geq n)$ y si $x \in A$ se cumple $\lim_n f_n(x) = 0$. De aquí se deduce que $\lim_n g_n(x) = 0$ si $x \in A$.

c) $\Rightarrow$ *d)* Fijamos una sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$. Sea $\alpha \in [\theta, 1]$ y sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_{X^*} de modo que se verifica lo enunciado en c). Sea $g = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j$. Probaremos que no se alcanza $\sup\{|g(x)| : x \in A\}$.

Sea $x_0 \in A$; tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|g_j(x_0)| < \alpha\theta$ si $j > n$. Entonces:

$$\begin{aligned}
|g(x_0)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j(x_0)\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j(x_0)\right| + \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j |g_j(x_0)| \\
&< \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j(x)\right| : x \in A\right\} + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha\left(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) + \alpha\theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j = \alpha.
\end{aligned}$$

d) $\Rightarrow$ *a)* Si A es débil compacto y $f \in X^*$, tenemos que la aplicación $|f| : (A, T_w) \to \mathbb{K}$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ es continua y por tanto es seguro que se alcanza $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$. ■

NOTA 11.3.6 1- Como consecuencia del teorema anterior, y de su demostración, probaremos el siguiente resultado sobre reflexividad, que se debe a R.C. James (1957).

Sea X un espacio de Banach separable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) X no es reflexivo.

b) Si $\theta \in (0,1)$ entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} tal que $\lim_n f_n(x) = 0$ si $x \in X$ y $d(0, co(x_n : n \in \mathbb{N})) \geq \theta$.

c) Si $\theta \in (0,1)$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ entonces existen $\alpha \in [\theta,1]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} tales que

i. $\lim_n g_n(x) = 0$ *si* $x \in X$

ii. $\|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j g_j\| = \alpha$.

iii. $\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j\| < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

d) Existe $f \in X^*$ tal que f no alcanza la norma.

Para la demostración de este resultado bastará con probar que $a) \Rightarrow b)$, ya que las implicaciones $b) \Rightarrow c)$, $c) \Rightarrow d)$, y $d) \Rightarrow a)$ se pueden deducir del teorema anterior para el caso en que $A = B_X$. Obsérvese además que este resultado sigue siendo cierto si en $b)$ y en $c)$ se cambia "Si $\theta(0,1)\dots$" por "existe $\theta \in (0,1)\dots$" (por tanto también será cierto si el cambio se hace sólo en $b)$ o sólo en $c)$).

Pasamos pues a demostrar que $a) \Rightarrow b)$.

Supongamos que X no es reflexivo y que $\theta \in (0,1)$. Tenemos que $j(X)$ es un subespacio propio de X^{**} y, por tanto, existe $x^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que $\theta < d(x^{**}, j(X))$. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto numerable y denso en X. Construiremos una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifique:

(1) $x^{**}(f_n) = \theta$ y

(2) $f_n(x_j) = 0$ si $n \geq j$.

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ y sea $M = \dfrac{\theta}{d(x^{**}, j(X))}$. Tenemos que $M \in (0,1)$ y si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ se verifica que

$$\theta = Md(x^{**}, j(X)) \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j j(x_j) + x^{**} \right\|.$$

Sean $c_1 = 0, \cdots, c_n = 0$ y $c_{n+1} = \theta$. Si $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, se verifica que $\left| \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j c_j \right| = |\alpha_{n+1}|\theta$ y si $\alpha_{n+1} \neq 0$ se cumple que

$$\theta \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_{n+1}} j(x_j) + x^{**} \right\|.$$

Deducimos así que $|\alpha_{n+1}|\theta \leq M \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j j(x_j) + \alpha_{n+1} x^{**} \right\|$.

Podemos aplicar el teorema de Helly, con $\varepsilon = 1 - M$, y obtenemos que existe un $f_n \in X^*$ tal que $\|f_n\| = M + \varepsilon = 1$ y $j(x_1)(f_n) = f_n(x_1) = 0, \dots, j(x_n)(f_n) = f_n(x_n) = 0$ y $x^{**}(f_n) = \theta$.

De esta manera obtenemos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} verificando (1) y (2). Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x^{**}(f_n) = \theta$, deducimos que, para $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$, $\|f\| \geq |x^{**}(f)| = \theta$. Por tanto, $d(0, co(f_n : n \in \mathbb{N}) \geq \theta$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se verifica que $\lim_n f_n(x_k) = 0$ y de la densidad de $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ en X se deduce que $\lim f_n(x) = 0$, si $x \in X$.

2.- En lo que sigue trataremos de estudiar la situación que surge en el caso en que X es un espacio de Banach no necesariamente separable. Para ello, necesitaremos un lema técnico sustancialmente más complejo que el que se probó anteriormente. Para abordar este lema introduciremos la siguiente notación:

Sea X un espacio normado real y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de X^*. Denotamos

$$L(f_n) = \{f \in X^* : f(x) \leq \limsup_n f_n(x), x \in X\},$$
$$V(f_n) = \{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} : g_n \in co(f_j : j \geq n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Observemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V(f_n)$ y que cada elemento de $V(f_n)$ es una sucesión contenida en la bola de centro el cero y radio $\sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$.

Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V(f_n)$ se verifica que $V(g_n) \subset V(f_n)$ y $L(g_n) \subset L(f_n)$. Si $f \in L(f_n)$ se verifica que, para cada $x \in X$, $|f(x)| \leq \sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}\|x\|$. Por tanto, $\|f\| \leq \sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$. También se verifica que $\lim_n \inf f_n(x) \leq f(x)$, si $x \in X$, ya que $\liminf_n f_n(x) = -\limsup_n f_n(-x)$.

Demostraremos que $V(f_n)$ es distinto del vacío. En efecto, definimos en X la aplicación $p(x) = \limsup f_n(x)$. Es claro que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ y que $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, si $\alpha > 0$. Sea g la aplicación definida en el subespacio $\{0\}$ por $g(0) = 0$. Tenemos que $g(0) = p(0)$ y, por el teorema de Hahn-Banach, existe una aplicación lineal f de X en $\mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq p(x)$, para $x \in X$. Tenemos que $|f(x)| \leq \sup\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}\|x\|$ y, por tanto, $f \in X^*$. Es claro que $f \in L(f_n)$.

LEMA 11.3.7 **[Lema de R.C. James (1972)]**

Sea X un espacio normado real y sea A un subconjunto no vacío y equilibrado de B_X. Supongamos que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n = 1$. Supongamos también que $\theta \in (0,1)$ y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de B_{X^*} tal que $\sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} \geq \theta$ si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ y $g \in L(f_n)$. Entonces, existen $\alpha \in [\theta, 2]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_{X^*} de modo que si $g \in L(g_n)$ se verifica:

a) $\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j(g_j - g)(x)\right| : x \in A\right\} = \alpha.$

b) $\sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j(g_j - g)(x)\right| : x \in A\right\} < \alpha\left\{(1-\theta)\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right\}$ *si* $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN Utilizaremos de nuevo la notación $|f|_A = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$. Tenemos que $|\cdot|_A$ es una seminorma en X^* y $|f|_A \leq \|f\|$, para $f \in X^*$.

Sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos convergente a cero y tal que que

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\beta_k\varepsilon_k}{\sum_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum_{j=k}^{\infty}\beta_j} < 1-\theta.$$

Por un procedimiento inductivo, obtendremos una sucesión de escalares $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y las siguientes sucesiones de X^* : $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$; $(f_j^0)_{j\in\mathbb{N}}, (f_j^1)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (f_j^n)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots$;

$(h_j^1)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (h_j^n)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots$, de modo que $(f_j^0)_{j\in\mathbb{N}}$ esté en B_X^* y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifique:

(1) g_n y las sucesiones $(f_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(h_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ están en B_{X^*}.

(2) $(h_j^n)_{j\in\mathbb{N}} \in V(f_j^{n-1})$.

(3) $(f_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(h_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$.

(4) $g_n \in co(f_n^{n-1}, f_{n+1}^{n-1}, \ldots)$.

(5) $\alpha_n \in [\theta, 2]$ y

(6) $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$ si $n \geq 2$.

Para una mejor comprensión del procedimiento que sigue daremos los pasos inductivos $n = 1$ y $n = 2$, antes de proceder con el paso general. Procedemos para $n = 1$. Fijamos $g \in co(f_1^0, f_2^0, \ldots)$ y $(h_j)_{j\in\mathbb{N}} \in V(f_j^0)$. Tanto g como la sucesión $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ están en B_{X^*}, ya que $(f_j^0)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de B_{X^*}.

Definimos $S_1(g, (h_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \{|g - g'|_A : g' \in L(h_j)\}$, que es un subconjunto no vacío de $[0, 2]$. Por la hipótesis del lema, será $\sup S_1(g, (h_j)) \geq \theta$.

Sea

$$\alpha_1 = \inf\left\{\sup S_1(g, (h_j)) : g \in co(f_1^0, f_2^0, \ldots),\ \text{y } (h_j) \in V(f_j^0)\right\}$$

Tenemos que $\alpha_1 \in [\theta, 2]$ y escogemos $g_1 \in co(f_1^0, f_2^0, \ldots)$ y $(h_j^1) \in V(f_j^0)$ de modo que

$$\alpha_1 \leq \sup S_1(g_1, (h_j^1)) \leq \alpha_1(1+\varepsilon_1).$$

Sea $g_1' \in L(h_j^1)$ tal que $\alpha_1(1-\varepsilon_1) < |g_1 - g_1'|_A$. Como A es equilibrado, es seguro que existe $x_1 \in A$ tal que $\alpha_1(1 - \varepsilon_1) < g_1(x_1) - g_1'(x_1)$. Como (h_j^1) es de B_{X^*}, se tiene que $\liminf_j h_j^1(x_1) \in [-1, 1]$. Sea (f_j^1) una subsucesión de (h_j^1) de modo que $\liminf_j h_j^1(x_1) = \lim_j f_j^1(x_1)$.

Procedemos para $n = 2$ (será más laborioso). Fijamos $g \in co(f_2^1, f_3^1, \ldots)$ y $(h_j) \in V(f_j^1)$. Tanto g como la sucesión (h_j) estarán en B_X^*, ya que (f_j^1) es una sucesión de B_{X^*}.

Definimos

$$S_2(g, (h_j)) = \left\{ |\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty} \beta_j\right) - g'|_A : g' \in L(h_j) \right\},$$

que es un subconjunto de $[0, 2]$.

Sea $\alpha_2 = \inf\left\{\sup S_2(g, (h_j)) : g \in co(f_2^1, f_3^1, \ldots), (h_j) \in V(f_j^1)\right\}$. Tenemos que $V(f_j^1) \subset V(f_j^0)$, ya que (f_j^1) es una subsucesión de (h_j^1), que es un elemento de $V(f_j^0)$. Además, si $g \in co(f_2^1, f_3^1, \ldots)$ se verifica que $\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty} \beta_j\right) g$ es un elemento de $\mathrm{co}(f_1^0, f_2^0, \dots)$, por ser combinación convexa de dos elementos de este conjunto.

Si tenemos en cuenta que el ínfimo de un conjunto es menor o igual que el de un subconjunto suyo, quedará claro que $\alpha_1 \le \alpha_2$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\le \inf\left\{\sup S_1(g_0,(h_j)) : g_0 = \beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_1\right) g, g \in co(f_2^1, f_3^1, \dots), (h_j) \in V(f_j^1)\right\} \\
&= \inf\left\{\sup\left\{|\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right) g - g'|_A : g' \in L(h_j)\right\} : g \in co(f_2^1, f_3^1, \dots), (h_j) \in V(f_j^1)\right\} \\
&= \inf\left\{\sup S_2(g,(h_j)) : g \in co(f_2^1, f_3^1, \dots), (h_j) \in V(f_j^1)\right\} = \alpha_2.
\end{aligned}$$

Escogemos $g_2 \in co(f_2^1, f_3^1, \dots)$ y $(h_j^2) \in V(f_j^1)$ de modo que $\alpha_2 \le \sup S_2(g_2,(h_j^2)) \le \alpha_2(1+\varepsilon_2)$. Sea $g_2' \in L(h_j^2)$ tal que

$$\alpha_2(1-\varepsilon_2) < |\beta_1 g_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right) g_2 - g_2'|_A.$$

Como A es equilibrado, es seguro que existe $x_2 \in A$ tal que $\alpha_2(1-\varepsilon_2) < (\beta_1 g_1 + \sum_{j=2}^{\infty}\beta_j g_2 - g_2')(x_2)$.

Como (h_j^2) es de B_{X^*}, se tiene que $\liminf_j h_j^2(x_2) \in [-1,1]$. Sea (f_j^2) una subsucesión de (h_j^2) de modo que $\liminf_j h_j^2(x_2) = \lim_j f_j^2(x_2)$.

Supongamos que, siguiendo el proceso anterior, hemos obtenido $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$; $g_1, \dots, g_{m-1}$; $(f_j^1), \dots, (f_j^{m-1})$; $(h_j^1), \dots, (h_j^{m-1})$ y que se verifican las propiedades desde (1) a (6). Fijamos $g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots)$ y $(h_j) \in V(f_j^{m-1})$. Tanto g como la sucesión (h_j) están en B_{X^*}, ya que la sucesión (f_j^{m-1}) es de B_{X^*}. Sea

$$S_m(g,(h_j)) = \sup\left\{|\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right) g - g'|_A : g' \in L(h_j)\right\},$$

que es un subconjunto no vacío de $[0,2]$.

Sea $\alpha_m = \inf\left\{\sup S_m(g,(h_j)) : g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots), (h_j) \in V(f_j^{m-1})\right\}$. Tenemos que $V(f_j^{m-2}) \supset V(f_j^{m-1})$, ya que (f_j^{m-1}) es una subsucesión de (h_j^{m-1}), que es un elemento de $V(f_j^{m-2})$. Además, si $g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots)$ se verifica que

$$\frac{\beta_{m-1}}{\sum_{j=m-1}^{\infty}\beta_j} g_{m-1} + \frac{\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j}{\sum_{j=m-1}^{\infty}\beta_j} g$$

es un elemento de $\mathrm{co}(f_{m-1}^{m-2}, f_m^{m-2}, \dots)$, por ser combinación convexa de dos elementos de este conjunto. En efecto, $g_{m-1} \in co(f_{m-1}^{m-2}, f_m^{m-2}, \dots)$ por las hipótesis de inducción y como $(f_j^{m-1}) \in V(f_j^{m-2})$ se deduce que g también es del conjunto en cuestión.

Veremos que $\alpha_{m-1} \leq \alpha_m$.

$$\begin{aligned}
\alpha_{m-1} &\leq \inf\{\sup S_{m-1}(g_0,(h_j)) : g_0 = \frac{1}{\sum_{j=m-1}^{\infty}\beta_j}\left(g_{m-1} + (\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j)g\right), \\
&\qquad g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots), (h_j) \in V(f_j^{m-1})\} \\
&= \inf\{\sup\{\left|\sum_{j=1}^{m-2}\beta_j g_j + \left(\sum_{j=m-1}^{\infty}\beta_j\right) g_0 - g'\right|_A : g' \in L(h_j)\} : \\
&\qquad g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots), (h_j) \in V(f_j^{m-1})\} \\
&= \inf\left\{S_m(g,(h_j)) : g \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots)(h_j) \in V(f_j^{m-1})\right\} = \alpha_m.
\end{aligned}$$

Escogemos $g_m \in co(f_m^{m-1}, f_{m+1}^{m-1}, \dots)$ y $(h_j^m) \in V(f_j^{m-1})$ de modo que $\alpha_m \leq \sup S_m(g_m,(h_j^m)) \leq \alpha_m(1+\varepsilon_m)$ y sea $g'_m \in L(h_j^m)$ tal que

$$\alpha_m(1-\varepsilon_m) < \left(\sum_{j=1}^{m-1}\beta_1 g_j + \left(\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right) g_m - g'_m\right)(x_m).$$

Como (h_j^m) es de B_{X^*}, se tiene que $\liminf_j h_j^m(x_m) \in [-1,1]$. Sea (f_j^m) una subsucesión de (h_j^m) de modo que $\liminf_j h_j^m(x_m) = \lim_j f_j^m(x_m)$. Con esto concluimos el proceso inductivo.

Vamos a demostrar ahora que si $j \in \mathbb{N}$ entonces $L(g_j) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} L(f_j^n)$. Sea $n \geq 0$ y sea $j \in \mathbb{N}$, tenemos (de (2),(3) y (4)):

$$\begin{aligned}
g_j &\in co(f_j^{j-1}, f_{j+1}^{j-1}, \dots) \subset co(h_j^{j-1}, h_{j+1}^{j-1}, \dots) \\
&\subset co(f_j^{j-2}, f_{j+1}^{j-2}, \dots) \subset co(h_j^{j-2}, h_{j+1}^{j-2}, \dots) \\
&\subset \dots \subset co(f_j^0, f_{j+1}^0, \dots).
\end{aligned}$$

Por tanto $g_j \in co(f_j^n, f_{j+1}^n, \dots)$ si $n < j$ y deducimos que $\limsup_j g_j(x) \leq \limsup_j f_j^n(x)$ si $x \in X$. Por consiguiente, $L(g_j) \subset L(f_j^n)$.

Demostraremos que para $j \in \mathbb{N}$ es $\bigcap_{n=0}^{\infty} L(f_j^n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} L(h_j^n)$. En efecto, bastará con probar que si $n \in \mathbb{N}$ es $L(f_j^n) \subset L(h_j^n)$. Como (f_j^n) es una subsucesión de (h_j^n) es claro que $\limsup_j f_j(x) \leq \limsup_j h_j^n(x)$ si $x \in X$.

Probaremos ahora que si $g \in L(g_j)$ y $m \in \mathbb{N}$ entonces existe $x_m \in A$ tal que

$$\alpha_m(1-\varepsilon_m) < \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j g_j(x_m) + \left(\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right) g_m(x_m) - g(x_m).$$

En efecto, sabemos que existen $x_m \in A$ y $g'_m \in L(h_j^m)$ tales que

$$\alpha_m(1-\varepsilon_m) < \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j g_j(x_m) + \left(\sum_{j=m}^{\infty}\beta_j\right) g_m(x_m) - g'_m(x_m)$$

y bastaría probar que $g(x_m) \leq g'_m(x_m)$.

Tenemos que $g \in L(f_j^m)$ y $g(x) \leq \limsup_j f_j^m(x)$. Si $x = x_m$ sabemos que $\lim_j f_j^m(x_m) = \liminf_j h_j^m(x)$. Como g también pertenece a $L(h_j^m)$ se tiene que $\liminf_j h_j^m(x) \leq g(x)$, para $x \in X$. Deducimos que $g(x_m) = \lim_j f_j^m(x_m) = \liminf_j h_j^m(x)$ y como $g'_m \in L(h_j^m)$ será $\liminf_j h_j^m(x^m) \leq g'_m(x_m)$.

Por tanto queda probado que si $g \in L(g_j)$ (será $g \in L(h_j^n)$) y $n \geq 2$ entonces

$$\alpha_n(1-\varepsilon_n) < |\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j g_j + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j\right)(g_n - g)|_A < \alpha_n(1+\varepsilon_n).$$

Observemos que, como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente en $[\theta, 2]$, existe un $\alpha \in [\theta, 2]$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$. Tomando límites para $n \to \infty$ en la última desigualdad deducimos que $\left|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(g_j - g)\right|_A = \alpha$.

Finalmente sólo nos queda probar que

$$|\sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)|_A < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j).$$

Procederemos a realizar esta prueba, aunque es idéntica a la que se hizo en el lema anterior si se sustituye g_j por $g_j - g$ para $j \in \mathbb{N}$.

Si $n \geq 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)\right|_A &= \left| \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left\{ \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) + \left(\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j\right)(g_n - g) \right\} + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) \right|_A \\
&\leq \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) + \sum_{j=n}^{\infty} (g_n - g) \right|_A + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) \right|_A \\
&< \frac{\beta_n}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \alpha_n(1+\varepsilon_n) + \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) \right|_A \\
&= \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right) \left(\frac{\beta_n \alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \right) + \frac{1}{\sum_{j=n}^{\infty} \beta_j} \left| \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j(g_j - g) \right|_A
\end{aligned}$$

Por tanto para $n \geq 2$ y reiterando sucesivas veces (si n es suficientemente grande) se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)\right|_A \\
&\leq \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right)\left(\frac{\beta_n\alpha_n(1+\varepsilon_n)}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j \sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j} + \frac{\beta_{n-1}\alpha_{n-1}(1+\varepsilon_{n-1})}{\sum\limits_{j=n}^{\infty}\beta_j \sum\limits_{j=n-1}^{\infty}\beta_j} + \frac{1}{\sum\limits_{j=n-1}^{\infty}\beta_j}\left|\sum_{j=1}^{n-2}\beta_j(g_j - g)\right|_A\right) \\
&< \cdots < \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right)\left(\sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{\beta_k\alpha_k(1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\} + \frac{1}{\sum\limits_{j=2}^{\infty}\beta_j}|\beta_1(g_1 - g)|_A\right) \\
&< \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k\alpha_k(1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j \sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right)
\end{aligned}
$$

Esta desigualdad también es válida en el caso $n = 1$ ya que entonces equivale a

$$|\beta_1(g_1 - g)|_A < \left(\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\right)\frac{\beta_1\alpha_1(1+\varepsilon_1)}{\sum\limits_{j=2}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j} = \beta_1\alpha_1(1+\varepsilon_1).$$

Finalmente, como para cada $k \in \mathbb{N}$ es $\alpha_k \leq \alpha$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j(g_j - g)\right|_A &< \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k(1+\varepsilon_k)}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right) \\
&< \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\beta_k}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\} + (1-\theta)\right),
\end{aligned}
$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\beta_k}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty}\beta_j\sum\limits_{j=k}^{\infty}\beta_j}\right\} = \frac{1}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j} - 1.$$

Por tanto,

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j g_j\right|_A < \alpha\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j\right)\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j} - 1 + (1-\theta)\right) = \alpha(1-\theta\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j),$$

para $n \in \mathbb{N}$. ∎

TEOREMA 11.3.8 **[Teorema de James (1972)]**
Sea X un espacio de Banach real. Sea A un subconjunto equilibrado y débil cerrado de B_X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) El conjunto A no es débilmente compacto.

(b) Existen $\theta \in (0,1)$, $B \subset A$ y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} para los cuales se verifica que $\sup\{|(f-g)(x) : x \in A\} \geq \theta$, para cada $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ y $g \in B^a$ (el anulador de B), y $\lim_n f_n(x) = 0$ si $x \in B$.

(c) Existe $\theta \in (0,1)$ tal que si $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $(0,1)$ con $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j = 1$, entonces existen $\alpha \in [\theta, 2]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} tales que si $g \in L(g_n)$ se verifica:

i) $\sup\left\{|\sum\limits_{j=1}^{\infty}\beta_j(g_j-g)(x)| : x \in A\right\} = \alpha.$

ii) $\sup\left\{|\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j(g_j-g)(x)| : x \in A\right\} < \alpha(1-\theta\sum\limits_{j=n+1}^{\infty}\beta_j)$, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(d) Existe $f \in X^*$ tal que $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$ no se alcanza.

DEMOSTRACIÓN $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que A no es débil compacto. Tenemos que existe un subespacio cerrado y separable F de X tal que $A \cap F$ no es débil compacto. Del teorema anterior se deduce que existen $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_{F^*} de modo que $\lim_n h_n(x) = 0$ si $x \in A \cap F$ y $\sup\{|h(x)| : x \subset A \cap F\} \geq \theta$ si $h \in co(h_n : n \in \mathbb{N})$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una aplicación f_n de B_{X^*} que sea extensión, por el teorema de Hahn-Banach, de h_n a X. Sea $B = A \cap F$, se tiene que si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ entonces la restricción de f a F coincide con un elemento h de $\mathrm{co}(h_n : n \in \mathbb{N})$ y por tanto $\sup\{|f(x)| : x \in B\} \geq \theta$. Por otra parte es claro que $\lim_n f_n(x) = 0$ si $x \in B$. Sea $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ y sea $g \in B^a$, entonces

$$\sup\{|(f-g)(x)| : x \in A\} \geq \sup\{|(f-g)(x)| : x \in B\} = \sup\{|f(x)| : x \in B\} \geq \theta.$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Si $f \in L(f_n)$ y $x \in X$ tenemos que $\lim\inf f_n(x) \leq f(x) \leq \lim\sup f_n(x)$. Si $x \in B$ se verifica que $\lim f_n(x) = 0$ y deducimos que $f(x) = 0$. Por tanto, $L(f_n) \subset B^a$. Con las hipótesis de (b), podemos aplicar el lema anterior y concluir con la validez de (c).

$c \Rightarrow d$ Sea $M > 0$ tal que $M < \frac{\theta^2}{2}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\beta_n = \frac{2-M}{M}(\frac{M}{2})^n$. Tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$. Sean $\alpha \in [\theta, 2]$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_{X^*} de modo que se verifiquen i) y ii) de (c) y sea $f = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(g_j - g)$ donde $g \in L(g_j)$.

Demostraremos que $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$ no se alcanza. Sea $x_0 \in A$; como $\lim\inf_j g_j(x_0) \leq g(x_0)$, tenemos que $\lim\inf_j (g_j - g)(x_0) \leq 0$. Como $\theta^2 - 2M > 0$ y $\alpha \leq \theta$ deducimos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(g_{n+1} - g)(x_0) < \theta^2 - 2M \leq \theta\alpha - 2M$. Por otra parte, si $x \in B_X$ se verifica $g(x) \leq \lim\sup_j g_j(x) \leq 1$ y deducimos que $\|g\| \leq 1$.

Por otro lado se cumple,

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(g_j - g)(x_0) \\
&< \sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)(x_0) + (\alpha\theta - 2M)\beta_{n+1} + \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j(g_j - g)(x_0) \\
&\leq \sup\left\{ |\sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)(x)| : x \in A \right\} + (\alpha\theta - 2M)\beta_{n+1} + 2\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j \\
&< \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j) + (\alpha\theta - 2M)\beta_{n+1} + 2\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j.
\end{aligned}$$

Un sencillo cálculo nos permite comprobar que

$$\sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j = \frac{1}{2}M \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j < M \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j.$$

y que

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &< \alpha - (\alpha\theta - 2M) \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j + (\alpha\theta - 2M)\beta_{n+1} \\
&= \alpha - (\alpha\theta - 2M) \sum_{j=n+2}^{\infty} \beta_j < \alpha = \sup\left\{ |\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j (g_j - g)(x)| : x \in A \right\} \\
&= \sup\{|f(x)| : x \in A\}.
\end{aligned}
$$

Como A es equilibrado, tenemos que $-x_0 \in A$ y, razonando con $-x_0$ como se hizo con x_0, obtenemos que $-f(x_0) < \sup\{|f(x)| : x \in A\}$. Por tanto $|f(x_0)| < \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ y deducimos que no se alcanza el $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea $f \in X^*$ tal que $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$ no se alcanza. Tenemos que $|f|$ define una aplicación continua de (A, T_w) en $\mathbb{R}$ y por tanto A no puede ser débil compacto. ∎

Nota 11.3.9

1.- Como consecuencia casi inmediata del último teorema tenemos el siguiente resultado conocido como teorema de la compacidad débil de James (1964).

Sea X un espacio de Banach y sea A un subconjunto no vacío y débil cerrado de X. Entonces son equivalentes.

a) El conjunto A es débil compacto.

b) Para cada $f \in X^*$ se alcanza el supremo de $|f|$ en A.

c) Para cada aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua se alcanza el supremo de $|f|$ en A.

d) Para cada aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua se alcanza el supremo de f en A.

Las implicaciones $a) \Rightarrow b)$, $a) \Rightarrow c)$ y $a) \Rightarrow d)$ son ahora evidentes. Para la prueba del resto de las implicaciones podemos suponer que A es acotado, ya que de lo contrario existiría $f \in X^*$ tal que f no es acotada en A. También es claro que podemos asumir que $A \subset B_X$.

Denotaremos por $X_{\mathbb{R}}$ al espacio normado real correspondiente a X (será el propio X si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y recordemos que la topología débil de $X_{\mathbb{R}}$ coincide con la topología débil de X.

$b) \Rightarrow a)$ Sea $B = \bigcap_{f \in X^*} \{x \in X : |f(x)| \leq \sup\{|f(x)| : x \in A\}\}$.

Es sencillo comprobar que B es equilibrado y débilmente cerrado con $A \subset B$. Por ser B equilibrado, es fácil ver que si $f \in X^*$ entonces

$$\sup\{|Ref(x)| : x \in B\} = \sup\{|f(x) : x \in B\}.$$

Sea f una aplicación lineal y continua de $X_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$ tal que f no es cero en A. La aplicación definida por $g(x) = f(x) - if(ix)$ es de X^*. Por hipótesis, existe $x_0 \in A$ tal que $|g(x_0)| = \sup\{|g(x)| : x \in A\}$. Para cada $x \in X$ se verifica $|g(x)| \leq |g(x_0)|$. Sea θ el argumento de $g(x_0)$; se tiene que $g(x_0) = |g(x_0)|e^{i\theta}$ y se verifica que si $z_0 = e^{-i\theta}x_0$ entonces $z_0 \in B$ y si $x \in B$ es $|f(x)| \leq |g(x)| \leq |g(x_0)| = g(z_0) = f(z_0)$. Esto significa que $|f|$ alcanza el supremo en B y por tanto que B es débilmente compacto en $X_{\mathbb{R}}$. Así pues, B es un conjunto débilmente compacto en X y, como A es débilmente cerrado con $A \subset B$, deducimos que A es débilmente compacto.

$c) \Rightarrow a)$ | Según el teorema anterior, podemos afirmar que A es un subconjunto débilmente compacto de $X_{\mathbb{R}}$; por tanto A es débilmente compacto en X.

$d) \Rightarrow c)$ | Sea f una aplicación lineal y continua de $X_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\sup\{|f(x)| : x \in A\} = \max\{\sup\{f(x) : x \in A\}, \sup\{-f(x) : x \in A\}\}$$

y, por tanto, se alcanza $\sup\{|f(x)| : x \in A\}$.

2.- Como consecuencia del teorema anterior, y de su demostración, probaremos ahora el siguiente resultado (R.C. James 1969, 1972).

Sea X un espacio de Banach real, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) El espacio X no es reflexivo.

b) Si $\theta \in (0,1)$ entonces existen un subespacio F de X y una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} de modo que $d(F^0, co(f_n : n \in \mathbb{N})) \geq \theta$ y $\lim_n f_n(x) = 0$ si $x \in F$.

c) Si $\theta \in (0,1)$ y $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $[0,1]$ con $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$ entonces existen $\alpha \in [\theta, 2]$ y una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{X^*} tales que si $g \in L(g_n)$ se verifica:

i) $\|\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j(g_j - g)\| = \alpha$ *y*

ii) $\|\sum_{j=1}^{n} \beta_j(g_j - g)\| < \alpha(1 - \theta \sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_j)$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$

d) Existe $f \in X^*$ tal que f no alcanza la norma.

Para la demostración de este resultado bastará con probar que $a) \Rightarrow b)$, ya que las implicaciones $b) \Rightarrow c)$, $c) \Rightarrow d)$ y $d) \Rightarrow a)$ se pueden deducir del teorema anterior, para el caso en que $A = B_X$.

Obsérvese que este resultado sigue siendo cierto si en b) y en c) se cambia "Si $\theta \in (0,1)\ldots$" por "existe $\theta \in (0,1)\ldots$" (por tanto también sería cierto si el cambio se hace sólo en b) o sólo en c)).

Pasamos a demostrar que $a) \Rightarrow b)$.

Supongamos que X no es reflexivo y que $\theta \in (0,1)$. Tenemos que existirá un subespacio cerrado y separable F de X de modo que F es no reflexivo. Por tanto existe una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_{F^*} tal que $d(0, co(h_n : n \in \mathbb{N})) \geq \theta$ y $\lim_n h_n(x) = 0$, para $x \in F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea h_n una extensión, usando el teorema de Hahn-Banach, de h_n a X. Si $f \in co(f_n : n \in \mathbb{N})$ y $g \in F^0$ entonces la restricción de $f - g$ a F es un elemento h de $\mathrm{co}(h_n : n \in \mathbb{N})$ y por tanto

$$\|f-g\| \geq \sup\{|(f-g)(y)| : y \in B_F\} = \|h\| \geq d(0, co(h_n : n \in \mathbb{N})) \geq \theta.$$

Esto prueba que $d(F^0, co(f_n : n \in \mathbb{N})) \geq \theta$.

3.- *Sea X un espacio reflexivo. Si Y es un espacio normado tal que existe una aplicación $T : X \to Y$ lineal y continua y abierta entonces Y es reflexivo.*

En efecto, tenemos que la aplicación dual T^* es un isomorfismo de Y^* sobre $(\ker T)^0$. Este último espacio es reflexivo ya que es un subespacio cerrado de X^*.

Otra forma todavía más sencilla de probar este resultado es la siguiente:

Si T es abierta existe $M > 0$ tal que $B_Y \subset MT(B_X)$. Como T es débil-débil continua deducimos que B_Y es débilmente compacto, por lo que Y es reflexivo.

Como consecuencia inmediata de lo anterior obtenemos que *si X es reflexivo y M es un subespacio cerrado de X entonces el espacio cociente X/M es reflexivo.*

4.- Resumiremos aquí las caracterizaciones de la reflexividad que se han demostrado.

Dado un espacio de Banach X las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) El espacio X es reflexivo.

b) El espacio dual de X es reflexivo.

c) Toda sucesión acotada de X tiene subsucesión débilmente convergente.

d) Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de X no vacíos, cerrados, convexos y acotados entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.

e) Cada subespacio cerrado y separable de X es reflexivo.

f) X es isomórfico a un espacio reflexivo.

g) Cada elemento de X^* alcanza su norma.

h) Existe un espacio reflexivo Z y una aplicación T lineal, continua y sobreyectiva de Z en X.

i) No se verifica lo siguiente: Para cada $\theta \in (0,1)$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X y existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$ de modo que $\|f_n\| = 1$ si $n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $f_n(x_j) = 0$ si $n > j$

j) No se verifica lo siguiente: existe $\theta \in (0,1)$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X y existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_{X^*} de modo que $f_n(x_j) \geq \theta$ si $n \leq j$ y $f_n(x_j) = 0$ si $n > j$.

k) No se verifica lo siguiente: para cada $\theta \in (0,1)$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X tal que $d(co(x_1,\ldots,x_n), co(x_{n+1},x_{n+2},\ldots)) \geq \theta$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

l) No se verifica lo siguiente: existe $\theta \in (0,1)$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S_X de modo que $d(co(x_1,\ldots,x_n), co(x_{n+1},x_{n+2},\ldots)) \geq \theta$ si $n \in \mathbb{N}$.

En 1971 James demostró la existencia de un espacio normado X tal que cada elemento de X^* alcanza la norma; por tanto, la hipótesis de la completitud de X es esencial en las equivalencias anteriores.

5.- Si X es reflexivo y A es débilmente cerrado y acotado existirá $\alpha > 0$ tal que $A \subset \alpha B_X$. Es claro que entonces A es débilmente compacto. Además, todo conjunto débilmente compacto es débilmente cerrado y acotado. El recíproco es cierto si y sólo si X es reflexivo.

6.- Sea X un espacio normado y sea $M \subset X$. Se dirá que M **es aproximable** si para cada $x \in X$ existe $y \in M$ tal que $\|x-y\| = d(x,M)$.

Si X es un espacio reflexivo y $M \subset X$ es un conjunto convexo y cerrado probaremos que M es aproximable. En efecto, sea $x_0 \notin M$ y $\alpha = d(x_0,M)$. Sea $A = M \cap \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 2\alpha\}$; como A es convexo y cerrado será débilmente cerrado y, como es acotado, será débilmente compacto.

Es sencillo ver que $d(x_0,A) = \alpha$. Para cada $n^o in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ tal que $\alpha \leq \|x_0 - x_n\| \leq \alpha + \frac{1}{n}$. Como A es débilmente compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ y existe un $z \in A$ tal que $w - \lim_k x_{n_k} = z$. Tenemos entonces que $w - \lim_k (x_{n_k} - x_0) = z - x_0$ y

$$\alpha \leq \|z - x_0\| \leq \inf_k \|x_{n_k} - x_0\| = \alpha.$$

Por tanto, $\|z - x_0\| = \alpha$.

En otro capítulo posterior volveremos a tratar este concepto de conjunto aproximable que es también conocido con el nombre de conjunto de Chebychev.

7.- *Sea X un espacio de Banach y sea $f \in X^*$. Entonces,* $\ker f$ ***es aproximable*** *si y sólo si f alcanza la norma.*

Supongamos que $M = \ker f$ es aproximable. Sabemos que X/M tiene dimensión 1. Sea $g : X/M \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $g(x+M) = f(x)$. Tenemos que g es lineal y continua, con $\|g\| = \|f\|$, y existe $x \in X$ tal que $\|x + M\| = 1$ y $g(x+M) = \|g\|$. Como $\|x+M\| = d(x,M)$ y M es aproximable, existe $y \in M$ tal que $\|x - y\| = \|x + M\| = 1$; entonces $f(x-y) = f(x) = g(x+M) = \|g\|$.

Supongamos ahora que existe $x_0 \in S_X$ tal que $f(x_0) = \|f\|$. Sea $x \in X$ tal que $\|x+M\| = \alpha > 0$. Entonces $\left\|\frac{1}{\alpha}x + M\right\| = 1$ y tenemos que $\|x_0 + M\| = d(x_0,M)$. Para cada $y \in M$ se tiene que $\|f\| = |f(x_0)| = |f(x_0 - y)| \leq \|f\|\|x_0 - y\|$. Así pues, $d(x_0,M) \geq 1$ pero $0 \in M$ y $d(x_0,0) = \|x_0\| = 1$. Por tanto $\|x_0 + M\| = 1$. Dado que $dim X/M = 1$, existe un $\beta \in \mathbb{K}$ con $|\beta| = 1$ tal que $\frac{1}{\alpha}x + M = \beta(x_0 + M)$. Por consiguiente, $\frac{1}{\alpha}x - \beta x_0 \in M$ y también $x - \alpha\beta x_0 \in M$; por tanto $\|x - (x - \alpha\beta x_0)\| = \alpha = d(x_0, M)$.

8.- Sea X un espacio normado. Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy si y sólo si para cada $f \in X^*$ es $(f(x_n))$ una sucesión convergente. Recordemos también que toda sucesión débil Cauchy es acotada.

Sea X un espacio reflexivo y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada. Tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \alpha B_X$ y por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene subsucesión débilmente convergente.

Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débil Cauchy; demostraremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil convergente. En efecto, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente a cierto x_0. Para $f \in X^*$, consideremos la sucesión $(f(x_n))$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ es $x_p - x_q \in B(0; f; \varepsilon/2)$. Como $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, tenemos que existe $k_1 > n_0$ tal que $|f(x_{n_{k_1}}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues, si $n \geq n_0$ se tiene

$$|f(x_n) - f(x_0)| < |f(x_n) - f(x_{n_{k_1}})| + |f(x_{n_{k_1}}) - f(x_0)| < \varepsilon$$

y podemos afirmar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente convergente a x_0. Por tanto, *si X es reflexivo tenemos que X es débilmente secuencialmente completo.*

9) Si X es un espacio de Banach. Se dice que X tiene la **propiedad de Krein-Milman (PKM)**, o que X es un espacio PKM, *si para cada conjunto $A \subset X$ que sea cerrado convexo y acotado se verifica que $A = \overline{co}(ExtA)$.*

Observemos que si X es reflexivo y $A \subset X$ es un conjunto cerrado, convexo y acotado entonces tenemos que A será débil compacto y convexo; por tanto $A = \overline{co}^w(ExtA) = \overline{co}Ext(A)$ y X es PKM. No obstante, existen espacios que tienen la PKM y que no son reflexivos, como por ejemplo l_1.

Se dice que X tiene la **propiedad de Grothendieck (G)**, o que X es un espacio G, *si cada sucesión de X^* que sea $*$-w convergente es también débil convergente.* Observemos que si X fuese reflexivo, como en X^* se verifica $T_{*-w} = T_w$, tenemos que X es G. El recíproco es falso ya que, por ejemplo, l_∞ es G y sabemos que l_∞ no es reflexivo.

Si X es reflexivo entonces B_{X^*} es $*$-w secuencialmente compacto (es decir X es sk). En efecto, sea $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_{X^*}. Como B_{X^*} es débilmente secuencialmente compacto, la sucesión $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ tendrá una subsucesión débilmente convergente. Entonces, esta subsucesión también será $*$-w convergente.

Por otra parte, *si X es G y sk probaremos que X es reflexivo.* En efecto, si $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de B_{X^*} tendremos que existe alguna subsucesión $(x_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ que será $*$-w convergente. Así pues, también será débil convergente y deducimos que B_{X^*} es débil compacto. Por consiguiente, X^* es reflexivo, por lo que X también lo es.

Demostraremos ahora que *si X es G entonces X^* es débilmente secuencialmente completo.* En efecto, si $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débil de Cauchy entonces será acotada y existe alguna subsucesión $(x_{n_k}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ que será $*$-w convergente a cierto x_0^*. Pero entonces sería $w\lim_k x_{n_k}^* = x_0^*$. Usando ahora el hecho de que $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es débilmente de Cauchy, es fácil probar que $w\lim x_n^* = x_0^*$.

10.- Vamos a probar que *si H es un espacio compacto, T_2 e infinito entonces $C(H)$ no es reflexivo.*

Primero demostraremos que si H es T_2, regular e infinito entonces existe una familia numerable de abiertos disjuntos no vacíos. En efecto, vemos que existe $x_1 \in H$ tal que para algún entorno cerrado V_{x_1} de x_1 es $H \setminus V_{x_1}$ infinito. Supongamos que no existe tal x_1; es decir, para cada $x \in X$ y cada entorno cerrado V_x de x es $H \setminus V_x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito. Entonces $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es un *clopen* y U es un entorno cerrado de x_1, por lo que $H \setminus U$ es infinito, lo cual es contradictorio.

Sea, pues, B_1 un conjunto abierto tal que $B_1 \subset V_{x_1}$. Si $H_1 = H \setminus V_{x_1}$ existe $x_2 \in H_1$ tal que para algún H_1-entorno cerrado V_{x_2} de x_2 es $H_1 \setminus V_{x_2}$ infinito. Si B_2 es el H_1-abierto tal que $B_2 \subset V_{x_2} \subset H_1$ tendremos que B_2 será abierto en H y $B_2 \cap B_1 = \emptyset$. Razonando inductivamente obtenemos la familia $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos disjuntos.

Supongamos ahora que H es compacto T_2 e infinito y consideremos una sucesión $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de abiertos disjuntos no vacíos. Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $x_i \in B_i$. Tenemos que $\{x_1\}$, $\overline{\{x_i : i > 1, i \in \mathbb{N}\}}$ son cerrados disjuntos. Por tanto, existe un abierto G_1 tal que $\{x_1\} \subset G_1$ y $\overline{\{x_i : i > 1, i \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{G_1} = \emptyset$. Además $\overline{G_1} \cup \{x_2\}$ y $\overline{\{x_i : i > 2, i \in \mathbb{N}\}}$ son cerrados disjuntos. Por consiguiente, existe un abierto G_2 tal que $\overline{G_1} \cup \{x_2\} \subset G_2$ y $\overline{G_2} \cap \overline{\{x_i : i > 2, i \in \mathbb{N}\}} = \emptyset$. Reiterando el razonamiento, obtenemos una sucesión estrictamente creciente de abiertos, $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal que $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ y $x_{n+1} \in G_{n+1} \setminus G_n$ si $n \in \mathbb{N}$. Observemos que si $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i$ entonces A es abierto pero no es cerrado, ya que si fuese cerrado sería compacto y existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que $A = G_1 \cup \cdots \cup G_m = G_m$ y entonces sería $x_{m+1} \in G_m$.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, una aplicación continua $f_n : H \to [0, 1]$ tal que $f_n = 1$ en G_n y $f_n = 0$ en $H \setminus A$. Tenemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(H)$ que es acotada (de hecho, $\|f_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$). Supongamos que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que sea débil convergente a cierto $f \in C(H)$. Observemos que $A = \cup G_{n_k}$ y que si $x \in A$ existe k_0 tal que si $k \geq k_0$ es $x \in G_{n_k}$. Por tanto, $f_{n_k}(x) = 1$ y será $f(x) = 1$. Por otra parte, si $x \in A$ tiene que ser $f(x) = 0$. Esto es una contradicción ya que A no es un clopen. Así pues, $C(H)$ no es reflexivo.

Finalmente, si $H = \{x_1, \ldots . x_n\}$ es compacto, T_2 y finito es claro que $C(H)$ puede ser identificado con $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, por lo que $C(H)$ es reflexivo.

11.- Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X es un espacio de Banach real. Supongamos también que X es reflexivo. Si $C \subset X$ es un conjunto cerrado, convexo y acotado tenemos que C será débil compacto y, por tanto, si $f : X \to \mathbb{R}$ es lineal y continua también será continua la aplicación $f : (C, T_w) \to \mathbb{R}$, por lo que existirá un $x_0 \in C$ tal que $f(x_0) = \sup_{x\in C} f(x)$.

11.4 Formas lineales que alcanzan su norma. Teorema de Bishop-Phelps

Si el espacio X no es reflexivo, el **teorema de Bishop-Phelps** afirma entonces que el conjunto de los puntos $f \in X^*$ tales que f alcanza su máximo valor en un conjunto C, cerrado convexo y acotado, es denso en X^*. Si en particular tomamos $C = B_X$ deducimos que el conjunto de los $f \in X^*$ que alcanzan su norma son densos en X^*. Para probar este resultado necesitaremos algunas demostraciones previas y las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 11.4.1 *Sea C un conjunto cerrado, convexo y acotado. Un slice (rebanada) de C es un conjunto de la forma*

$$S(x^*,\alpha,C)=\left\{x\in C: x^*(x)+\alpha\geq \sup_{x\in C} x^*(x)\right\},$$

donde $x^*\in S_{X^*}$ y $\alpha>0$. Si $C=\mathcal{B}_X$ denotaremos $S(x^*,\alpha)=S(x^*,\alpha,B_X)$; es decir,

$$S(x^*,\alpha)=\{x\in B_X: x^*(x)+\alpha\geq \|x^*\|\}.$$

*Diremos que un conjunto $K\subset X$ es un **cono** si para cada $x\in K$ y $\alpha\geq 0$ se verifica $\alpha x\in K$. Si $C\subset X$ y K es un cono diremos que K es **cono soporte** de C en x_0 si $(K+x_0)\cap C=\{x_0\}$.*

Observemos que los conjuntos de la forma $S(x^*,\alpha,C)$ son cerrados, convexos y acotados.

Para cada $x^*\in S_{X^*}$ y cada $M>0$ denotaremos

$$K(x^*,M)=\{x\in X:\|x\|\leq Mx^*(x)\},$$

que es un cono convexo y cerrado. Observemos que si $x^*\in S_{X^*}$ y $\alpha=\dfrac{M-1}{M}$ entonces

$$K(x^*,M)=\left\{x\in X:\frac{x}{\|x\|}\in S(x^*,\alpha)\right\}.$$

LEMA 11.4.2 *Sea C un conjunto convexo y cerrado de X. Si $x^*\in X^*$ está acotada en C y $M>0$ entonces para cada $z\in C$ existe $x_0\in C$ con $x_0-z\in K(x^*,M)$ y tal que $[x_0+K(x^*,M)]\cap C=\{x_0\}$.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $x^*\in X^*$ está acotada en C y que $M>0$. Definimos en C el orden parcial $x\geq y\Leftrightarrow x-y\in K(x^*,M)$.

Sea $z\in C$ y sea $C_z=\{x\in C: x\geq z\}$. Consideremos en $(C_z,\leq)$ una cadena B. Es claro que $\{x^*(y)\}_{y\in B}$ es una red en $\mathbb{R}$ que está acotada superiormente. Además, si $y_1\leq y_2$ se verifica $y_2-y_1\in K(x^*,M)$ y, por tanto, $0\leq\|y_2-y_1\|\leq Mx^*(y_2-y_1)$. Por consiguiente, $x^*(y_2)\geq x^*(y_1)$. Esto significa que la red $\{x^*(y)\}_{y\in B}$ es monótona creciente y es claro, por tanto, que converge a $\sup\{x^*(y):y\in B\}=\alpha$.

Vamos a demostrar que $\{y\}_{y\in B}$ es una red de Cauchy en X, con lo cual es convergente. En efecto, sea $\varepsilon>0$. Existe y_0 tal que si $y_1\geq y_0, y_2\geq y_0$ se verifica

$$|x^*(y_1)-x^*(y_2)|=|x^*(y_1-y_2)|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

Como B es una cadena, podemos suponer que $y_1\geq y_2\geq y_0$ y será $y_1-y_2\in K(x^*,M)$. Vemos así que $\|y_1-y_2\|\leq Mx^*(y_1-y_2)\leq M\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$. Si x_1 es el límite de $\{y\}_{y\in B}$ se tendrá que $x_1 \in C$, ya que C es cerrado. Para cada $y \in B$ tenemos que $y \geq z$, por lo que $\|x_1 - z\| \leq Mx^*(x_1 - z)$. Por tanto, $x_1 \geq z$ y será $x_1 \in C_z$. Además, si $y_0 \in B$, sabemos que para cada $y \in B$ con $y \geq y_0$ se cumple $\|y - y_0\| \leq Mx^*(y - y_0)$. Tomando límite, en $y \in B$, se deduce que $\|x_1 - y_0\| \leq Mx^*(x_1 - y_0)$ y, por tanto, $x_1 \geq y_0$ para cada $y_0 \in B$. Esto demuestra que $(C_z, \leq)$ es inductivo y, por el lema de Zörn, existe un $x_0 \in C_z$ que es maximal.

Como $0 \in K(x^*, M)$ es claro que cada $x \in X$ es de $x + K(x^*, M)$; así pues, tenemos que $x_0 \in C \cap (x_0 + K(x^*, M))$. Observemos que si $y \in (x_0 + k(x^*, M)) \cap C$ se tiene $y - x_0 \in K(x^*, M)$ y también $y \in C$ con $y \geq x_0$; por tanto, se tiene que $y = x_0$. ∎

LEMA 11.4.3 *Sean $x^*, y^* \in S_{X^*}$ y supongamos que para cierto $\varepsilon > 0$ se verifica que para cada $x \in B_X \cap \ker x^*$ es $|y^*(x)| \leq \varepsilon/2$. Entonces se tiene que $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$ ó $\|x^* + y^*\| \leq \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $M = \ker x^*$ y consideremos $y^* : M \to \mathbb{R}$. Para cada $x \in B_M$ es $|y^*(x)| \leq \varepsilon/2$; así pues, la norma de y^* en M es $\|y^*\|_M \leq \varepsilon/2$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión z^* de y^* con igual norma. Para cada $x \in \ker x^*$ se tiene que $z^*(x) = y^*(x)$, por lo que $\ker x^* \subset \ker(y^* - z^*)$. Por consiguiente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $y^* - z^* = \alpha x^*$ y será $\|y^* - z^*\| = |\alpha|$. Tenemos que $\varepsilon/2 \geq \|z^*\| = \|y^* - (y^* - z^*)\| > |\|y^*\| - \|y^* - z^*\|| = |1 - |\alpha||$.

Si $\alpha \geq 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}\|x^* - y^*\| &= \|x^* - \alpha x^* - z^*\| = \|(1-\alpha)x^* - z^*\| \\ &\leq |1 - \alpha| + \|z^*\| \leq 2\|z^*\| \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$ se cumple

$$\begin{aligned}\|x^* + y^*\| &= \|x^* + \alpha x^* + z^*\| = \|(1+\alpha)x^* + z^*\| \\ &\leq |1 + \alpha| + \|z^*\| \leq 2\|z^*\| \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

con lo que el lema queda demostrado. ∎

LEMA 11.4.4 *Sean $x^*, y^* \in S_{X^*}$, $\varepsilon \in (0,1)$ y $M > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$. Si para cada $z \in K(x^*, M)$ se cumple que $y^*(z) \geq 0$ entonces se verifica que $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $\dfrac{1+\frac{2}{\varepsilon}}{M} \in (0,1)$ y $\|x^*\| = 1$. Por tanto, existe $x \in S_X$ tal que $x^*(x) > \dfrac{1+\frac{2}{\varepsilon}}{M}$; es decir, $1 + \dfrac{2}{\varepsilon} < Mx^*(x)$. Si $y \in S_X$ y $x^*(y) = 0$ entonces

$$\|x \pm \frac{2}{\varepsilon}y\| < 1 + \frac{2}{\varepsilon} < Mx^*(x) = Mx^*(x \pm \frac{2}{\varepsilon}y).$$

Por tanto, $x \pm \frac{2}{\varepsilon}y \in K(x^*, M)$, $y^*(x \pm \frac{2}{\varepsilon}y) \geq 0$ y deducimos que $|y^*(\frac{2}{\varepsilon}y)| \leq y^*(x) \leq 1$ y que $|y^*(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Por el lema anterior, se verifica $\|x^* + y^*\| \leq \varepsilon$ ó $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$.

Veamos que $\|x^*+y^*\| > \varepsilon$ y entonces necesariamente tiene que ser $\|x^*-y^*\| \leq \varepsilon$. Como ε y $\frac{1}{M}$ son menores que 1, existe un $z \in S_X$ tal que $x^*(z) > \text{máx}(\varepsilon, \frac{1}{M})$, por lo que $\|z\| \leq Mx^*(z)$ y $z \in K(x^*, M)$. Entonces, $y^*(z) \geq 0$ y será $\varepsilon < x^*(z) \leq x^*(z) + y^*(z) = (x^* + y^*)(z) \leq \|x^* + y^*\|$. ∎

TEOREMA 11.4.5 **[Teorema de Bishop-Phelps]**

Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ un conjunto cerrado, convexo y acotado. El conjunto de los elementos de X^* que alcanzan el máximo valor en C es denso en X^*.

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $0 \in C$ y que $x^* \in S_{X^*}$. Demostraremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que y^* alcanza el máximo valor en C y $\|x^*-y^*\| \leq \varepsilon$.

Sean $x^* \in S_X$, $\varepsilon \in (0,1)$ y $M > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$. Como $M > 1$, podemos escoger $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \alpha < \frac{M-1}{M}$, con lo que $1 - \alpha > 1 - \frac{M-1}{M} = \frac{1}{M}$. Como $1 - \alpha < 1$, existe $z_0 \in S_X$ tal que $x^*(z_0) > 1 - \alpha$. Observemos que $x^*(z_0) > \frac{1}{M}$ y $z_0 \in K(x^*, M)$, ya que $1 = \|z_0\| < Mx^*(z_0)$. Por la continuidad de x^*, existe $B(z_0, r)$ tal que $r < M(1-\alpha) - 1$ y si $y \in B(z_0, r)$ se verifica $1 - \alpha < x^*(y)$. Como $\|y\| \leq \|y - z\| + \|z\| \leq 1 + r < 1 + M(1-\alpha) - 1 = M(1-\alpha)$, tenemos $\frac{\|y\|}{M} \leq 1 - \alpha < x^*(y)$. De esta forma deducimos que $B(z_0, r) \subset K(x^*, M)$ y $K(x^*, M)$ tiene interior no vacío.

Aplicando el primero de los lemas anteriores a $0 \in C$ y a x^*, tenemos que existe $x_0 \in C$ tal que $x_0 - 0 \in K(x^*, M)$ y $(x_0 + K(x^*, M)) \cap C = \{x_0\}$. Veamos que $x_0 \notin Int(x_0 + K(x^*, M))$. Sea $x \in C$ tal que $x \neq x_0$ y sea $\lambda \in (0,1)$ tal que $1 - \lambda < \frac{\alpha}{\|x_0 - x\|}$. Se verifica que $\|x_0 - (\lambda x_0 + (1-\lambda)x)\| = (1-\lambda)\|x_0 - x\| < \alpha$ y, por tanto, $\lambda x_0 + (1-\lambda)x \in B(x_0, \alpha)$. Como $\lambda x_0 + (1-\lambda)x \neq x_0$, tenemos que $\lambda x_0 + (1-\lambda)x \notin C$, ya que $C \cap B(x_0; \alpha) = \{x_0\}$. Esto contradice el que C sea convexo. Por consiguiente, $Int(x_0 + K(x^*, M))$ es abierto, convexo y no vacío y es también disjunto del convexo C.

Podemos encontrar $y^* \in S_{X^*}$ y $\beta \geq 0$ tales que $y^*(x) \leq \beta$, para cada $x \in C$, y $y^*(x) > \beta$, para $x \in Int(x_0 + K(x^*, M))$. Recordemos que si A es un conjunto convexo y $a \in A$, $x \in Int(A)$ entonces $(a, x) \subset Int(A)$. De aquí es fácil deducir que $a \in \overline{Int(A)}$; así pues, $x_0 \in \overline{Int(x_0 + K(x^*, M))}$ y deducimos que $y^*(x_0) \geq \beta$ y que $y^*(x_0) = \beta$. Esto prueba que y^* alcanza su máximo valor en C, y lo hace en x_0. Por otra parte, para cada $y \in K(x^*, M)$ se verifica $x_0 + y \in x_0 + K(x^*, M)$, por lo que $y^*(x_0 + y) = y^*(x_0) + y^*(y) \geq \beta$ y $y^*(y) \geq 0$. El último lema nos permite deducir que $\|x^* - y^*\| \leq \varepsilon$. ∎

NOTA 11.4.6 1.- En la situación del teorema anterior, si $x^* \notin S_{X^*}$ y $x^* \neq 0$ entonces para $\varepsilon > 0$ y $\frac{x^*}{\|x^*\|}$ tenemos que existe $y^* \in S_{X^*}$ que alcanza el máximo valor en C y es tal que $\|\frac{x^*}{\|x^*\|} - y^*\| < \frac{\varepsilon}{\|x^*\|}$. Es claro que $z^* = \|x^*\|y^*$ alcanza el máximo valor en C y que $\|x^* - z^*\| < \varepsilon$, siendo $\|z^*\| = \|x^*\|$.

Si $0 \notin C$ escogemos $a \in C$ y consideramos $D = (-a) + C$. Tenemos que D es cerrado, convexo y acotado. Dado $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, existe y^* que alcanza el máximo valor en D y es tal que $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$. Veamos que y^* alcanza también el máximo valor en C. En efecto, sea $-a + x_0$ con $x_0 \in C$ tal que para cada $x \in C$ es $y^*(-a + x_0) \geq y^*(-a + x)$. Es evidente que también tenemos que $y^*(x_0) \geq y^*(x)$ si $x \in C$.

Es evidente que todo lo dicho aquí para el máximo valor es también cierto para el mínimo valor en C.

Supongamos ahora que X es un espacio de Banach complejo y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal y continua. Sea $\varepsilon > 0$ y apliquemos el teorema anterior a $p = Ref$ y $C = B_X$. Existe una aplicación $q : X \to \mathbb{R}$, lineal y continua, tal que $\|p - q\| < \varepsilon$ y tal que para cierto $x_0 \in S_X$ se verifica $q(x_0) = \|q\|$. Consideremos $g(x) = q(x) - iq(ix)$, tenemos que $\|f - g\| = \|Re(f - g)\| = \|p - q\| < \varepsilon$ y $|g(x_0)| \geq q(x_0) = \|q\| = \|g\|$. Esto prueba que $|g(x_0)| = \|g\|$ y, si $\theta = \arg g(x_0)$ y $z = x_0 e^{-i\theta}$, se cumple que $z \in S_X$ y $g(x) = \|g\|$.

11.5 Operadores que alcanzan la norma. Teoremas de Lindenstrauss y de Zizler

J. Lindenstrauss, en *"On operators which attain their norm"* (Israel J. Math.1963), planteó las cuestiones que más adelante se indican.

DEFINICIÓN 11.5.1 *Si X e Y son dos espacios de Banach y $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$, diremos que T* ***alcanza la norma*** *si existe $x_0 \in S_X$ tal que $\|Tx_0\| = \|T\|$. Denotaremos por $P(X, Y)$ el conjunto de los $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ que alcanzan la norma.*

Diremos que X tiene la propiedad A si para cada espacio de Banach Y es $P(X, Y)$ denso en $C\mathcal{L}(X, Y)$.

Diremos que X tiene la propiedad B si para cada espacio de Banach Y es $P(Y, X)$ denso en $C\mathcal{L}(Y, X)$.

Es claro que si $Y = \mathbb{K}$ entonces $P(X, Y)$ es denso en $C\mathcal{L}(X, Y)$ para cualquier X. Estamos pues ante una interesante generalización del teorema de Bishop-Phelps. Esta cuestión ha abierto importantes líneas de investigación. Aquí sólo nos asomaremos al principio del problema y probaremos que si $P_0(X, Y)$ es el conjunto de los $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ tales que T^{**} alcanza la norma entonces $P_0(X, Y)$ es denso en $C\mathcal{L}(X, Y)$. Esto nos permitirá deducir que si X es reflexivo entonces X tiene la propiedad A.

LEMA 11.5.2 *Se verifica que $T \in P_0(X, Y)$ si y sólo si existen dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{Y^*}$ tales que $|g_j(Tx_n)| \geq \|T\| - \dfrac{1}{j+1}$, para cada $n \geq j$.*

DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow$ Existe $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que $\|T^{**}x_0^{**}\| = \|T\|$. Para $T^{**}x_0^{**} \in Y^{**}$ existirá $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{Y^*}$ tal que $|T^{**}x_0^{**}(g_n)| > \|T\| - \dfrac{1}{n+1}$. Como B_X

es $*$-w denso en $B_{X^{**}}$, existe una red $(y_\alpha)_{\alpha\in I} \subset B_X$ tal que $*$-$w\lim y_\alpha = x_0^{**}$. Observemos que $(\|y_\alpha\|)_{\alpha\in I}$ converge a 1, ya que en caso contrario existiría cierta subred $(\|y_\alpha\|)_{\alpha\in I'}$ y existiría $r<1$ tal que $\|y_\alpha\|<r$, si $\alpha\in I'$; como $rB_{X^{**}}$ es $*$-w compacto sería $x_0^{**}\in rB_{X^{**}}$ y por tanto $\|x_0^{**}\|\le r$, lo que no es posible. Podemos suponer que $y_\alpha\neq 0$ para $\alpha\in I$. Si $x_\alpha = \dfrac{y_\alpha}{\|y_\alpha\|}$ tenemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ es una red de S_X tal que $*$-$w\lim_{\alpha\in I} x_\alpha = x_0^{**}$.

Como T^{**} es $*$-w $-$ $*$-w continua, $(T^{**}x_\alpha)_{\alpha\in I} = (Tx_\alpha)_{\alpha\in I}$ sería una red $*$-w convergente a $T^{**}x_0^{**}$. Por tanto, para $g_1\in Y^{**}$ se verifica:

$$|(Tx_\alpha)(g_1)| = |g_1(Tx_\alpha)| \underset{\alpha\in I}{\to} |T^{**}x_0^{**}(g_1)|.$$

Esto prueba que existe $\alpha_1\in I$ tal que $|g_1(Tx_\alpha)|\ge \|T\| - \dfrac{1}{2}$, para $\alpha\ge\alpha_1$. Para g_2, como

$$|g_2(Tx_\alpha)| \underset{\alpha\ge\alpha_1}{\to} |T^{**}x_0^{**}(g_2)|,$$

existe $\alpha_2>\alpha_1$ tal que $|g_2(Tx_{\alpha_2})|\ge\|T\| - \dfrac{1}{3}$ si $\alpha\ge\alpha_2$. Procediendo por inducción se obtiene lo deseado.

$\Leftarrow$ Sea x_0^{**} un punto de aglomeración $*$-w de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $j\in\mathbb{N}$ se tiene que $T^{**}x_0^{**}(g_j)$ es un punto de aglomeración de $(T^{**}x_n(g_j))_{n\in\mathbb{N}} = (g_j(Tx_n))$. Así pues, para cada $j\in\mathbb{N}$, se verifica

$$\|T\| \ge \|T^{**}x_0^{**}\| \ge \|T^{**}x_0^{**}(g_j)\| \ge \|T\| - \frac{1}{j}.$$

Por tanto, $\|T^{**}x_0^{**}\| = \|T\|$. ∎

Teorema 11.5.3 **[Teorema de Lindenstrauss]**
Sean X, Y dos espacios de Banach.

a) $P_0(X,Y)$ es denso en $CL(X,Y)$.

b) Si X es reflexivo entonces X tiene la propiedad A.

Demostración Sea $T\in CL(X,Y)$; para probar el teorema, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|T\|=1$. Dado $\varepsilon\in(0,1/3)$ escogeremos una sucesión $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ decreciente y de positivos de modo que

$$2\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon, 2\sum_{i=k+1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon_k^2$$

y $\varepsilon_k<\dfrac{1}{10k}$. Realizamos el siguiente proceso de construcción inductiva.

Sea $T_1=T$. Existe $x_1\in S_X$ tal que $\|T_1x_1\|\ge\|T_1\|-\varepsilon_1^2$. Para $T_1x_1\in Y$ tomamos $g_1\in S_{Y^*}$ tal que $g_1(T_1x_1)=\|T_1x_1\|$. Sea $T_2: X\to Y$ la aplicación definida por

$$T_2x = T_1x + \varepsilon_1 g_1(T_1x)T_1x_1.$$

Para T_2 existe $x_2 \in S_X$ tal que $\|T_2x_2\| \geq \|T_2\| - \varepsilon_2^2$ y para $T_2x_2 \in Y$ tomamos $g_2 \in S_{Y^*}$ tal que $g_2(T_2x_2) = \|T_2x_2\|$.

Por este procedimiento se obtienen las sucesiones $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C\mathcal{L}(X,Y)$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_X$ y $(g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_{Y^*}$ tales que $T_1 = T$, $\|T_kx_k\| \geq \|T_k\| - \varepsilon_k^2$, $g_k(T_kx_k) = \|T_kx_k\|$ y $T_{k+1}x = T_kx + \varepsilon_k(T_kx)T_kx_k$.

Probaremos inductivamente que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\|T_k\| \leq 1 + 2(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{k-1})$ y entonces será $\|T_k\| \leq 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.

Es evidente que eso es cierto para $k = 1$. Supongamos que es cierto para k entonces: si $x \in B_X$ se tiene

$$\|T_{k+1}x\| \leq \|T_kx\| + \varepsilon_k\|g_k(T_kx)T_kx_k\| \leq 1 + 2(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{k-1}) + 2\varepsilon_k = 1 + 2(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k).$$

Demostraremos ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple $\|T_{k+1} - T_k\| \leq 2\varepsilon_k$. Si $x \in B_X$ tenemos que

$$\|T_{k+1}x - T_kx\| \leq \varepsilon_k|g_k(T_kx)|\|T_kx_k\| \leq \varepsilon_k\|T_k\|^2 \leq 2\varepsilon_k.$$

Supongamos que $j < k$, entonces

$$\begin{aligned}\|T_k - T_j\| &\leq \|T_k - T_{k-1}\| + \|T_{k-1} - T_{k-2}\| + \cdots + \|T_{j+1} - T_j\| \\ &\leq 2\varepsilon_{k-1} + 2\varepsilon_{k-2} + \cdots + 2\varepsilon_j = 2(\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{k-1}).\end{aligned}$$

Vamos a demostrar que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|T_{k+1}\| &\geq \|T_{k+1}x_k\| = \|T_kx_k + \varepsilon_kg_k(T_kx_k)T_kx_k\| \\ &= \|T_k(1 + \varepsilon_kg_k(T_kx_k))x_k\| = (1 + \varepsilon_k\|T_kx_k\|)\|T_kx_k\| \\ &\geq (1 + \varepsilon_k\|T_k\| - \varepsilon_k^3)(\|T_k\| - \varepsilon_k^2) \\ &= \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - \varepsilon_k^3\|T_k\| - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^3\|T_k\| + \varepsilon_k^5 \\ &\geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - \frac{8}{3}\varepsilon_k^3 - \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k^5 \geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - \frac{8}{3}\varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_k^2 \\ &= \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2.\end{aligned}$$

Por inducción probaremos ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\|T_k\| > 2\sqrt{\varepsilon_k}$.

Esta desigualdad es cierta si $k = 1$. Suponemos que es cierta para k; tenemos que:

$$\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 > 2\sqrt{\varepsilon_k} + 4\varepsilon_k^2 - 4\varepsilon_k^2 = 2\sqrt{\varepsilon_k} > 2\sqrt{\varepsilon_{k+1}}.$$

Así pues, deducimos que

$$\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| + \varepsilon_k\|T_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 > \|T_k\| + \varepsilon_k(2\sqrt{\varepsilon_k})^2 - 4\varepsilon_k^2 = \|T_k\|,$$

y, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\|T_{k+1}\| \geq \|T_k\| \geq 1$.

Si $k > j$ se verifica

$$\begin{aligned}\|T_{j+1}x_k\| &= \|T_{j+1}x_k - T_kx_k + T_kx_k\| \geq \|T_kx_k\| - \|T_{j+1}x_k - T_kx_k\| \\ &\geq \|T_kx_k\| - \|T_{j+1} - T_k\| \geq \|Tk\| - \varepsilon_k^2 - 2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}).\end{aligned}$$

Como $2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}) \leq 2(\sum_{i=j+1}^{\infty} \varepsilon_i) \leq \varepsilon_j^2$ y $\varepsilon_j^2 \leq \varepsilon_k^2$ y además $\|T_k\| \geq \|T_{j+1}\|$, deducimos que $\|T_k x_k\| \geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2$.

Por otra parte, si $k > j$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j |g_j(T_j x_k)| \|T_j\| + \|T_j\| &\geq \|T_{j+1} x_k\| \geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2 \\
&\geq \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 4\varepsilon_j^2 - 2\varepsilon_j^2 \\
&= \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2 \\
&\geq \|T_j\| + \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2 \|T_j\|.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\varepsilon_j |g_j(T_j x_k)| \|T_j\| \geq \varepsilon_j \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2 \|T_j\|$ y será $|g_j(T_j x_k)| \|T_j\| \geq \|T_j\|^2 - 6\varepsilon_j \|T_j\|$. Por consiguiente, $|g_j(T_j x_k)| \geq \|T_j\| - 6\varepsilon_j$.

Como para cada $k > j$ se cumple $\|T_j - T_k\| \leq 2(\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{k-1})$, deducimos que (T_j) es una sucesión de Cauchy en $C\mathcal{L}(X, Y)$. De esta forma, existe $T_0 \in C\mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\lim_{n \to \infty} T_n = T_0$.

Por otra parte, como $\|T_k - T\| \leq 2 \sum_{1}^{k-1} \varepsilon_i$, para $k \in \mathbb{N}$, deducimos que $\|T_0 - T\| \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$.

Observemos que si $j \geq 2$ tenemos, para cada $k > j$, que $\|T_k - T_j\| \leq 2 \sum_{i=j}^{k-1} \varepsilon_i$. Tomando límites para $k \to \infty$ deducimos que

$$\|T_0 - T_j\| \leq 2 \sum_{i=j}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_{j-1}^2.$$

Probaremos ahora que para cada $k > j$ se verifica que $\|T_0\| \leq |g_j(T_0 x_j)| + \frac{1}{j}$. En efecto,

$$\|T_j - T_0\| > \|T_j x_k - T_0 x_k\| > |g_j(T_j x_k - T_0 x_k)| \geq |g_j(T_j x_k)| - |g_j(T_0 x_k)|.$$

Por tanto $|g_j(T_0 x_k)| \geq |g_j(T_j x_k)| - \|T_j - T_0\| \geq \|T_j\| - 6\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}^2$. Como $\|T_0\| \leq \|T_0 - T_j\| + \|T_j\|$ se tiene que $\|T_j\| \geq \|T_0\| - \|T_0 - T_j\| \geq \|T_0\| - \varepsilon_{j-1}^2$ y obtenemos que

$$|g_j(T_0 x_k)| \geq \|T_0\| - \varepsilon_{j-1}^2 - 6\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}^2 \geq \|T_0\| - \frac{1}{j}.$$

De esta manera tenemos las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^*$ de modo que, para $k > j$, se verifica $\|T_0\| \leq |g_j(T_0 x_k)| + \frac{1}{j}$. Por el lema anterior podemos afirmar que $T_0 \in P_0(X, Y)$. ∎

NOTA 11.5.4 1.- Observemos que, en el teorema anterior, se verifica que la aplicación $T_2 - T = T_2 - T_1$ es de rango finito. Como $T_3 x = T_2 x + \varepsilon_2 j_2(T_2 x) T_2 x_2$, deducimos que $T_3 - T_2$ es también de rango finito. Por tanto, $T_3 - T = (T_3 - T_2) + (T_2 - T_1)$ es de rango finito. Inductivamente probaríamos que $(T_k - T)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones de rango finito y su límite es $T_0 - T$.

En su momento se verá que si un elemento F de $C\mathcal{L}(X,Y)$ es el límite de una sucesión de elementos de rango finito entonces F es compacto (lo que significa que transforma sucesiones acotadas en sucesiones que tienen alguna subsucesión convergente).

2.- Observemos que *si $T : X \to Y$ alcanza la norma entonces la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ también alcanza la norma.* En efecto, supongamos que $x_0 \in S_X$ y que $\|Tx_0\| = \|T\|$. Para Tx_0 existe $g \in S_{Y^*}$ tal que $\|Tx_0\| = |g(Tx_0)|$. Como $|g(Tx_0)| = |(T^*g)(x_0)| \leq \|T^*g\| \leq \|T^*\| = \|T\| = \|Tx_0\|$ se tiene $\|T^*y\| = \|T^*\|$. Así pues, en esta situación, también tendremos que T^{**} alcanza la norma. Por tanto el conjunto $P_1(X,Y)$ de los elementos $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tales que T^* alcanza la norma es tal que $P(X,Y) \subset P_1(X,Y) \subset P_0(X,Y)$.

3.- Supongamos que X es reflexivo y que $T : X \to Y$ es una aplicación tal que T^{**} alcanza la norma. Existe $\hat{x} \in X^{**} = \hat{X}$ tal que $\|\hat{x}\| = 1$ y $\|T^{**}\hat{x}\| = \|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$. Tenemos que $T^{**}\hat{x} = \widehat{(Tx)} \in Y^{**}$ y se verifica $\|\widehat{(Tx)}\| = \|Tx\| = \|T\|$.

Por tanto, si X es reflexivo tendremos que $P_0(X,Y) \subset P(X,Y)$ y podremos afirmar que $P(X,Y) = P_1(X,Y) = P_0(X,Y)$ y en particular que X tiene la propiedad A.

V. Zizler en el trabajo *"On some extremal problems in Banach spaces"*, **Math. Scand.** 1973, demostró que $P_1(X,Y)$ es denso en $C\mathcal{L}(X,Y)$. Con esto quedaría probado también que $P_0(X,Y)$ es denso en $C\mathcal{L}(X,Y)$ y el resultado de Lindenstrauss aparecería como un caso particular del de Zizler. Veremos ahora la demostración del resultado de Zizler. Aunque ésta haría redundante la de Lindenstrauss, hemos pensado que merece la pena conservar las dos. La demostración de Zizler sigue, no obstante, los pasos y las ideas de la demostración de Lindenstrauss.

LEMA 11.5.5 *Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal y continua. Entonces existe $y^* \in S_{Y^*}$ tal que $\|T^*y^*\| = \|T^*\|(= \|T\|)$ si y sólo si existe una sucesión $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ en S_{Y^*} y existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en S_X tales que $|(T^*y_k^*)(x_j)| \geq \|T\| - \frac{1}{j}$ si $k > j$.*

DEMOSTRACIÓN $\boxed{\Rightarrow}$ Si existe $y^* \in S_{Y^*}$ tal que $\|T^*y^*\| = \|T\|$ entonces, para la aplicación T^*y* de X en $\mathbb{K}$, existe una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en S_X tal que $|(T^*y^*)(x_j)| \geq \|T^*\| - \frac{1}{j}$, para $j \in \mathbb{N}$. Basta tomar la sucesión $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ como la definida por $y_k^* = y^*$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $y^* \in B_{Y^*}$ un punto de $*$-w aglomeración de $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$. Como T^* es $*$-$w \to *$-w continua, T^*y^* es un punto de $*$-w aglomeración de $(T^*y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ en X^*. Por tanto, para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $|T^*y^*(x_j)|$ es un punto de aglomeración de $(|T^*y_k^*(x_j)|)$ y también de $(|T^*y_k^*(x_j)|)_{k\geq j}$. Por tanto,

$$\|T^*\| \geq \|T^*y^*\| \geq \|T^*y^*(x_j)\| \geq \|T^*\| - \frac{1}{j}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Por consiguiente se deduce que $\|T^*y^*\| = \|T^*\| = \|T\|$. ∎

TEOREMA 11.5.6 **[Teorema de Zizler]**

Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $P_1(X,Y)$ el conjunto de los $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$ tales que T^* alcanza la norma. Se verifica que $P_1(X,Y)$ es denso en $C\mathcal{L}(X,Y)$.

DEMOSTRACIÓN Sea $T \in C\mathcal{L}(X,Y)$ con $\|T\| = 1$ y sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$. Probaremos que existe $T_0 \in C\mathcal{L}(X,Y)$ tal que T_0^* alcanza la norma en Y^* y $\|T - T_0\| < \varepsilon$. Escogemos una sucesión $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$, creciente y de positivos, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$, $\sum_{i=k+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_k^2$ y $\varepsilon_k < \frac{1}{10k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ahora, inductivamente, construiremos las sucesiones $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C\mathcal{L}(X,Y)$, $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_{Y^*}$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S_X$ tales que $T_1^* = T^*$ y que, para cada $k \in \mathbb{N}$, es $\|T_k^* y_k^*\| \geq \|T_k^*\| - \varepsilon_k^2$ y $T_k^* y_k^*(x_k) \geq \|T_k^* y_k^*\| - \varepsilon_k^2$. En efecto, sea $T_1^* = T^*$ y sea $y_1^* \in S_{Y^*}$ tal que $\|T_1^* y_1^*\| \geq \|T_1^*\| - \varepsilon_1^2$ y, para $T_1^* y_1^*$, sea $x_1 \in S_X$ tal que $T_1^* y_1^*(x_1) \geq \|T_1^* y_1^*\| - \varepsilon_1^2$. Definimos la aplicación $T_2^* : Y^* \to X^*$ por

$$T_2^* y^* = T_1^* y^* + \varepsilon_1 (T_1^* y^*)(x_1) T_1^* y_1^*$$

y para T_2^* tomamos $y_2^* \in S_{Y^*}$ y $x_2 \in S_X$ tales que $\|T_2^* y_2^*\| \geq \|T_2^*\| - \varepsilon_2^2$ y $T_2^* y_2^*(x_2) \geq \|T_2^* y_2^*\| - \varepsilon_2^2$. A continuación, definimos la aplicación

$$T_3^* y^* = T_2^* y^* + \varepsilon_2 (T_2^* y^*)(x_2) T_2^* y_2^*,$$

y así sucesivamente. Observemos que, como T_1^* es $*$-$w \to *$-w continua ($T_1^* = T^*$), podemos deducir que $T_2, \cdots, T_k \cdots$ son $*$-$w \to *$-w continuas. Por tanto, existe la correspondiente aplicación $T_k : X \to Y$ tal que T_k^* es el construido.

a) Probaremos ahora, por inducción, que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\|T_k^*\| \leq 1 + 2(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}),$$

con lo que se tendría $\|T_k^*\| < 1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. En efecto, para $k = 1$ el resultado es trivialmente cierto. Si también es cierto para k, entonces si $y^* \in B_{Y^*}$ se verifica

$$\begin{aligned} \|T_{k+1}^* y^*\| &\leq \|T_k^* y^*\| + \varepsilon_k (T_k^* y^*)(x_k) \|T_k^* y_k^*\| \\ &\leq 1 + 2(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}) + \varepsilon_k \|T_k^*\|^2 \\ &\leq 1 + 2(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{k-1}) + 2\varepsilon_k. \end{aligned}$$

b) Veamos ahora que para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica $\|T_{k+1}^* - T_k^*\| \geq 2\varepsilon_k$. Si $y^* \in B_{Y^*}$ se cumple $\|T_{k+1}^* y^* - T_k^* y^*\| \leq \varepsilon_k |(T_k^* y^*)(x_k)| \|T_k^* y_k^*\| \leq \varepsilon_k \|T_k^*\|^2 \leq \varepsilon_k \frac{16}{9} \leq 2\varepsilon_k$.

c) Demostraremos que, para $k > j$, se tiene $\|T_k^* - T_j^*\| \leq 2(\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{k-1})$. En efecto,

$$\|T_k^* - T_j^*\| \leq \|T_k^* - T_{k-1}^*\| + \cdots + \|T_{j+1}^* - T_j^*\| \leq 2(\varepsilon_j + \cdots + \varepsilon_{k-1}).$$

d) Probaremos que para cada k es $\|T^*_{k+1}\| \geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|T^*_{k+1}\| &\geq \|T^*_{k+1}y^*_k\| = \|T^*_k y^*_k + \varepsilon_k(T^*_k y^*_k)(x_k)T^*_k y^*_k\| \\
&= \|T^*_k((1+\varepsilon_k(T^*_k y^*_k)(x_k))y^*_k\| = [1+\varepsilon_k(T^*_k y^*_k)(x_k)]\|T^*_k y^*_k\| \\
&\geq \left\{1+\varepsilon_k[\|T_k y^*_k\| - \varepsilon_k^2]\right\}\|T^*_k y^*_k\| \\
&\geq \left\{1+\varepsilon_k[\|T^*_k\| - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^2]\right\}(\|T^*_k\| - \varepsilon_k^2) \\
&= [1+\varepsilon_k\|T^*_k\| - 2\varepsilon_k^2][\|T^*_k\| - \varepsilon_k^2] \\
&= \|T^*_k\| - \varepsilon_k^2 + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - \varepsilon_k^3\|T^*_k\| - 2\varepsilon_k^3\|T^*_k\| + 2\varepsilon_k^5 \\
&\geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - 4\varepsilon_k^3 - 2\varepsilon_k^2 + 2\varepsilon_k^5 \geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2,
\end{aligned}$$

ya que $-\varepsilon_k^3 + \varepsilon_k^2 + 2\varepsilon_k^5 \geq -4\varepsilon_k^2$, o lo que es lo mismo $2\varepsilon_k^5 + 3\varepsilon_k^2 - \varepsilon_k^3 \geq 0$ pues $\varepsilon_k \in (0, \frac{1}{10k})$.

e) Por inducción probaremos que $\|T^*_k\| > 2\sqrt{\varepsilon_k}$. Si $k=1$ ello es evidente. Si $\|T^*_k\| > 2\sqrt{\varepsilon_k}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T^*_{k+1}\| &\geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 \\
&\geq 2\sqrt{\varepsilon_k} + \varepsilon_k(2\sqrt{\varepsilon_k})^2 - 4\varepsilon_k^2 \\
&\geq 2\sqrt{\varepsilon_k} > 2\sqrt{\varepsilon_{k+1}}
\end{aligned}$$

f) Para cada $k \in \mathbb{N}$ es $\|T^*_{k+1}\| \geq \|T^*_k\| \geq 1$. En efecto, basta observar que $\|T^*_1\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\|T^*_{k+1}\| &\geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k\|T^*_k\|^2 - 4\varepsilon_k^2 \\
&\geq \|T^*_k\| + \varepsilon_k(2\sqrt{\varepsilon_k})^2 - 4\varepsilon_k^2 = \|T^*_k\|.
\end{aligned}$$

g) Si $k > j$ se cumple $\|T^*_{j+1}y^*_k\| \geq \|T^*_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|T^*_{j+1}y^*_k\| &= \|T^*_{j+1}y^*_k - T^*_k y^*_k + T^*_k y^*_k\| \\
&\geq \|T^*_k y^*_k\| - \|T^*_{j+1}y^*_k - T^*_k y^*_k\| \\
&\geq \|T^*_k\| - \varepsilon_k^2 - \|T^*_{j+1} - T^*_k\| \\
&\geq \|T^*_k\| - \varepsilon_k^2 - 2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}).
\end{aligned}$$

Como $2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{k-1}) \leq 2\sum_{i=j+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_j^2$, tenemos que

$$\|T^*_{j+1}y^*_k\| \geq \|T^*_k\| - \varepsilon_k^2 - \varepsilon_j^2 \geq \|T^*_k\| - 2\varepsilon_j^2.$$

h) Si $k > j$ se verifica que $|(T^*_j y^*_k)(x_j)| \geq \|T^*_j\| - 6\varepsilon_j$. En efecto, $T^*_{j+1}y^*_k = T^*_j y^*_k + \varepsilon_j(T^*_j y^*_k)(x_j)T^*_j y^*_j$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j|(T^*_j y^*_k)(y_j)|\|T^*_j\| + \|T^*_j\| &\geq \|T^*_{j+1}y^*_k\| \geq \|T_{j+1}\| - 2\varepsilon_j^2 \\
&\geq \|T^*_j\| + \varepsilon_j\|T^*_j\|^2 - 4\varepsilon_j^2 - 2\varepsilon_j^2 \\
&= \|T^*_j\| + \varepsilon_j\|T^*_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2 \\
&\geq \|T^*_j\| + \varepsilon_j\|T^*_j\|^2 - 6\varepsilon_j^2\|T^*_j\|.
\end{aligned}$$

Dividiendo por $\|T^*_j\|$, por ε_j y simplificando queda $|(T^*_j y^*_k)(x_j)| \geq \|T^*_j\| - 6\varepsilon_j$.

i) Probaremos que $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C\mathcal{L}(X,Y)$. Sea $n\in\mathbb{N}$. Existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_k^2<\varepsilon_k<\frac{1}{10k}<\frac{1}{n}$, para $k\geq k_0$. Sea $k>j\geq k_0$; entonces:

$$\|T_k-T_j\|\leq 2(\varepsilon_{j+1}+\cdots+\varepsilon_{k-1})\leq 2(\varepsilon_{j+1}+\dots)\leq\varepsilon_j^2<\frac{1}{n}.$$

Por tanto, existe $T_0\in C\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n)=T_0$. Tendremos también que $\lim\limits_{n\to\infty}T_n^*=T_0^*$.

Observemos que si $k>j$ se tiene que $\|T_k^*-T_j^*\|\leq 2\sum\limits_{i=1}^{k-1}\varepsilon_i$. Tomando límite para $k\to\infty$, tenemos

$$\|T_0^*-T_j^*\|\leq 2\sum_{i=j}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon_{j-1}^2.$$

Obsérvese que $\|T_0^*-T^*\|=\|T_0-T\|\leq 2\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i<\varepsilon$.

Para T_0^* consideremos las sucesiones $(y_k^*)_{k\in\mathbb{N}}\subset S_{Y^*}$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset S_X$. Sea $k>j$, se tiene que $\|T_j^*-T_0^*\|>\|T_j^*y_k^*-T_0^*y_k^*\|>|(T_j^*y_k^*-T_0^*y_k^*)(x_j)|\geq|(T_j^*y_k^*)(x_j)|-|T_0^*y_k^*(x_j)|$. Por tanto,

$$|T_0^*y_k^*(x_j)|\geq|(T_j^*y_k^*)(x_j)|-\|T_j^*-T_0^*\|\geq\|T_j^*\|-6\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}^2.$$

Como $\|T_j^*\|\geq\|T_0^*\|-\|T_0^*-T_j^*\|$, deducimos que

$$|T_0^*y_k^*(x_j)|\geq\|T_0^*\|-\|T_0^*-T_j^*\|-6\varepsilon_j-\varepsilon_{j-1}^2\geq\|T_0^*\|-6\varepsilon_j-2\varepsilon_{j-1}^2\geq\|T_0^*\|-\frac{1}{j}.$$

Aplicando el lema podemos afirmar que T_0^* alcanza la norma y concluimos la demostración. ∎

Obsérvese que, en la demostración anterior, para cada k es $T_{k+1}^*-T_k^*$ de rango finito. Así pues, $T_k^*-T^*=(T_k^*-T_{k-1}^*)+\cdots+(T_2^*-T_1^*)$ es también de rango finito y $\lim\limits_{k\to\infty}(T_k^*-T^*)=T_0^*-T^*$. Esto prueba que $T_0^*-T^*$ es compacta.

11.6 Aplicaciones débilmente compactas

Concluiremos este capítulo estudiando otras cuestiones relacionadas con la compacidad débil como pueden ser: aplicaciones débil compactas, propiedad de Dunford-Pettis,etc. Antes de estudiar las aplicaciones compactas lo usual es estudiar las aplicaciones débilmente compactas. Por su importancia en las aplicaciones, hemos preferido dedicar a las aplicaciones compactas una parte importante de uno de los próximos capítulos.

DEFINICIÓN 11.6.1 *Sean X, Y dos espacios normados y sea $T:X\to Y$ una aplicación lineal. Se dice que T es* ***débilmente compacta*** *si para cada sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X se verifica que la sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión débilmente convergente.*

TEOREMA 11.6.2 *Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación débilmente compacta. Se verifica que T es continua.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, si T no es continua tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_X$ tal que $\|Tx_n\| > n$. Entonces (Tx_n) no puede tener una subsucesión débilmente convergente ya que no tiene subsucesiones acotadas. ∎

Supongamos ahora que Z_1 y Z_2 son dos espacios normados y que las aplicaciones $U : Z_1 \to X$ y $V : Y \to Z_2$ son lineales y continuas. Es sencillo comprobar que si la aplicación $T : X \to Y$ es débilmente compacta entonces son débilmente compactas las aplicaciones TU y VT.

Es también sencillo comprobar que si V es una isometría lineal y T es continua entonces T es débilmente compacto si y sólo si VT es débilmente compacto.

En el siguiente teorema obtendremos diversas caracterizaciones de las aplicaciones débilmente compactas.

TEOREMA 11.6.3 *Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) T es débilmente compacta;

b) TB_X es relativamente débilmente compacto,

c) Si $A \subset X$ es un conjunto acotado entonces TA es relativamente débilmente compacto;

d) T es continua y $T^{**}(X^{**}) \subset j_2(Y)$ donde $j_2 : Y \to Y^{**}$ es la correspondiente aplicación canónica del espacio Y en su bidual;

e) T es continua y la aplicación dual T^* es $*$-w - w continua;

f) La aplicación dual T^* es débil compacta.

DEMOSTRACIÓN a) $\Rightarrow$ b) Debido al teorema de Eberlein-Smulian, bastará con probar que $w\,\mathrm{cl}(TB_X)$ es numerablemente compacto. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $w\,\mathrm{cl}(TB_X)$. Como $\| \; \| - \mathrm{cl}(TB_X) = w\,\mathrm{cl}(TB_X)$ tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_X$ tal que $\|y_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}$. Por ser T una aplicación débilmente compacta, existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y existe $y \in Y$ tales que $w\lim\limits_j Tx_{n_j} = y$. Probaremos que $w\lim\limits_j y_{n_j} = y$. Sea $g \in Y^*$; para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |g(y_{n_j}) - g(y)| &\leq |g(y_{n_j}) - g(Tx_{n_j})| + |g(Tx_{n_j}) - g(T)| \\ &\leq \|g\| \, \|y_{n_j} - Tx_{n_j}\| + |g(Tx_{n_j}) - g(y)|. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\lim\limits_j g(y_{n_j}) = g(y)$.

b) $\Rightarrow$ c) Sea $A \subset X$ un conjunto acotado. Tenemos que existe $H > 0$ tal que $A \subset HB_X$. Como $TA \subset H(TB_X)$ y $H(TB_X)$ es relativamente débilmente compacto, deducimos que TA es relativamente débilmente compacto.

c) $\Rightarrow$ d) Bastará con probar que $T^{**}(B_{X^{**}}) \subset j_2(B_Y)$. Recordemos que el teorema de Goldstine afirma que $\overline{j_1 B_X}^{*-w} = B_{X^{**}}$. Recordemos también que $T^{**}(j_1 x) = j_2(Tx)$, para $x \in X$. Sea $x^{**} \in B_{X^{**}}$ entonces existe una red, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, de B_X, tal que $*\text{-}w \lim\limits_\alpha j_1 x_\alpha = x^{**}$. Como T^{**} es $*\text{-}w \leftrightarrow *\text{-}w$ continua, tenemos que $*\text{-}w \lim T^{**}(j_1 x_\alpha) = T^{**}x^{**}$. Como $w\,\mathrm{cl}(TB_X)$ es débilmente compacto, existe una subred, $(x_\beta)_{\beta \in I'}$, de $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ y existe un $y \in Y$ tales que $w \lim\limits_{\beta \in I'} Tx_\beta = y$. Entonces, en Y^{**} se verifica que $*\text{-}w \lim j_2(Tx_\beta) = *\text{-}w \lim T^{**}(j_1 x_\beta) = j_2(y)$. Como también tenemos que $*\text{-}w \lim T^{**}(j_1 x_\beta) = T^{**}x^{**}$, deducimos que $T^{**}x^{**} = j_2(y)$.

d) $\Rightarrow$ e) Supongamos que $T^{**}(X^{**}) \subset j_2 Y$ y demostraremos que $T^* : (Y^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_w)$ es continua; con esto también quedará probada la continuidad de $T^* : (Y^*, T_{*-w}) \to (X^*, T_{*-w})$ y por tanto la continuidad de T.

Sea $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en Y^* tal que $*\text{-}w \lim\limits_\alpha g_\alpha = 0$. Demostraremos que $w \lim T^* g_\alpha = 0$. Sea $x^{**} \in X^{**}$. Para cada $\alpha \in I$ tenemos que $x^{**}(T^* g_\alpha) = T^{**}x^{**}(g_\alpha)$ y, como $T^{**}x^{**} \in j_2(Y)$, existe un $y \in Y$ tal que $T^{**}x^{**} = j_2(y)$. Por tanto $\lim\limits_\alpha x^{**}(T^* g_\alpha) = \lim\limits_\alpha g_\alpha(y) = 0$.

e) $\Rightarrow$ f) Como B_{Y^*} es compacto en (Y^*, T_{*-w}), deducimos que $T^* B_{Y^*}$ es débilmente compacto; así pues, T^* es débilmente compacta.

f) $\Rightarrow$ a) Con la cadena de implicaciones desde a) hasta e) ha quedado probado que si una aplicación es débilmente compacta entonces también será débilmente compacta la aplicación dual. Por tanto podemos afirmar que T^{**} es débilmente compacta. Como $T = j_2 T^{**} j_1$, deducimos que T es también débilmente compacta.

∎

Sean X e Y dos espacios normados. Denotaremos por $KW(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones de X en Y que son débil compactas. Es sencillo comprobar que $KW(X,Y)$ es un subespacio vectorial de $C\mathcal{L}(X,Y)$. Demostraremos que $KW(X,Y)$ es cerrado en $C\mathcal{L}(X,Y)$ cuando Y es completo.

En efecto, supongamos que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $KW(X,Y)$ tal que $\lim T_n = T$ en $C\mathcal{L}(X,Y)$. Probaremos que $T \in KW(X,Y)$. Tenemos que $\lim T_n^{**} = T^{**}$; por tanto, si $x^{**} \in X^{**}$ se verifica que $T^{**}x^{**} = \lim\limits_n T_n^{**}x^{**}$. Como $(T_n^{**}x^{**})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de $j_2(Y)$, que es un subespacio cerrado de Y^{**}, deducimos que $T^{**}x^{**} \in j_2(Y)$.

Definición 11.6.4 *Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Se dirá que T es* ***completamente continua*** *, o de Dunford-Pettis, si T transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma. Es decir, si en X se verifica que $w \lim\limits_n x_n = x$ entonces en Y se verifica que $\lim\limits_n Tx_n = Tx$.*

Sean X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Es sencillo comprobar que T es completamente continua si y sólo si siempre que en X se verifique $w \lim x_n = 0$ entonces en Y se verifica que $\lim Tx_n = 0$.

También es claro que T será completamente continuo si y sólo si la aplicación $T : (X, T_w) \to (X, T_{\|\,\|})$ es secuencialmente continua.

Demostraremos que *si T es completamente continua entonces T es continua.* En efecto, si T no es continua entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B_X tal que $\|Tx_n\| > n^2$, para $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $w\lim_n \frac{1}{n}x_n = \lim_n \frac{1}{n}x_n = 0$ y es claro que $\left(T(\frac{1}{n}x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Y que no es convergente.

Supongamos ahora que Z_1 y Z_2 son dos espacios normados y que las aplicaciones $U : Z_1 \to X$ y $V : Y \to Z_2$ son lineales y continuas. Es sencillo comprobar que si la aplicación $T : X \to Y$ es completamente continua entonces también son completamente continuas las aplicaciones TU y VT. Es también sencillo comprobar que si V es una isometría lineal y T es continua entonces T es completemente continua si y sólo si VT es completamente continua.

TEOREMA 11.6.5 *Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces T es completamente continua si y sólo si para cada subconjunto débilmente compacto M de X se verifica que TM es compacto en Y.*

DEMOSTRACIÓN $\Rightarrow$ Sea M un subconjunto débilmente compacto de X. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en TM. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n \in M$ tal que $Tx_n = y_n$. Como M es débilmente compacto existe una subsucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y existe $x \in M$ tales que $w\lim_j x_{n_j} = x$. Como T es completamente continua tenemos que $\lim_j Tx_{n_j} = Tx$; esto prueba que TM es compacto.

$\Leftarrow$ Si T no es completamente continua existirá una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y un numero real $\varepsilon > 0$ de modo que $w\lim x_n = 0$ y $\|Tx_n\| > \varepsilon$, si $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es un conjunto débilmente compacto; por tanto, el conjunto $TM = \{Tx_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ será compacto en Y. Así pues, existe una subsucesión $(Tx_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y existe un $y \in Y$ de modo que $\lim_j Tx_{n_j} = y$. Obsérvese que necesariamente es $\|y\| \geq \varepsilon$. Por otra parte, como T es débil - débil continua, tenemos que $w\lim Tx_{n_j} = 0$ y por tanto deducimos que $y = 0$, lo que es una contradicción. ∎

Sean X e Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Supongamos que Z es un espacio normado y que $T_0 : Z \to X$ es una aplicación débilmente compacta. Es sencillo comprobar que si T es completamente continua entonces la composición TT_0 es una aplicación compacta (transforma sucesiones acotadas en sucesiones que tienen alguna subsucesión convergente).

Supongamos que Y es completo y que T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones que son convergentes. Demostraremos que entonces T es completamente continua.

En efecto, observemos en primer lugar que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio normado es débilmente de Cauchy (resp. de Cauchy para la norma) si y sólo si para cada par de sucesiones crecientes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de enteros se verifica que $w\lim_n(x_{p_n} - x_{q_n}) = 0$ (resp. $\lim_n \|x_{p_n} - x_{q_n}\| = 0$). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión débilmente Cauchy de X y $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de enteros entonces

$w \lim_n (x_{p_n} - x_{q_n}) = 0$. Así pues, también es $\lim_n (Tx_{p_n} - Tx_{q_n}) = 0$. De aquí se deduce que la sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y que por tanto es convergente.

Sean X e Y dos espacios normados. Denotaremos por $V(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones lineales de X en Y que son completamente continuas. Es sencillo comprobar que $V(X,Y)$ es un subespacio vectorial de $C\mathcal{L}(X,Y)$. Demostraremos que *$V(X,Y)$ es cerrado en $C\mathcal{L}(X,Y)$*.

En efecto, supongamos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $V(X,Y)$ tal que $\lim T_n = T$ en $C\mathcal{L}(X,Y)$. Probaremos que $T \in V(X,Y)$.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $w \lim_n x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ fijamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$, donde $M \in \mathbb{R}$ es tal que $M > 0$ y $\|x_n\| \leq M$ si $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_n T_m x_n = 0$, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, para $n \geq n_0$. Por tanto, se verifica que $\|Tx_n\| \leq \|Tx_n - T_m x_n\| + \|T_m x_n\| \leq \varepsilon$, para $n \geq n_0$. De aquí se deduce que $\lim_n Tx_n = 0$.

DEFINICIÓN 11.6.6 *Sea X un espacio normado. Se dirá que X tiene la* ***propiedad de Dunford-Pettis*** *(X es DP) si para cada espacio de Banach Y y cada aplicación lineal $T : X \to Y$ que sea débilmente compacta se verifica que T es completamente continua.*

NOTA 11.6.7 1. Sea X un espacio normado con la propiedad de Dunford-Pettis. Es evidente que para cada espacio normado Y, no necesariamente completo, y cada aplicación lineal $T : X \to Z$ que sea débilmente compacta se verifica que T es completamente continua (obsérvese que puede considerarse como espacio final de T el espacio complección CZ de Z).

2. Es evidente que la restricción a un subespacio de una aplicación completamente continua (resp. débilmente compacta) es completamente continua (resp. débilmente compacta).

Supongamos que X es un espacio normado y que $Z \subset X$ es un subespacio vectorial de X que es denso en X.

Sea Y un espacio de Banach y sea $T : Z \to Y$ una aplicación completamente continua. Consideremos la aplicación $\overline{T}$ de X en Y obtenida como la extensión por densidad de la aplicación T. Demostraremos que $\overline{T}$ es también completamente continua.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $w \lim x_n = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z_n \in Z$ tal que $\|z_n - x_n\| < \frac{1}{n}$. Es sencillo comprobar que $w \lim z_n = 0$ y que por tanto $\lim Tz_n = 0$. Como $\lim \overline{T}(z_n - x_n) = 0$ deducimos que también es $\lim Tx_n = 0$.

Supongamos ahora el caso en que T es débilmente compacta y demostraremos que la extensión $\overline{T}$ es débilmente compacta.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n \in Z$ tal que $\|z_n - x_n\| < \frac{1}{n}$. Tenemos que la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y, por tanto, existe una subsucesión $(z_{n_j})_{n\in\mathbb{N}}$ y existe $y \in Y$ de modo que $w \lim Tz_{n_j} = y$. Como $\lim_j \overline{T}(z_{n_j} - x_{n_j}) = 0$, también será $w \lim_j T(z_{n_j} - x_{n_j}) = 0$ y deducimos que $w \lim_j T_{x_{n_j}} = y$.

De todo lo anterior es sencillo deducir que Z es DP si y sólo si X es DP; en particular, el espacio normado X es DP si y sólo si CX es DP.

3. Sea X un espacio reflexivo infinito-dimensional. Tenemos que la aplicación identidad I de X en X es débilmente compacta pero no es completamente continua; por tanto, X no es DP.

Toda aplicación lineal de l_1 en cualquier espacio normado Y que sea continua es completamente continua, por tanto l_1 es DP.

Observemos que pueden existir aplicaciones que sean débilmente compactas y no sean completamente continuas. También pueden existir aplicaciones que sean completamente continuas y no sean débil compactas, como, por ejemplo, la aplicación identidad de l_1 en l_1.

Finalmente es sencillo comprobar que si dos espacios son isomórficos y uno es DP entonces también el otro es DP.

TEOREMA 11.6.8 *Sea X un espacio normado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es DPP;

b) Cada aplicación lineal T de X en c_0 que sea débilmente compacta es también completamente continua;

c) Para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X tal que $w\lim_n x_n = 0$ y cada sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* tal que $w\lim_n f_n = 0$ se verifica que $\lim_n f_n(x_n) = 0$;

d) Si en X se verifica que $\lim_n x_n = x$ y en X^* se verifica que $w\lim_n f_n = f$ entonces se verifica que $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN $a) \Rightarrow b)$ Es evidente.

$b) \Rightarrow c)$ Supongamos que c) es falso. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X débilmente nula y existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X^* débilmente nula de modo que para cierto número $\varepsilon > 0$ se verifica que $|f_n(x_n)| > \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definimos una aplicación T de X en c_0 en la forma $Tx = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Si $x \in X$, es claro que T es lineal. Como (f_n) es débilmente convergente, existirá $H > 0$ tal que $\|f_n\| < H$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así pues, si $x \in X$ tenemos que $\|Tx\| \leq H\|x\|$. Veamos que T es una aplicación lineal y continua que no es completamente continua. En efecto, se verifica que $w\lim x_n = 0$, pero para cada $m \in \mathbb{N}$ se $\|Tx_m\| = \|(f_n x_m)_{n\in\mathbb{N}}\| \geq |f_m(x_m)| \geq \varepsilon$. Si probamos que T es débilmente compacta habremos concluido la demostración.

Sea $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X que es acotada. Consideremos la aplicación canónica j de X en X^{**} y sea $x^{**} \in X^{**}$ un punto de $*$-w aglomeración de $(j(z_m))_{m\in\mathbb{N}}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos $B_j = B(x^{**}; f_1, \ldots, f_j; \frac{1}{j})$. Tenemos que B_j es entorno $*$-débil de x^{**} y por tanto podemos obtener inductivamente una subsucesión $(z_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de modo que $|f_i(z_{m_j}) - x^{**}(f_i)| \leq \frac{1}{j}$, para $i \in \{1, \ldots, j\}$. Tenemos que $(x^{**}(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ y probaremos que $w - \lim_j Tz_{m_j} = (x^{**}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Como $(Tz_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de c_0, bastará con probar que $(Tz_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge por coordenadas a $(x^{**}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$. La sucesión de la coordenada n-ésima de $(Tz_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es $(f_n(z_{m_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ y si $j \geq n$ se cumple $|f_n(z_{m_j}) - x^{**}(f_n)| \leq \frac{1}{j}$. Por tanto, $\lim_j f_n(z_{m_j}) = x^{**}(f_n)$.

Otra manera de probar que la aplicación T es débilmente compacta puede ser viendo que la aplicación dual T^* es continua de l_1, con T_{*-w}, en X^*, con T_w.

Sea $a \in l_1$. Tenemos que $T^*a = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)f_i$. Un entorno débil de T^*a es de la forma $V = B(T^*a; x_1^{**}, \ldots, x_m^{**}; \varepsilon)$. Claramente

$$U = B(a; (x_1^{**}(f_n)))_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, (x_m^{**}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}; \varepsilon)$$

es un entorno $*$-débil de a y es sencillo comprobar que si $b \in U$ entonces $T^*b \in V$.

$c) \Rightarrow d)$ Supongamos que tenemos en X que $w\lim x_n = x$ y que en X^* se verifica que $w\lim f_n = f$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_n(x_n) - f(x) = (f_n - f)(x_n - x) + f_n(x) + f(x_n) - 2f(x)$. Haciendo uso de la hipótesis, es sencillo deducir que $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

$d) \Rightarrow a)$ Si a) es falso entonces existe un espacio de Banach Y y existe una aplicación lineal $T : X \to Y$ que es débilmente compacta pero que no es completamente continua. Esto último significa que existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X y existe un $\delta > 0$ de modo que $w\lim z_n = 0$ y $\|Tz_n\| > \delta$, para $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in S_{Y^*}$ tal que $g_n(Tz_n) = \|Tz_n\|$. Como la aplicación dual $T^* : Y^* \to X^*$ es débilmente compacta, tenemos que existe $f \in X^*$ y existe una subsucesión $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $w\lim_j Tg_{n_j} = f$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ se verifica que $T^*g_{n_j}(z_{n_j}) = g_{n_j}(Tz_{n_j}) = \|Tz_{n_j}\| > \delta$. Por tanto tenemos que en X se verifica que $w\lim z_{n_j} = 0$ y en X^* se verifica que $w\lim T^*g_{n_j} = f$. Sin embargo, es falso que se verifique que $\lim_j T^*g_{n_j}(z_{n_j}) = f(0) = 0$. ∎

NOTA 11.6.9 Sea X un espacio normado y supongamos que el espacio dual X^* es DP. Demostraremos que entonces X es DP. En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X tal que $w\lim x_n = 0$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X^* tal que $w\lim f_n = 0$. De la débil - débil continuidad de la aplicación canónica $j : X \to X^{**}$ deducimos que en X^{**} se verifica que $w\lim j(x_n) = 0$ y como X^* es DP tenemos que $\lim j(x_n)(f_n) = \lim f_n(x_n) = 0$.

Como l_1 es DP podemos afirmar que c_0 es DP y también que c es DP.

En 1992 Stegall obtuvo un ejemplo de un espacio de Banach X con la propiedad de Schur pero tal que X^* no es DP (Stegall. "Duals of certain spaces with the Dunford-Pettis property". Notices Amer. Math. Soc. 19(7)).

Dunford y Pettis demostraron que los espacios tipo $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ son DP (donde (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida finito).

Grothendieck, en 1953, demostró que los espacios tipo $C(K)$ son DP (donde K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff).

Tema 12

Bases, series y copias.

12.1 Bases de Schauder

DEFINICIÓN 12.1.1 *Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dirá que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **base de Schauder** de X si para cada $x \in X$ existe una sucesión única de escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = x$.*

Como ejemplo destacado tenemos que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder tanto en c_0 como en l_p, $p \in [1+\infty)$.

Recordemos que una **base algebraica** para X es un conjunto $M \subset X$ que es libre y tal que $\mathcal{L}(M) = X$; es decir, todo vector de X es combinación lineal finita de vectores de M (M es sistema generador de X). Suponemos que es conocido que para cada espacio vectorial existe siempre base algebraica. Aquí las bases de este tipo serán llamadas **bases de Hamel** y entenderemos por base en un espacio normado lo que aquí hemos llamado base de Schauder.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de un espacio normado X tenemos que

$$[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = \operatorname{cl}\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N}) = X$$

y, por tanto, X es separable. Conviene aquí observar las siguientes cuestiones.

NOTA 12.1.2 1. Un problema que estuvo durante muchos años abierto es el conocido como *problema de la base.* ¿Todo espacio Banach separable tiene base? En 1.972, P. Enflo (utilizando resultados de Davie) construyó un espacio de Banach separable que no tiene base.

2. Si X es un espacio normado separable existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que es libre y tal que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$; sin embargo, ésto no significa que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea base de X.

3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de X y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 0$ entonces $\alpha_n = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si X es c_0 o l_1, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_1 = \frac{1}{2}e_1, \cdots, x_n = \frac{1}{2}e_n - e_{n-1}$, es tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es libre; además, como $c_{00} \subset \mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$, deducimos que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$. Observemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n = 0$ y que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es base de X.

DEFINICIÓN 12.1.3 *Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X. El **n-ésimo funcional asociado a la base** es la aplicación $f_n : X \to \mathbb{K}$ definida, para $x \in X$, de la siguiente forma: si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ entonces $f_n(x) = \alpha_n$.*

Es evidente que cada f_n es lineal y que $f_n(x_m) = \delta_{nm}$. Además, si $x \in X$, se verifica que $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la aplicación $P_n : X \to \mathcal{L}(x_1 \cdots x_n) \subset X$ definida por $P_n(x) = \sum_{i=i}^{n} f_i(x) x_i$. Es claro que P_n es lineal y que $P_n(x) = x$ si $x \in \mathcal{L}(x_1 \cdots x_n)$. Así pues, la sucesión $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Es usual denominar a P_n como la **n-ésima proyección asociada a la base** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación P_n es la proyección sobre $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ desde $[x_i]_{i>n}$.

Es sencillo comprobar que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X y M es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ entonces $[x_i]_{i\notin M}$ es el complemento topológico de $[x_i]_{i\in M} = \mathcal{L}(x_i : i \in M)$. Más adelante se comentará que ésto no es necesariamente cierto si M es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.

Es también sencillo comprobar que si $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares distintos de cero y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X entonces se verifica que $(\beta_n x_n)$ es también base de X.

Diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una **base normalizada** de X si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X tal que $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 12.1.4 *Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X. Entonces, cada f_n, con $n \in \mathbb{N}$, es continua si y sólo si cada P_n, con $n \in \mathbb{N}$, es continua.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que P_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in X$ se tiene $f_n(x)x_n = (P_n - P_{n-1})(x)$ y por tanto

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\|x_n\|}\|(P_n - P_{n-1})\| \leq \left[\frac{1}{\|x_n\|}(\|P_n\| + \|P_{n-1}\|)\right]\|x\|.$$

Recíprocamente, si ahora suponemos que cada f_n es continua entonces también lo será cada P_n ya que $P_n = x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n$. ∎

Teorema 12.1.5 *Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X. Si X es un espacio de Banach entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ el correspondiente funcional asociado f_n es continuo y existe $M > 0$ tal que $\|P_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración Sea

$$V = \{x \in X : \|P_n(x)\| \leq 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $x \in V$, como $\|x\| = \lim \|P_n(x)\|$ se verifica $\|x\| \leq 1$. Sea $x \in X$; como $\|x\| = \lim \|P_n(x)\|$, existe $m \in \mathbb{N}$ con $m > \|x\|$ tal que $\|P_n(x)\| < m$, para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\frac{1}{m}x \in V$, por lo que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} mV = X$. Del teorema de Baire deducimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Int\,(\overline{mV}) \neq \emptyset$. Por ello, deducimos que $Int\,(\overline{V}) \neq \emptyset$.

Supongamos que conseguimos demostrar que V es *cs*-cerrado. En este caso tendríamos que $Int\,(V) = Int\,(\overline{V})$, por lo que será $Int\,(V) \neq \emptyset$. Como es claro que V es convexo y equilibrado, podemos deducir que $0 \in Int\,(V)$ y por tanto existe $M > 0$ tal que $MB_X \subset V$. Por ello, $B_X \subset MV$ y, para cada $x \in B_X$, se cumple $\|P_n(x)\| \leq M$. De esta forma deducimos que P_n es continua con $\|P_n\| \leq M$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Nos quedaba por demostrar que V efectivamente era cs-cerrado. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n z_n$ una serie convexa en V que converge a cierto $z \in X$. Demostraremos que $z \in V$.

Si $n \in \mathbb{N}$ tenemos que para cada $r \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\|P_n(\lambda_r z_r)\| = |\lambda_r| \| P_n(z_r) \| \leq \lambda_r.$$

De la convergencia de $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r$ deducimos que $\sum_{r=1}^{\infty} \|P_n(\lambda_r z_r)\|$ es convergente. Como estamos en un espacio de Banach, podemos afirmar que $\sum_{r=1}^{\infty} P_n(\lambda_r z_r)$ será convergente a cierto $y_n \in X$ con $\|y_n\| \leq 1$. Observemos que esta convergencia es uniforme en $n \in \mathbb{N}$. Procedemos ahora de la siguiente forma:

Para cada $r \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f_1(\lambda_r z_r)x_1 = P_1(\lambda_r z_r);$$

por tanto, $\sum_{r=1}^{\infty} f_1(\lambda_r z_r)x_1$ es convergente a y_1 y también $\left(\sum_{r=1}^{\infty} f_1(\lambda_r z_r)\right) x_1 = y_1$. Tenemos que $\sum_{r=1}^{\infty} f_1(\lambda_r z_r)$ es convergente a cierto $\mu_1 \in \mathbb{K}$ y $\mu_1 x_1 = y_1$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple

$$f_2\,(\lambda_r z_r)\, x_2 = P_2(\lambda_r z_r) - P_1(\lambda_r z_r).$$

Por tanto $\sum_{r=1}^{\infty} f_2(\lambda_r z_r)x_2 = y_2 - y_1$ y será $(\sum_{r=1}^{\infty} f_2(\lambda_r, z_r))\ x_2 = y_2 - y_1$. Además, $\sum_{r=1}^{\infty} f_2(\lambda_r, z_r)$ será convergente a cierto $\mu_2 \in \mathbb{K}$ y se tiene que $\mu_2 x_2 = y_2 - y_1$.

Así sucesivamente podemos probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$\left(\sum_{r=1}^{\infty} f_n(\lambda_r z_r)\right) x_n = y_n - y_{n-1} - \cdots - y_1$$

y, si $\sum_{r=1}^{\infty} f_n(\lambda_r z_r) = \mu_n \in \mathbb{K}$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\mu_1 x_1 = y_1, \ldots, \mu_n x_n = y_n - y_{n-1} - \cdots - y_1$. Por consiguiente, $y_n = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$.

Demostraremos que $\lim_{n\to\infty} y_n = z$; es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n = z$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\|y_n - z\| \leq \ & \|y_n - P_n(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r)\| \\ & + \|P_n(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r) - (\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r)\| \\ & + \|(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r) - z\|.\end{aligned}$$

Como $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r < \infty$, existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i \geq r} \lambda_i < \frac{\varepsilon}{3}$. Si fijamos este r se tiene

$$\|z - (\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r)\| = \|\sum_{i>r} \lambda_i z_i\| \leq \sum_{i>r} \|\lambda_i z_i\| \leq \sum_{i>r} \lambda_i < \frac{\varepsilon}{3}$$

y, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$\begin{aligned}\|y_n - P_n(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r)\| &= \|y_n - (P_n(\lambda_1 z_1) + \cdots + P_n(\lambda_r z_r))\| \\ &= \|\sum_{i>r} P_n(\lambda_i z_i)\| \leq \sum_{i>r} \|P_n(\lambda_i z_i)\| \\ &\leq \sum_{i>r} \lambda_i < \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Finalmente, como $\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r) = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r$, tenemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica

$$\|P_n(\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r) - (\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por tanto, $\|y_n - z\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Como $z = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $P_n(z) = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = y_n$ y, por ser $\|y_n\| \leq 1$, deducimos que $z \in V$. ■

NOTA 12.1.6 Probaremos que el teorema anterior no es cierto en el caso en que X sea normado no completo.

Consideremos en c_{00} la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_1 = e_1$ y $x_n = e_n - e_{n-1}$ si $n \geq 2$. Es fácil comprobar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de c_{00}. Veremos que el funcional asociado f_1: $c_{00} \to \mathbb{K}$ no es continuo. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$e_1 + \cdots + e_n = nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n$$

y $f_1(e_1 + \cdots + e_n) = n$.

TEOREMA 12.1.7 *Sea X un espacio normado y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en X tal que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in X^*$ tal que $f_n(x_m) = \delta_{nm}$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Definimos, para $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $P_n : X \to X$ por $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i$. Si existe $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, tal que $\|P_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X.*

DEMOSTRACIÓN Sea $x \in X$; probaremos que $x = \sum_{i\geq 1}^{\infty} f_i(x)x_i$ o, lo que es lo mismo, $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x$. Sea $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Como $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$ existe $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ tal que $\|y - x\| < \varepsilon$. Para cada $n \geq m$ tenemos que $P_n(y) = y$. Por tanto, $\|P_n(x) - y\| = \|P_n(x - y)\| \leq M\varepsilon$ y

$$\|P_n(x) - x\| \leq \|P_n(x) - y\| + \|y - x\| \leq M\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(M + 1).$$

Finalmente, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\right) = f_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i x_i\right)$$

y, por tanto, $\lambda_n = \mu_n$. ∎

TEOREMA 12.1.8 **[Teorema de Nikolskii]**

Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X que son distintos de cero y tales que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X si y sólo si existe $M > 0$ tal que para cada sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares se tiene que:

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leq M\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\| \text{ si } p, n \in \mathbb{N} \text{ y } p \geq n.$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X y sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de escalares. Tenemos que existe $M > 0$ tal que $\|P_n\| \leq M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $n, p \in \mathbb{N}$ y $p \geq n$, se tiene

$$P_n(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Por tanto

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_1 x_n\| = \|P_n(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p)\| \leq M\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\|.$$

Supongamos ahora que se tiene la condición del enunciado, probaremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es libre. Si $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$ tenemos que

$$\|\lambda_1 x_1\| \leq M\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\| = 0; \text{ deducimos que } \lambda_1 = 0,$$
$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \leq M\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\| = 0; \text{ deducimos que } \lambda_2 = 0.$$

Procediendo de esta forma quedaría probado que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. ∎

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos en $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ las aplicaciones f_n y P_n de la siguiente forma: para $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, $f_n(x) = \lambda_n$ y $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Tenemos que $\|P_n(x)\| \leq M\|x\|$ y por tanto P_n es continua en $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ y también lo es f_n. Por la densidad de $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ en X, podemos extender f_n y P_n a todo X con igual norma y tenemos que, para cada $x \in X$, se verifica $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) x_i$, con $\|P_n\| \leq M$, y $f_n(x_m) = \delta_{nm}$, para $m \in \mathbb{N}$. Del teorema anterior deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base.

NOTA 12.1.9 En la situación del teorema anterior, tenemos que $\|\lambda_1 x_1\| \leq M\|\lambda_1 x_1\|$, por lo que tiene que ser $M \geq 1$. Si fuese $M = 1$ se diría que la base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **monótona**. En este caso tenemos que para cada $x \in X$ la sucesión $(\|P_n(x)\|)$ es creciente y convergente a $\|x\|$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\|P_n\| \leq 1$ y, como P_n es una proyección, tenemos que $\|P_n\| = \|P_n \cdot P_n\| \leq \|P_n\|^2$, por lo que deducimos que $\|P_n\| = 1$.

Es claro que si $\|P_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base monótona.

Al número M del teorema anterior se le suele denominar **constante básica** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12.2 Sucesiones básicas. Ejemplos

DEFINICIÓN 12.2.1 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$.*

Podemos, por tanto, afirmar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es básica si y sólo si existe $M > 0$ tal que para cada sucesión de escalares $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica que*

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leq M\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p\|,$$

si $n, p \in \mathbb{N}$ y $n \leq p$.

TEOREMA 12.2.2 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de funcionales asociados, es básica en X^*.*

DEMOSTRACIÓN Para cada x_n consideremos el correspondiente elemento $\hat{x}_n$ del bidual X^{**} de X. Consideremos la aplicación $T_n : [f_n]_{n\in\mathbb{N}} \to X^*$ definida por

$T_n(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(x^*)f_i$. Si $x^* \in [f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned}(T_n x^*)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(x^*)f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)x^*(x_i)\\ &= x^*\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)x_i\right) = x^*(P_n(x))\\ &= (P_n^*\, x^*)(x).\end{aligned}$$

Así pues, $T_n = P_n^*$ en $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y deducimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $\|T_n\| = \|P_n^*\| = \|P_n\|$ y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

NOTA 12.2.3 1.- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X entonces la sucesión de funcionales asociados (f_n) es básica en X^*, pero no es necesariamente una base de X^*. Por ejemplo, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de l_1 y la sucesión de funcionales asociados es la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_∞, que verifica $[e_n]_{n\in\mathbb{N}} = c_0$.

2.- Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es básica en X entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es M-base y la sucesión de funcionales asociados $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es total.

Conviene ahora considerar el siguiente ejemplo: sea X el subespacio de $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ formado por las funciones f tales que $f(0) = f(2\pi)$. Tenemos que X es un espacio de Banach separable. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n el elemento de X definido por $x_n(t) = e^{int}$ si $t \in [0, 2\pi]$ y sea f_n el elemento de X^* definido por

$$f_n(x) = \int_0^{2\pi} e^{-int}x(t)dt,$$

para $x \in X$. Tenemos que $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ es biortogonal. Además $[x_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es total.

En el trabajo "On a conjeture of Littlewood and idempotent measures" (Amer. J. Math. 82, 191-212. 1960) de P. Cohen, se prueba que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es básica.

3.- Si X es un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que es básica tenemos que cada subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplirá la condición del teorema de Nikolskii y por tanto será también básica.

4.- Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de un espacio normado X. Sea

$$M = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \text{ es convergente }\}.$$

Con las operaciones usuales, M es un espacio vectorial tal que $c_{00} \subset M$. Si X es un espacio de Banach y $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces es claro que $l_1 \subset M \subset c_0$. Al espacio M se le denomina **dominio de convergencia** de la sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dos bases con el mismo dominio de convergencia se dice que son equivalentes. Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo de X sobre Y y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X es sencillo comprobar que (Tx_n) es una base de Y, que es equivalente a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. El recíproco de este resultado es cierto si X e Y son espacios de Banach.

TEOREMA 12.2.4 *Si X e Y son espacios de Banach con bases equivalentes entonces son isomórficos.*

DEMOSTRACIÓN Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Y de modo que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. Definimos $T: X \to Y$ por

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n.$$

Es claro que T es lineal y biyectiva. Demostraremos que GT, el grafo de T, es cerrado.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y^*$ los respectivos funcionales asociados. Es claro que $(x,y) \in GT$ si y sólo si $y = Tx$; esto sucede si y sólo si $f_n(x) = g_n(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en GT tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ pero que $y \neq Tx$. Entonces existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(x) \neq g_m(y)$. Por la continuidad de f y g deducimos que existe $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, tal que si $\|x' - x\| < \delta$ y $\|y' - y\| < \delta$ entonces $f_m(x') \neq g_m(y')$. Como existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_p - x\| < \delta$ y $\|y_p - y\| < \delta$, deducimos que $f_m(x_p) \neq g_m(y_p)$, lo cual contradice que $(x_p, y_p) \in GT$. ∎

NOTA 12.2.5 1.- Sean X e Y dos espacios de Banach. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ dos sucesiones básicas. Supongamos que existen $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ tales que para cada sucesión (α_n) de escalares y cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$k_1 \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| \leq \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\| \leq k_2 \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|. \qquad (12.2.1)$$

Entonces podemos deducir con facilidad que estas sucesiones básicas tienen el mismo dominio de convergencia y por tanto son equivalentes. Así pues, también tenemos que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ son isomórficos.

Recíprocamente, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes se tiene que $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ son isomórficos por medio de la aplicación definida por $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$– Es sencillo pues deducir que se verifica (12.2.1).

2.- Si M es el dominio de convergencia de una sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio normado X y en M definimos $\|(\alpha_n)\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n x_n\|$, tenemos que $\|(\alpha_i)\|$ es una norma en M y la aplicación $\varphi((\alpha_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ es una isometría lineal y biyectiva entre M y $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base en M equivalente a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.- Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de un espacio de Banach X. Sabemos que para cada conjunto infinito $P \subset \mathbb{N}$ se verifica que $(x_i)_{i\in P}$ es una sucesión básica; sin embargo, no podemos afirmar que cuando $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i x_i$ sea convergente entonces también lo sea $\sum\limits_{i\in P} \alpha_i x_i$ (después veremos un ejemplo). Cuando así suceda, diremos que $(x_i)_{i\in P}$ es una **subbase complementada** de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

En esta situación, denotamos $Y = [x_i]_{i\in P}$ y $Z = [x_i]_{i\in M\setminus P}$; veremos que $Y\cap Z = \{0\}$. Sea $x\in Y\cap Z$; podemos escribir $x = \sum\limits_{i\in P}\alpha_i x_i = \sum\limits_{i\in \mathbb{N}-P}\beta_i x_i$. Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones definidas por

$$a_n = \begin{cases} \alpha_n, & \text{si } n\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{si } n\notin P, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \beta_n, & \text{si } n\notin\mathbb{N}, \\ 0, & \text{si } n\in P \end{cases}$$

Entonces, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_n x_n$ y para cada $n\in\mathbb{N}$ se tiene $a_n = b_n$ y deducimos que $\alpha_i = 0$ si $i\in\mathbb{N}$; por tanto $x = 0$.

Vamos a demostrar que $(x_i)_{i\in P}$ es subbase complementada si y sólo si $Y+Z = X$ (obsérvese que, al ser cerrados, serán complementos topológicos). Supongamos que $Y+Z = X$. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n = x$; tenemos que $x = y+z$ donde $y = \sum\limits_{i\in P}\alpha_i x_i\in Y$ y $z = \sum_{i\in\mathbb{N}\setminus P}\beta_i x_i\in Z$. Deducimos que $\alpha_i = a_i$ si $i\in P$ y $\beta_i = a_i$ si $i\notin P$: así pues, $\sum\limits_{i\in P} a_i x_i$ converge.

Recíprocamente, si $(x_i)_{i\in P}$ es una subbase complementada y $x = \sum a_n x_n\in X$ tenemos que la subserie $\sum\limits_{n\in P} a_n x_n = y\in Y$ es convergente, lo que implica que también converge $\sum\limits_{n\notin P} a_n x_n = x - y = z\in Z$; así pues $x\in Y+Z$.

4.- Consideremos en l_1 la sucesión definida por $b_1 = e_1$ y $b_n = e_n - e_{n-1}$ si $n\geq 2$. Veamos que $(b_n)_n$ es base de l_1. Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l_1$ y sean

$$\alpha_1 = \sum_{i\geq 1} a_i,\quad \alpha_2 = \sum_{i\geq 2} a_i,\ldots,\alpha_n = \sum_{i\geq n} a_i,\ldots.$$

Tenemos, para cada $n\in\mathbb{N}$, que $a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. Probaremos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n b_n = a$; esto es claro ya que

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = a_1 e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1} + \alpha_n e_n$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\|a - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i\| = \lim_{n\to\infty}(|a_n - \alpha_n| + \sum_{n+1}^{\infty}|a_i|) = 0.$$

Si fuese $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i = a\in l_1$ se verificaría que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ y por tanto $\sum\limits_{i\geq 1} a_i = \alpha_1$ ...... $\sum\limits_{i\geq n} a_i = \alpha_n\ldots$; por consiguiente, (b_n) es una base de l_1.

Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de $\mathbb{K}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ y $\lim(\alpha_n) = 0$ se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n = a \in l_1$, donde $a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ para cada n. En efecto,

$$\begin{aligned} \|a - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\| &= \| - \alpha_{n+1} e_n + \sum_{i\geq n+1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) e_i \| \\ &= |\alpha_{n+1}| + \textstyle\sum_{i\geq n+1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}|. \end{aligned}$$

Así pues, es sencillo entender que el dominio de convergencia M de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es exactamente

$$M = \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \infty, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\}.$$

Observemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \in l_1$, pero $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2n}\right) b_{2n}$ no converge. En efecto, esto equivale a que lo haga $\displaystyle\sum_{i\geq 1} \alpha_i b_i$, donde $\alpha_i = 0$ si i impar y $\alpha_i = \dfrac{1}{i}$ si i par, y en esta situación se verifica que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} |\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ es divergente.

TEOREMA 12.2.6 **(Perturbación de una sucesión básica)**

Sea X un espacio de Banach, sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de funcionales asociados. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - b_n\| \, \|f_n\| = \rho < 1$. Entonces:

a) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X entonces también lo es $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Si $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ está complementado en X entonces también lo está $[b_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

DEMOSTRACIÓN Por el Teorema de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos extender f_n de $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$ a X con igual norma. Definimos $S : X \to X$ por $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)(a_n - b_n)$. Tenemos que

$$\|S(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)(a_n - b_n)\| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \, \|a_n - b_n\| = \|x\|.$$

Así pues, $\|S\| \leq \rho < 1$ y tenemos que $T = I - S$ es un isomorfismo de X sobre X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$T(a_n) = a_n - S(a_n) = a_n - \sum_{n} f_n(a_n)(a_n - b_n) = a_n - (a_n - b_n) = b_n.$$

De aquí es sencillo deducir que $T([a_n]_{n\in\mathbb{N}}) = [b_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, (a_n) y (b_n) son equivalentes y si (a_n) es una base de X también lo será (b_n).

Finalmente, si $([a_n]_{n\in\mathbb{N}})$ está complementado en X entonces, por ser T un isomorfismo, también $T([a_n]_{n\in\mathbb{N}}) = [b_n]_{n\in\mathbb{N}}$ está complementado en X. ∎

NOTA 12.2.7 1.- Consideremos la base usual $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_1.

Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de l_1 tal que $\|e_n - a_n\| < \rho < 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la aplicación $T : l_1 \to l_1$ definida por $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)a_n$. Es claro que T está bien definida, ya que

$$\sum_{p}^{q} \|x(n)a_n\| \leq \sum_{p}^{q} \|x(n)e_n\| + \sum_{p}^{q} \|x(n)(a_n - e_n)\| \leq (1+\rho)\sum_{p}^{q} |x(n)|,$$

para $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \leq q$.

Si $\|x\| = 1$ tenemos que

$$\|(I-T)(x)\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)(e_n - a_n)\| \leq \rho \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \rho.$$

Por tanto, $\|I - T\| < \rho$ y $I - (I - T) = T$ es un isomorfismo de l_1 sobre l_1. Como $T(e_n) = a_n$, podemos afirmar que (a_n) es una base de l_1 que es equivalente a (e_n).

2.- Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en un espacio de Banach X. Una **sucesión bloque** respecto a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \neq 0$ para cada n y existe una sucesión creciente de naturales, $\{k(n) : n \in \mathbb{N}\}$, de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que y_n es combinación lineal de $\{x_i : k(n-1) < i \leq k(n)\}$.

Es evidente que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple las condiciones del teorema de Nikolskii y podemos afirmar, por tanto, que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es básica. Observemos además lo siguiente: si P_n son las proyecciones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y Q_n son las de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, Q_n coincide con $P_{k(n)}$ en $\mathcal{L}(y_n : n \in \mathbb{N})$ y, por continuidad, deducimos que también lo hace en $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Como $[y_n]_{n\in\mathbb{N}} \subset [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, podemos afirmar que Q_n es la restricción de $P_{k(n)}$ desde $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ a $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

TEOREMA 12.2.8 **[Teorema de Bessaga-Pelczynski (1958)]**

Sea X un espacio de Banach. Sea (b_n) una base de X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de funcionales asociados. Supongamos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es tal que $x_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Se verifica que, para cualquier sucesión de números reales positivos $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(x_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y existe una sucesión bloque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|x_{p(n)} - y_n\| \leq \varepsilon_n$.

DEMOSTRACIÓN Vamos a construir la sucesión creciente $k(n)$ del bloque y los indicadores $p(n)$ de la subsucesión.

Sea $p(1) = 1$. Como $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base tenemos que $x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1)b_i$ y existe $k(1)$ tal que $\|x_1 - \sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_1)b_i\| < \varepsilon_1$.

Sea $y_1 = \sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_1)b_i$. Como

$$f_1(x_n)b_1 \overset{n\to\infty}{\to} 0, \ldots, f_{k(1)}(x_n)b_{k(1)} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

tenemos que $\|\sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_n)b_i\|_{n\to\infty} \to 0$ y existe un $p(2)$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_{p(2)})b_i\| < \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_{p(2)})b_i = x_{p(2)}$ y existirá $k(2) > k(1)$ tal que

$$\|x_{p(2)} - \sum_{i=1}^{k(2)} f_i(x_{p(2)})b_i\| < \frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Sea $y_2 = \sum_{i=k(1)+1}^{k(2)} f_i(x_{p(2)})b_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_{p(2)} - y_2\| &= \|x_{p(2)} - \sum_{i=k(1)+1}^{k(2)} f_i(x_{p(2)})b_i\| \\
&= \|x_{p(2)} - (\sum_{i=1}^{k(2)} f_i(x_{p(2)})b_i - \sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_{p(2)})b_i)\| \\
&\leq \|x_{p(1)} - \sum_{i=1}^{k(2)} f_i(x_{p(2)})b_i\| + \|\sum_{i=1}^{k(1)} f_i(x_{p(2)})b_i\| \leq \varepsilon_2.
\end{aligned}$$

Procediendo inductivamente, la demostración puede concluirse fácilmente. ∎

COROLARIO 12.2.9 *Sea X un espacio de Banach. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los correspondientes funcionales asociados. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que para cada $i \in \mathbb{N}$ es $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = 0$ y existe $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, de modo que $\|x_i\| > \delta$, para $i \in \mathbb{N}$. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que es básica y equivalente a una sucesión bloque de (b_n).*

DEMOSTRACIÓN Denotamos por P_n las proyecciones correspondientes a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sabemos que existe $M > 0$ tal que $\|P_n\| \leq M$ para cada n. Aplicamos el teorema anterior a $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $\varepsilon_n = \frac{\delta}{2^{n+3}M}$ si $n \in \mathbb{N}$, y tenemos que existe una subsucesión $(x_{p(n)})$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y sucesión bloque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que será básica, de modo que $\|x_{p(n)} - y_n\| < \varepsilon_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sean h_n los funcionales asociados a la sucesión básica $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y sean Q_n las correspondientes proyecciones. Sea $(k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión creciente con la que se obtiene la sucesión bloque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que Q_n coincide con $P_{k(n)}$ en $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Si $y \in [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $h_n(y)y_n = Q_n(y) - Q_{n-1}(y) = P_{k(n)}(y) - P_{k(n-1)}(y)$ y será

$$\|h_n(y)y_n\| = |h_n(y)|\|y_n\| \leq (\|p_{k(n)}(y)\| + \|p_{k(n-1)}(y)\|) \leq 2M\|y\|.$$

Por tanto,

$$\delta \leq \|x_{p(n)}\| = \|(x_{p(n)} - y_n) + y_n\| \leq \|x_{p(n)} - y_n\| + \|y_n\| \leq \varepsilon_n + \|y_n\|$$

y se cumple $\|y_n\| \geq \delta - \varepsilon_n \geq \frac{\delta}{2}$. Esto prueba que $|h_n(y)| \leq \frac{1}{\|y_n\|}2M\|y\|$. Por consiguiente, $\|h_n\| \leq \frac{4M}{\delta}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\| \, \|x_{p(n)} - y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Podemos concluir entonces que $(x_{p(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

El siguiente ejemplo está tomado de R.C. James "Bases in Banach Spaces". (Amer. Math. Monthly, 1982).

Ejemplo 12.2.10 ***Base de*** $C([0,1])$.
Recordemos que los ***conjuntos diádicos*** *de orden* n *son*

$$D_n = \{0, \frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^{n-1}}{2^n}\}.$$

El conjunto $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ *es el conjunto de todos los diádicos y es denso en* $[0,1]$. *El conjunto* D *puede ser expresado en forma de sucesión de la siguiente forma*

$$(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \ldots\}.$$

Consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $C([0,1])$ *definida de la siguiente manera:* $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$. *Si* $n > 2$ *definimos* f_n *por* $f_n(t_j) = 0$ *si* $j < n$ *y* $f_n(t_n) = 1$ *y la definición de* f_n *se completa por segmentos. Vamos a probar que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de* $C([0,1])$, *demostrando que cada* $g \in C([0,1])$ *puede expresarse de forma única por* $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$.

Observemos que si esto fuese así sería $g(0) = a_1$ *y* $g - a_1 f_1 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i f_i$, *por lo que* $g(1) - a_1 f_1(1) = a_2 f_2(1)$ *y* $a_2 = g(1) - a_1 f_1(1)$. *Inductivamente quedaría* *probado que los a_i están unívocamente determinados por los valores de g por medio de $a_n = g(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i[f_i(t_n)]$. Observemos además que si $p_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$ entonces p_n y g coinciden en $t_1, \ldots, t_n$.*

Ahora consideremos los $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definidos inductivamente por el procedimiento anterior y demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i = g$. Sea $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de g, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0,1]$ y $|x-y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \delta$; existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces t_n es un número diádico con denominador 2^{p+1} y $p > m$. Sea $t \in [0,1]$. Entonces existe un entero $k \in \{0,1,2,3,\ldots,2^p-1\}$ tal que $t \in \left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+2}{2^p}\right]$. Observemos que, si $n \geq n_0$, $p_n(t)$ es un número comprendido entre $p_n\left(\frac{k}{2^p}\right)$ y $p_n\left(\frac{k+2}{2^p}\right)$. Por tanto, $p_n(t)$ es un número comprendido entre $g\left(\frac{k}{2^p}\right)$ y $g\left(\frac{k+2}{2^p}\right)$. Así pues, queda claro que

$$|g(t) - p_n(t)| \leq |g(t) - g(\frac{k}{2^p})| + |g(\frac{k}{2^p}) - p_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Se ha probado que $\|g - p_n\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y por tanto podemos afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i = g$.

Es fácil ahora probar que $C([0,1],\mathbb{C})$ también tiene una base.

COROLARIO 12.2.11 *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional con base (b_n) y sea E subespacio infinito dimensional. Entonces existe una sucesión en E que es básica y equivalente o una sucesión bloque de (b_n).*

DEMOSTRACIÓN Sea (f_n) la sucesión de los funcionales asociados a (b_n). Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los funcionales $\{f_1, \ldots, f_n\}$ restringidos a E. Como $dim\, E = \infty$, tenemos que existe $x_n \in E$ con $\|x_n\| = 1$ y $x_n \in \bigcap_{i=1}^{n} ker\, f_i$. Es evidente que $\lim_{n\to\infty} f_i(x_n) = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Aplicando el corolario anterior obtenemos la conclusión deseada. ∎

NOTA 12.2.12 **El Espacio de Cantor**

Por medio del espacio de Cantor y algunos artilugios no demasiado complicados es posible probar que ***todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio cerrado de $C([0,1]),\mathbb{K})$***. A partir de este resultado es posible probar que *en todo espacio de Banach existe una sucesión que es básica.* Veamos esta prueba y posteriormente daremos otra demostración con menos requisitos topológicos.

Denotamos $[0,1]$ por I. Sea X un espacio de Banach separable y denotamos por Z al espacio topológico formado por el conjunto B_{X^*}, dotado de la topología

$*$-débil. Tenemos que Z es un espacio compacto y, como X es separable, se tiene que este espacio también será métrico.

Es conocido que todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor K. Por tanto existe una aplicación $h : K \to Z$ continua y sobreyectiva, por lo que $C(Z, \mathbb{K})$ es linealmente isométrico a un subespacio de $C(K, \mathbb{K})$. Es también conocido que $C(K, \mathbb{K})$ es linealmente isométrico a un subespacio de $C(I, \mathbb{K})$.

Consideremos la aplicación $\varphi : X \to C(Z, \mathbb{K})$ definida por $\varphi(x) = \hat{x}$, donde $\hat{x}$ es el correspondiente elemento del bidual X^{**} de X, restringido a $Z = \mathcal{B}_{X^*}$. Es sencillo comprobar que φ es una isometría lineal. Por tanto, deducimos que X es linealmente isométrico a un subespacio M de $C(I, \mathbb{K})$. Así pues, existe una isometría lineal T de M sobre X. Por el corolario anterior, podemos afirmar que en M existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es básica. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n = T(g_n)$. Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica de X.

Si X no es separable entonces bastará considerar cualquier subespacio cerrado de X que sí lo sea para deducir que también en X existe alguna sucesión que es básica.

LEMA 12.2.13 *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y sea F un subespacio finito dimensional de X. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ para cada $y \in F$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$.*

DEMOSTRACIÓN Supondremos que $\varepsilon < 1$. Por la compacidad de S_F, podemos encontrar $\{y_1, \cdots, y_k\}$ en S_F tal que para cada $y \in S_F$ existe algún $i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tenemos que existe $\{g_1, \ldots, g_k\} \subset S_{X^*}$ tal que $g_i(y_i) = 1$ si $i \in \{1, \ldots, k\}$. Sea $x \in \bigcap_1^k \ker g_i$ con $\|x\| = 1$.

Sean $y \in S_F$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Consideremos $i \in \{1, \cdots, k\}$ tal que $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Se tiene que

$$\|y + \alpha x\| \geq \|y_i + \alpha x\| - \|y - y_i\| \geq g_i(y_i + \alpha x) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

Si $y \in F$ tenemos, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, que $\left\|\frac{y}{\|y\|} + \left(\frac{\alpha}{\|y\|}\right) x\right\| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$ y, por tanto, $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$. ∎

COROLARIO 12.2.14 *Cada espacio de Banach X infinito dimensional contiene un subespacio vectorial cerrado infinito dimensional con base.*

DEMOSTRACIÓN Recordemos que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, se define $\prod a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 \cdot \cdots \cdot a_n)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ es $a_n > 0$ tenemos que $\prod(1 + a_n)$ converge si y sólo si $\sum a_n$ converge.

Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tal que $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_n) \leq 1 + \varepsilon$. Sea $x_1 \in S_X$ y $F_1 = \mathcal{L}(x_1)$. Existe algún $x_2 \in S_X$ tal que, para cada $x \in \mathcal{L}(x_1)$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$, se verifica $\|x\| \leq (1 + \varepsilon_1)\|x + \alpha x_2\|$.

Sea $F_2 = \mathcal{L}(x_1, x_2)$. Existe algún $x_3 \in S_X$ tal que si $x \in \mathcal{L}(x_1, x_2)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica $\|x\| \leq (1+\varepsilon_2)\|x + \alpha x_3\|$. De esta forma, inductivamente, es posible obtener la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $m \leq n$. Tenemos que $a_1x_1 + \cdots + a_mx_m \in F_m = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_m)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}\|a_1x_1 + \cdots + a_mx_m\| &\leq (1+\varepsilon_m)\|a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + a_{m+1}x_{m+1}\| \\ &\leq (1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_{m+1})\|a_{x_1} + \cdots + a_mx_m + a_{m+1}x_{m+1} + a_{m+2}x_{m+2}\| \\ &\leq \cdots \leq (1+\varepsilon_m)(1+\varepsilon_{m+1})\cdots(1+\varepsilon_n)\|a_1x_1 + \cdots a_nx_n\| \\ &\leq (1+\varepsilon)\|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\|.\end{aligned}$$

Así pues, la sucesión (x_n) es básica. ■

TEOREMA 12.2.15 **[Principio de selección (Bessaga-Pelczynski)]**

Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X débilmente convergente a cero y tal que para cierto $\delta > 0$ es $\|x_n\| > \delta$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que es básica.

DEMOSTRACIÓN Sea $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(0,1)$ tal que $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 1 - \varepsilon_0$, donde $\varepsilon_0 \in (0,1)$.

Sea $n_1 = 1$ y $Y(1) = \mathcal{L}(x_{n_1})$. Sean $z_{11}\cdots z_{1m(1)} \in S_{Y(1)}$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{m(1)} B(z_{1i}, \varepsilon/4) \supset S_{Y(1)}.$$

Sean $g_{11}\cdots g_{1m(1)} \in S_{X^*}$ tales que $|g_{1i}(z_{1i})| > 1 - \frac{\varepsilon_1}{4}$, para $i \in \{1, \cdots, m(1)\}$.

Como

$$g_{11}(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \cdots, g_{1m(1)}(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

existe un $n_2 > n_1$ tal que

$$\frac{1}{\delta}|g_{11}(x_{n_2})| < \frac{\varepsilon_1}{4}, \cdots, \frac{1}{\delta}|g_{1m(1)}(x_{n_2})| < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Probaremos que para cada $y \in Y(1)$ y cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple $\|y+\alpha x_{n_2}\| \geq (1-\varepsilon_1)$.

En efecto, si $|\alpha| < \frac{2}{\delta}$ e $y \in S_{Y(1)}$, sean $z_{1i}, i \in \{1, \cdots, m(1)\}$, tales que $\|y - z_{1i}\| < \frac{\varepsilon_1}{4}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|y + \alpha x_{n_2}\| &\geq |g_{1i}(y+\alpha x_{n_2})| = |g_{1i}(y + z_{1i} - z_{1i} + \alpha x_{n_2})| \\ &\geq |g_{1i}(z_{1i})| - |g_{1i}(y - z_{1i})| - |g_{1i}(\alpha x_{n_2})| \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon_1}{4} - \|y - z_{1i}\| - \frac{2}{\delta}|g_{1i}(x_{n_2})| \\ &\geq 1 - \frac{\varepsilon_1}{4} - \frac{\varepsilon_1}{4} - 2\frac{\varepsilon_1}{4} = 1 - \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Si $|\alpha| \geq \frac{2}{\delta}$ se verifica $\|y + \alpha x_{n_2}\| \geq |\alpha|\|x_{n_2}\| - \|y\| \geq 2 - 1 \geq 1 - \varepsilon_1$.

Sea ahora $y \in Y(1), y \neq 0$. Tomando $\frac{y}{\|y\|}$ tenemos que si $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple

$$\|\frac{y}{\|y\|} + \frac{\alpha}{\|y\|} x_{n_2}\| \geq 1 - \varepsilon_1;$$

por tanto, $\|y + \alpha x_{n_2}\| \geq (1 - \varepsilon_1)\|y\|$.

Sea $Y(2) = \mathcal{L}(x_{n_1}, x_{n_2})$ y sean $g_{21} \cdots g_{2m(2)} \in S_{Y(2)}$ tales que $\bigcup_{i=1}^{m(2)} B(z_{2i}, \frac{\varepsilon}{4}) \subset S_{Y(2)}$. Sean $g_{21}, \cdots, g_{2m(2)} \in S_{X^*}$ tales que $g_{2i}(z_{2i}) > 1 - \frac{\varepsilon_2}{4}$, para $i \in \{1, \cdots, m(2)\}$. Como w-$\lim x_n = 0$, existe algún $n_3 > n_2$ tal que

$$\frac{1}{\delta}|g_{21}(x_{n_3})| < \frac{\varepsilon_2}{4}, \cdots, \frac{1}{\delta}|g_{2m(2)}(x_{n_3})| < \frac{\varepsilon_2}{4}.$$

Para cada $y \in S_{Y(2)}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ veamos, como antes, que $\|y + \alpha x_{n_3}\| \geq 1 - \varepsilon_2$. En efecto, si $|\alpha| < \frac{2}{\delta}$, sea z_{2i}, $i \in \{1, \ldots, m(2)\}$ tal que $\|y - z_{2i}\| < \frac{\varepsilon_2}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|y + \alpha x_{n_3}\| &\geq |g_{2i}(y + z_{2i} - z_{2i} + \alpha x_{n_3})| \geq |g_{2i}(z_{2i})| - |g_{2i}(y - z_{2i})| - |\alpha|\,|g_{2i}(x_{n_3})| \\ &\geq 1 - \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Si $|\alpha| \leq \frac{2}{\delta}$ será

$$\|y + \alpha x_{n_2}\| \geq |\alpha|\|x_{n_2}\| - \|y\| \geq 2 - 1 \geq 1 - \varepsilon_2.$$

Sea ahora $y \in Y(2)$, $y \neq 0$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene $\|\frac{y}{\|y\|} + \frac{\alpha}{\|y\|} x_{n_3}\| \geq 1 - \varepsilon_2$. Por tanto, $\|y + \alpha x_{n_3}\| \geq (1 - \varepsilon_2)\|y\|$.

Procediendo inductivamente, obtenemos una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, si denotamos $Y(k) = \mathcal{L}(x_{n_1} \ldots x_{n_k})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, para $y \in Y(k)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica $\|y + \alpha x_{n_k}\| \geq (1 - \varepsilon_k)\|y\|$.

Veamos que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y sea $p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|a_1 x_{n_1} + \cdots + a_p x_{n_p}\| &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon_{p+1}} \|a_1 x_{n_1} + \cdots + a_p x_{np} + a_{p+1} x_{np+1}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon_{p+1}} \cdots \frac{1}{1 - \varepsilon_q} \|a_1 x_{n_1} + \cdots + a_q x_{nq}\| \\ &\leq \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \varepsilon_n)} \|a_1 x_{n_1} + \cdots + a_q x_{n_q}\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \varepsilon_0} \|a_1 x_{n_1} + \cdots + a_q x_{n_q}\|. \end{aligned}$$

NOTA 12.2.16 Sabemos que si X es separable entonces X es linealmente isométrico a un subespacio cerrado M de $C([0,1],\mathbb{K})$. Veremos que, por medio de este resultado, podemos conseguir unas demostraciones más sencillas de los resultados anteriores.

Consideremos la isometría $T : X \to M$. Como $C([0,1],\mathbb{K})$ tiene base en M, existirá una sucesión básica $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Sea $N = [z_i]_{i\in\mathbb{N}} \subset M \subset C([0,1],\mathbb{K})$; tenemos entonces que $T^{-1}(N)$ es un subespacio cerrado E de X que tiene base. Si X es infinito dimensional basta tomar $Y = [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ (siendo $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un sistema libre en X) que será separable y por tanto existe un subespacio vectorial cerrado E de Y con base. Así pues, X tiene un subespacio cerrado con base.

Sea ahora X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión débilmente convergente a cero, donde $\|x_n\| > \delta > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la correspondiente isometría lineal $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \to C([0,1],\mathbb{K})$. Es claro que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es débil convergente a cero y que $\|Tx_n\| > \delta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, como $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en un espacio con base, deducimos de un resultado anterior que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión básica. Dicha subsucesión se transforma por T^{-1} en una sucesión básica en X.

TEOREMA 12.2.17 *Supongamos que X es el espacio c_0 o algún l_p, con $p \geq 1$ y $p \neq \infty$. Sea $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición de $\mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x \in X : x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} : x(i) = 0$ si $i \notin \sigma_n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n \in E_n$ con $y_n \neq 0$. Entonces, $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es isométrico a X y está complementado en X (con proyección de norma 1).*

DEMOSTRACIÓN Empezamos suponiendo que $X = l_1$. Se puede suponer que $\|y_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es claro que dados los escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, tenemos que

$$\|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n\| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Definimos la aplicación $T : l_1 \to l_1$ por $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) y_n$ y tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

Así pues, T está bien definida y $\|T(x)\| = \|x\|$, por lo que T es una isometría e Im T es un subespacio cerrado de l_1. Por tanto, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Im} T \subset [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y será Im $T = [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Veamos que $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ está complementado en l_1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : E \to \mathbb{K}$ una aplicación tal que $\|h_n\| = 1$ y $h_n(y_n) = 1$. ($\|y_n\| = 1$). Sea $x = (x(n)) \in l_1$ y consideremos en l_1 la sucesión definida por

$$x_n(i) = \begin{cases} x(i), & \text{si } i \in \sigma(n), \\ 0, & \text{si } i \notin \sigma(n). \end{cases}$$

Es claro que $x_n \in E_n$ para cada n y que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Sea $p : l_1 \to [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ la aplicación definida por $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x_n)y_n$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n(x_n)y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Deducimos entonces que p está bien definida y que $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene $h(y_n) = y_n$, Im $p = [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y, de la continuidad de p, se deduce que la restricción de p a $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es la identidad.

Finalmente, es claro que $\|p\| \leq 1$ pero también que $\|p\| \geq \|p(y_n)\| = \|y_n\| = 1$. Así pues, $\|p\| = 1$.

Es sencillo comprobar que los razonamientos realizados valen también para el caso en que X es del tipo l_p, $1 < p < +\infty$.

Consideremos el caso en que $X = c_0$. Tenemos que si $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son escalares se verifica

$$\|\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n\| = \max_{i\leq i\leq n} |\alpha_i|.$$

La aplicación T es la misma que antes y tiene las mismas propiedades. Finalmente, p se define por medio de h_n y asociando a cada $x \in c_0$, igual que antes, la sucesión (x_n). Observemos que $\|x\| = \sup \|x_n\|$ y que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$. La serie con la que se define p es convergente ya que

$$\|\sum_{n=p}^{q} h_n(x_n)y_n\| = \sup\{|h_n(x_n)| : p \leq n \leq q\} \leq \sup\{\|y_n\| : p \leq n \leq q\}.$$

El resto se demuestra de forma similar. ∎

TEOREMA 12.2.18 **[Teorema de Pelczynski (1960)]**
Supongamos que X es el espacio c_0 o algún l_p, $p \in [1, +\infty)$. Entonces:

1) Cada subespacio infinito dimensional complementado de X es isomórfico a X.

2) Cada subespacio cerrado infinito dimensional de X contiene un subespacio complementado infinito dimensional (y por tanto isomórfico a X).

DEMOSTRACIÓN Sea E un subespacio cerrado de X que sea infinito dimensional. Sabemos que existe en E una sucesión básica $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ equivalente a una sucesión bloque $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión canónica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que si $F = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ entonces F es isomórfico a $[y_n]_{n\in\mathbb{N}}$, que según el teorema anterior está complementado en X y es isométrico a X. Así pues, $F \subset E$, F es isomórfico a X y F está complementado en X.

Si ahora fuese E un subespacio complementado en X tenemos que (en su momento se demostró), entonces $F \subset E$ también está complementado en E y tendremos $E = F + G, E \approx F \times G \approx X \times G$, por lo que X será un factor de F. En el caso en que X sea c_0 ó $l_p (p \geq 1)$ esto significa que X y E son isomórficos. ∎

COROLARIO 12.2.19 *Un subespacio infinito dimensional de c_0 está complementado si y sólo si es isomórfico a c_0.*

DEMOSTRACIÓN En su momento se probó que si X es separable y $E \subset X$ es subespacio vectorial isomórfico a c_0 entonces E está complementado en X. ∎

COROLARIO 12.2.20 *Cada subespacio cerrado infinito dimensional de c_0 ó de l_p, $p \in [1, \infty)$, es estable.*

DEMOSTRACIÓN

Denotamos al espacio por X y sea E un subespacio vectorial cerrado de X que sea infinito dimensional. Entonces existe $F \subset E$ isomórfico a X y complementado en X; también F está complementado en E, por lo que, si G es el correspondiente complemento, tenemos que $E = F + G, E \approx F \times G \approx X \times G, E \times \mathbb{K} \approx \mathbb{K} \times X \times G \approx X \times G \approx F \times G \approx E$. ∎

NOTA 12.2.21 No se ha podido probar que si E es un subespacio vectorial cerrado de $l_p (p \in [1, \infty))$ isomórfico a l_p entonces E está complementado en l_p. No obstante, el resultado es cierto para una isometría, lo probaremos para el caso de l_1 (aunque Pelczynski lo ha probado para $p > 1$).

TEOREMA 12.2.22 *Sea E un subespacio de l_1 que es isométrico a l_1. Entonces E está complementado en l_1.*

DEMOSTRACIÓN Sea $T : l_1 \to E$ una isometría biyectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\sigma_n = \{i \in \mathbb{N} : T(e_n)(i) \neq 0\}$. Probaremos que si $n \neq m$ se verifica $\sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset$. En efecto, si $k \in \sigma_n \cap \sigma_m$ tenemos que $T(e_n)(k) \neq 0$, $T(e_m)(k) \neq 0$. Sean $\alpha = \dfrac{|T(e_n)(k)|}{T(e_m)(k)}$, $\beta = \dfrac{|T(e_n)(k)|}{T(e_n)(k)}$. Claramente $|\alpha| = |\beta| = 1$ y es sencillo comprobar que $|T(\alpha e_m - \beta e_n)(k)| < |T(e_m)(k)| + |T(e_n)(k)|$, por lo que

$$
\begin{aligned}
\|T(\alpha e_m - \beta e_n)\| &= \sum_{i=1}^{\infty} |T(\alpha e_m - \beta e_n)(i)| \\
&< \sum_{i=1}^{\infty} |T(\alpha e_m)(i)| + \sum_{i=1}^{\infty} |T(\beta e_n)(i)| \\
&= \|Te_m\| + \|Te_n\| = 2.
\end{aligned}
$$

Como $\|\alpha e_m - \beta e_n\| = |\alpha| + |\beta| = 2$, esto contradice que T sea una isometría.

Podemos suponer que para E no existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $x(j) = 0$ para cada $x \in E$. En efecto, si este fuese el caso podemos considerar la aplicación $T : E \to E'$ obtenida suprimiendo en cada $x \in E$ la coordenada j. Claramente

T es una isometría. Reiterando este proceso se obtendría finalmente un espacio F isométrico a E tal que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x \in F$ con $x(j) \neq 0$. En esta situación podemos probar que σ_n es una partición de $\mathbb{N}$, ya que si $j \notin \cup\sigma_n$ será $Te_n(j) = 0$, para cada n; entonces, si $y \in E$, existe $x \in l_1$, $x = \sum x(i)e_i$, con $Tx = y$. Como $y = Tx = \sum x(i)Te_i$, deducimos que $y(j) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x \in l_1 : x(i) = 0 \text{ si } i \neq \sigma_n\}$. Se tiene que $Te_n \in E_n$ y, en esta situación, probamos que $[Te_n]_{n\in\mathbb{N}}$ está complementado en l_1 pero $[Te_n]_{n\in\mathbb{N}} = E$. ∎

DEFINICIÓN 12.2.23 **(La propiedad de aproximación)**

Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de aproximación si para cada subconjunto compacto K de X y cada $\varepsilon > 0$ existe $T : X \to X$ lineal y continua tal que $\|Tx - x\| < \varepsilon$ si $x \in K$.

Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Probaremos que X tiene la propiedad de aproximación. En efecto, sea K un subconjunto compacto de X y sea P_n la n-ésima proyección de la base. Sea $W_n = \{x \in X : \|x - P_n x\| < \varepsilon\}$; es claro que W_n es abierto y que $W_n \subset W_{n+1}$. Como $K \subset \bigcup_n W_n$, existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset W_N$ y entonces $\|P_N x - x\| < \varepsilon$ si $x \in K$.

El matemático sueco Per Enflo en "*A counter example to the approximation property*" (Acta Math 130 (1973), 309-317) da un ejemplo de espacio de Banach separable que no tiene la propiedad de aproximación. Este fue el primer espacio separable conocido que no tenía base. En 1978 A. Szankowski probó que para cada $l_p (p \neq 2, p \neq \infty)$ existe un subespacio sin base.

12.3 Convergencia incondicional de series

1) Sea X un espacio normado. Denotamos por Φ a la familia de los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X. Si $F \in \Phi$ se denotará

$$S(F) = \sum_{i\in F} x_i.$$

Se dirá que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es **incondicionalmente convergente** hacia x (*ico*) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $F_0 \in \Phi$ tal que $\|x - S(F)\| < \varepsilon$ si $F \in \Phi$ y $F_0 \subset F$.

Una serie incondicionalmente convergente también es denominada sumable. Es evidente comprobar que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* hacia x si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\|\sum_{i\in F} x_i - x\| < \varepsilon$ si $F \in \Phi$ y $\{1, \ldots, n_0\} \subset F$.

Probaremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *es incondicionalmente convergente hacia x si y sólo si para cada biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\varphi(j)}$ es convergente a x.* En efecto, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* a x, sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $F_0 = \{1, \ldots, n_0\}$ tal que si $F \in \Phi$ y $F_0 \subset F$ se cumple $\|\sum_{i \in F} x_i - x\| < \varepsilon$. También existen $m_1 \cdots m_{n_0}$ tales que $\varphi(m_1) = 1 \cdots \varphi(m_{n_0}) = n_0$. Por tanto, si $m_0 = \text{máx}\{m_1, \ldots m_{n_0}\}$, tenemos que si $m \geq m_0$ se verifica $\{1, \ldots, n_0\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(m)\}$, por lo que $\|\sum_{j=1}^{m} x_{\varphi(j)} - x\| < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es incondicionalmente convergente hacia x. Existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $F_0 \in \Phi$ existe algún $F \in \Phi$ con $F_0 \subset F$ y $\|\sum_{i \in F} x_i - x\| > \varepsilon$.

Sea $F_1 = \{1\}$ existe $K_1 \in \Phi$ tal que $F_1 \subset K_1$ y $\|\sum_{i \in K_1} x_i - x\| > \varepsilon$. Análogamente, sea $F_2 = K_1 \cup \{2\}$ y sea $K_2 \in \Phi$ tal que $F_2 \subset K_2$ y $\|\sum_{i \in K_2} x_i - x\| > \varepsilon$. Inductivamente, es posible determinar $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$, subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\{1, \cdots, n\} \subset K_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea l_n el cardinal de K_n. Tenemos que $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_n \leq \cdots$. Sea $\varphi_1 : \{1, \ldots, l_1\} \to K_1$ una biyección; sea $\varphi_2 : \{1, \cdots, l_1, l_1 + 1, \ldots, l_2\} \to K_2$ una biyección de modo que $\varphi_2 = \varphi_1$ en $\{1, \ldots, l_1\}$. Procediendo inductivamente obtenemos finalmente una biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que $\varphi = \varphi_n$ en $\{1, \cdots, l_n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|\sum_{j=1}^{l_n} x_{\varphi(j)} - x\| = \|\sum_{i \in K_n} x_i - x\| > \varepsilon,$$

por lo que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\varphi(j)}$ no converge a x.

Es claro que si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* hacia x entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente hacia x, pero el recíproco es falso. Recordemos que en $\mathbb{R}$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ es convergente y que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente pero no es incondicionalmente convergente.

2) Se dice que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es **incondicionalmente de Cauchy** (iCa) si para cada $\varepsilon > 0$ existe $F_0 \in \Phi$ tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$ si $F \in \Phi$ y $F \cap F_0 = \emptyset$. Es sencillo comprobar que esta condición equivale a que para cada $\varepsilon > 0$ exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$ si $F \in \Phi$ e inf $F > n_0$.

Se dice que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ verifica la condición de Cauchy si la correspondiente sucesión de sumas parciales es de Cauchy.

Demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy si y sólo si para cada biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\varphi(i)}$ verifica la condición de Cauchy. En efecto, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy y sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Sea $\varepsilon > 0$; entonces existe n_0 tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \varepsilon$ si $F \in \Phi$ con $\inf F > n_0$. También existe algún $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, \ldots, n_0\} \subset \{\varphi(1), \ldots, \varphi(m_0)\}$. Por tanto, si $p > q > m_0$, tenemos que *inf* $\{\varphi(q), \varphi(q+1), \ldots, \varphi(p)\} > n_0$ y será $\|\sum_{i=q}^{p} x_{\varphi(i)}\| < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es incondicionalmente de Cauchy. Tenemos entonces que existe $\varepsilon > 0$ de modo que para cada $F_0 \in \Phi$ existe $F \in \Phi$ con $F \cap F_0 = \emptyset$ y $\|\sum_{i\in F} x_i\| > \varepsilon$. Puede obtenerse, inductivamente, una sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos finitos no vacíos y mutuamente disjuntos de modo que $\{1, \cdots, n\} \cap K_n = \emptyset$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $r_n = card\,(K_n)$ y $l_n = card\,(\{1, \cdots, n\} \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n)$. Tenemos que $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_n \leq \ldots$.

Sea $\varphi_1 : A_1 = \{1, \ldots, l_1\} \to \{1\} \cup K_1$ una biyección de modo que los últimos r_1 elementos de A_1 se correspondan, en su orden, con los elementos de K_1. Sea $\varphi_2 : A_2 = \{1, \ldots, l_1, l_1+1, \cdots, l_2\} \to \{1,2\} \cup K_1 \cup K_2$ una biyección tal que $\varphi_2 = \varphi_1$ en A_1 y los últimos r_2 elementos de A_2 se correspondan, en su orden, con los de K_2. Razonando de esta forma se puede obtener finalmente una biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi = \varphi_n$ en A_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que, si $\{\varphi(p), \cdots, \varphi(q)\}$ son las imágenes de los últimos r_{n+1} elementos de A_{n+1}, se verifica que $\varphi(n) < \varphi(p) < \varphi(q)$ y $\|\sum_{j=p}^{q} x_{\varphi(j)}\| = \|\sum_{i\in K_{n+1}} x_i\| > \varepsilon$. Por consiguiente, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\varphi(i)}$ no verifica la condición de Cauchy.

3) Supongamos que X es un espacio vectorial topológico y sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X. Diremos que la serie converge hacia $x \in X$ si la sucesión de sumas parciales, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $S_n = x_1 + \cdots + x_n$, es convergente en X hacia x. Se dice que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente convergente hacia x si para cada V entorno de 0 en X existe $F_0 \in \Phi$ tal que $\sum_{i\in F} x_i - x \in V$ si $F \in \Phi$ con $F \supset F_0$. De manera similar a como se hizo en espacios normados, se puede probar que esto sucede si y sólo si para cada biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\varphi(i)}$ es convergente hacia x.

Diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ verifica la condición de Cauchy si la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sumas parciales es de Cauchy. Se dice que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy si, para cada V entorno de 0, existe $F_0 \in \Phi$ tal que $\sum_{i\in F} x_i \in V$ si $F \in \Phi$ y $F \cap F_0 = \emptyset$. De forma análoga a como se hizo en espacios normados, se puede demostrar que $\sum x_i$ es incondicionalmente de Cauchy si y sólo si para cada biyección $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\varphi(i)}$ verifica la condición de Cauchy.

Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente hacia x y es incondicionalmente de Cauchy, demostraremos que entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* hacia x. En efecto, sea V un entorno de 0 y sea W un entorno equilibrado de cero tal que $W + W \subset V$. Existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i\in F} x_i \in W$ si $F \in \Phi$ con $\inf F > n_0$. Por otra parte, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, tal que $\sum_{i=1}^{n} x_i - x \in W$ si $n \geq n_1$. Entonces si $F \in \Phi$ y $\{1, \cdots, n_1\} \subset F$ tenemos que

$$x - \sum_{i\in F} x_i = \left(x - \sum_{i=1}^{n_1} x_i\right) + \left(\sum_{i\in F, i\geq n_1+1} x_i\right) \in W + W \subset V.$$

Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* es evidente que será incondicionalmente de Cauchy. Si X es secuencialmente completo y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy entonces

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico*. En efecto, la propia serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ sería convergente hacia cierto $x \in X$; por tanto, como es incondicionalmente de Cauchy, será *ico* hacia x.

Si Y es otro espacio vectorial topológico y $T : X \to Y$ es lineal y continua es sencillo comprobar que si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una serie en X incondicionalmente de Cauchy entonces $\sum_{i=1}^{\infty} Tx_i$ es una serie incondicionalmente de Cauchy en Y. Además si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* hacia x entonces $\sum_{i=1}^{\infty} Tx_i$ es incondicionalmente de Cauchy hacia Tx.

4) Sean X un espacio normado y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X; demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy para la topología débil (débil incondicionalmente de Cauchy, $w - iCa$) si y sólo si para cada $f \in X^*$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$ es una serie convergente. En efecto, supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es $w - iCa$ y que $f \in X^*$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $B(f, \varepsilon)$; entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $F \in \Phi$ y $n_0 < inf\, F$ se cumple $\sum_{i \in F} x_i \in B(f, \varepsilon)$, por lo que sería

$$\left| f\left(\sum_{i \in F} x_i\right) \right| = \left| \sum_{i \in F} f(x_i) \right| < \varepsilon.$$

De aquí deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ es una serie de escalares incondicionalmente de Cauchy y por tanto será *ico*, con lo que podemos afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$ es convergente.

Recíprocamente supongamos que para cada $f \in X^*$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$. Sea $B = B(f_1, \cdots, f_m; \varepsilon)$ un entorno débil de cero, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} f_1(x_i)$, $\cdots, \sum_{i=1}^{\infty} f_m(x_i)$ son series incondicionalmente de Cauchy; así pues, podemos determinar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $F \in \Phi$ y $n_0 < inf\, F$ es $\left| \sum_{i \in F} f_j(x_i) \right| = \left| f_j\left(\sum_{i \in F} x_i\right) \right| < \varepsilon$ para $j \in \{1, \cdots m\}$. Por tanto será $\sum_{i \in F} x_i \in B$.

Si ahora $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ es una serie en X^* es sencillo comprobar que es incondicionalmente de Cauchy en la topología $*$-w si y sólo si para cada $x \in X$ se cumple $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)| < \infty$.

5) Sean X un espacio vectorial topológico y $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X. Diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es S-convergente (resp. S-Cauchy) si cada subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ es convergente (resp. de Cauchy).

Diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es BM-convergente (resp. BM-Cauchy) si para cada sucesión real y acotada $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es convergente (resp. de Cauchy). Tenemos que S-convergente implica S-Cauchy y BM-convergente implica BM-Cauchy; los resultados recíprocos son ciertos en el caso de completitud secuencial. Utilizando sucesiones de ceros y unos es fácil observar que cada serie BM-convergente es S-convergente y cada serie BM-Cauchy es S-Cauchy. Es claro que si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es BM-convergente (resp. BM-Cauchy) en un espacio normado X que sea complejo entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es convergente (resp. $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es de Cauchy) para cada sucesión $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ acotada de complejos. El siguiente lema nos permitirá profundizar en la relación entre estos conceptos en el caso de espacios normados.

Lema 12.3.1 *Sea X un espacio normado y sea $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto finito de elementos de X. Definimos los números:*

$$P(S) = \sup\{\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\| : \{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \subset \{-1, 1\}\},$$
$$Q(S) = \sup\{\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| : \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset [-1, 1]\}.$$
$$R(S) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

Entonces $P(S) = Q(S) = R(S)$.

Demostración Es evidente que $P(S) \leq Q(S)$ y concluiremos la demostración probando que $Q(S) \leq R(S)$ y $R(S) \leq P(S)$.

Si $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset [-1, 1]$ tenemos que existe una aplicación $f: X \to \mathbb{R}$ lineal y continua con $\|f\| = 1$ y $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|$. Como

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|,$$

resulta que $Q(S) \leq R(S)$.

Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua con $\|f\| \leq 1$ entonces, para $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $\varepsilon_i = +1$ si $f(x_i) \geq 0$ y $\varepsilon_i = -1$ si $f(x_i) < 0$. Se verifica

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right) \leq \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|,$$

por lo que $R(S) \leq P(S)$. ∎

Nota 12.3.2 Supongamos que X es un espacio normado complejo y que $S = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Si definimos, como antes, los números $P(S), Q(S)$ y $R(S)$ tenemos que $P(S) = Q(S) = R(S)$. Consideremos ahora los siguientes números:

$$P'(S) = sup\{\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| : \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \subset S_{\mathbb{C}}\},$$

$$Q'(S) = sup\{\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| : \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset B_{\mathbb{C}}\},$$

$$R(S') = sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| : f \in X^*, \|f\| \leq 1\}.$$

Es claro que $P(S) \leq P'(S), Q(S) \leq Q'(S)$ y veremos que todos estos números son iguales.

Es claro que $P'(S) \leq Q'(S)$. Demostraremos, como antes, que $Q'(S) \leq R'(S)$. Sea $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset B_{\mathbb{C}}$; tenemos que existe una aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ lineal y continua con $\|f\| = 1$ y $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \|$. Como $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = |f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$, se sigue que $Q'(S) \leq R'(S)$.

Demostraremos ahora que $R'(S) \leq P'(S)$. Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una aplicación lineal y continua con $\|f\| \leq 1$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ sea $\varepsilon_i \in S_{\mathbb{C}}$ tal que $|f(x_i)| = \varepsilon_i f(x_i)$; entonces $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = f(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) \leq \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \|$, lo que prueba la desigualdad.

Finalmente para probar la igualdad de todos los números bastará con probar que $Q'(S) \leq R(S)$. Esto es evidente ya que si $\{\alpha_i, \ldots, \alpha_n\} \subset B_{\mathbb{C}}$ entonces existe una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \|$, entonces $\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$.

En lo que sigue denotamos $BMco = BM$-convergente ($BMCa = BM$-Cauchy), $Sco = S$-convergente, ($SCa = S$-Cauchy). Observaremos que nos estamos permitiendo la licencia de utilizar una notación que se corresponde a las denominaciones en Inglés.

TEOREMA 12.3.3 *Sea X un espacio normado y sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X, entonces para $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ las condiciones iCa, SCa, $BMCa$ son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que $BMCa$ implica SCa. Aquí probaremos que: a) SCa implica iCa. b) iCa implica $BMCa$.

a) Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es iCa. Entonces existe $\varepsilon > 0$ y existe una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos finitos y disjuntos de $\mathbb{N}$ tales que $\inf F_{n+1} > \sup F_n$ y $\|\sum_{i\in F_n} x_i\| > \varepsilon$. Si ahora consideramos la subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$, donde $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de $\mathbb{N}$ obtenida al situar los elementos de $F_1, F_2, \cdots$ en orden creciente, es claro que esta subserie no es de Cauchy.

b) Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es iCa y sea $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset [-1,1]$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe n_0 tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $F \in \Phi$ y $n_0 < \inf F$. Supongamos que $q > p > n_0$; por el lema anterior, existe $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\} \subset \{-1,+1\}$ tal que $\|\sum_{i=p}^{q} \alpha_i x_i\| \leq \|\sum_{i=p}^{q} \varepsilon_i x_i\|$. Si $F_1 = \{i \in \{p,\ldots,q\} : \varepsilon_i = +1\}$ y $F_2 = \{i \in \{p,\ldots,q\} : \varepsilon_i = -1\}$ entonces

$$\|\sum_{i=p}^{q} \varepsilon_i x_i\| = \|\sum_{i\in F_1} x_i - \sum_{i\in F_2} x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

NOTA 12.3.4 1) Si X es un espacio de Banach los modelos de convergencia *ico*, *Sco*, *BMco* son equivalentes. Si X es normado no completo podemos afirmar que si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *Sco* entonces es *ico*. En efecto, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es iCa y convergente; por tanto será *ico*.

Recordemos que un espacio normado X es de Banach si y sólo si para cada serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ con $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$ se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente. Observemos que si $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty$ entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es iCa. Por consiguiente, si X es de Banach será $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *ico*. Si X es finito dimensional es conocido que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico* si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ es convergente. No obstante, el teorema de Dvoretzky-Rogers (que en su momento se estudiará) afirma que en cada espacio de Banach infinito dimensional existe alguna serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ que es *ico* pero es tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ es divergente.

Consideremos en c_0 la serie $\sum \frac{1}{n} e_n$ es claro que esta serie es incondicionalmente convergente a $x = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ pero tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\frac{1}{n} e_n\| = \sum \frac{1}{n}$ que es divergente.

2) Veamos un ejemplo de serie en un espacio normado que es *ico* pero no es Sco. Consideremos el espacio c_{00} y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = \frac{1}{n} e_n - \frac{1}{n+1} e_{n+1}$. Tenemos que $x_1 + \cdots + x_n = e_1 - \frac{1}{n+1} e_{n+1}$ y por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = e_1$. Es fácil comprobar que la convergencia es incondicional. Observemos, no obstante, que la subserie $\sum_{i=1}^{\infty} x_{2i}$ no es convergente ya que

$$x_2 + \cdots + x_{2n} = \frac{1}{2} e_2 - \frac{1}{3} e_3 + \frac{1}{4} e_4 - \frac{1}{5} e_5 + \cdots + \frac{1}{2n} e_{2n} - \frac{1}{2n+1} e_{2n+1}.$$

3) Veamos un ejemplo de serie que es S-convergente pero que no es BM-convergente. Sea X el espacio vectorial de las sucesiones reales de recorrido finito y consideremos en X la norma $\|x\| = \sup\{\frac{1}{n}|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos la serie $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ y sea $\sum_{j=1}^{\infty} e_{n_j}$ una subserie. Consideremos x tal que, para $j \in \mathbb{N}$, $x(n_j) = 1$ y $x(n) = 0$ si $n \neq n_j$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|x - \sum_{j=1}^{m} e_{n_j}\| = \dfrac{1}{n_{m+1}}$ y, por tanto, $\sum_{j=1}^{\infty} e_{n_j} = x$.

Veremos que $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ no es BM-convergente. Supongamos que para $\left(\frac{1}{i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} e_i$ converge a cierto x. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\|x - (e_1 + \cdots + \frac{1}{n} e_n)\| = \sup\{|x(1) - 1|, \frac{1}{2}|x(2) - \frac{1}{2}|, \ldots, \frac{1}{n}|x(n) - \frac{1}{n}|\}.$$

Deducimos que $|x(1) - 1| \leq \|x - (e_1 + \cdots + \frac{1}{n} e_n)\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $x(1) = 1$. También se tiene $\frac{1}{2}|x(2) - \frac{1}{2}| \leq \|x - (e_1 + \cdots + \frac{1}{n} e_n)\|$ para cada $n \geq 2$. Por consiguiente, $x(2) = \frac{1}{2}$. Reiterando el procedimiento, deducimos que $x(n) = \frac{1}{n}$, por lo que x no puede ser un elemento de X.

Teorema 12.3.5 *Sea X un espacio normado y sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy si y sólo si $\{\sum_{i\in F} x_i : F \in \Phi\}$ es* *precompacto.*

DEMOSTRACIÓN Para cada $F \in \Phi$, denotamos $S(F) = \sum_{i \in F} x_i$. Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $F_0 \in \Phi$ tal que si $F \in \Phi$ y $F \cap F_0 = \emptyset$ se verifica $\|\sum_{i \in F} x_i\| < \varepsilon$. Si $F \in \Phi$ tenemos que $\|S(F) - S(F \cap F_0)\| < \varepsilon$ y, por tanto, $S(F) \in B(S(F \cap F_0); \varepsilon)$. Esto prueba que $\{S(F) : F \in \Phi\} \subset \bigcup_{A \subset F_0} B(S(A); \varepsilon)$, donde por $S(\emptyset)$ entendemos el cero.

Recíprocamente supongamos que $\{S(F) : F \in \Phi\}$ es precompacto pero que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es incondicionalmente de Cauchy. Como los conjuntos precompactos son acotados, existe $M > 0$ tal que $\|S(F)\| < M$ para cada $F \in \Phi$. Por otra parte, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos y no vacíos de $\mathbb{N}$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $\inf F_{n+1} > \sup F_n$ y $\|S(F_n)\| > \varepsilon$. Existe $\{y_1, \ldots, y_m\}$ tal que $\{S(F) : F \in \Phi\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \frac{\varepsilon}{4})$ y tiene que existir $h \in \{1, \ldots, m\}$ tal que, para cierta subsucesión $(F_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se verifique $S(F_{n_j}) \in B(y_h, \frac{\varepsilon}{4})$. Escogemos entonces $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k}M < \frac{\varepsilon}{2}$; tenemos que

$$\|S(F_{n_1})\| \leq \|S(F_{n_1}) - \frac{1}{k}(S(F_{n_1}) + \cdots + S(F_{n_k}))\| + \|\frac{1}{k}(S(F_{n_1}) + \cdots + S(F_{n_k}))\|$$

y que

$$\begin{aligned}
&\|S(F_{n_1}) - \tfrac{1}{k}(S(F_{n_1}) + \cdots + S(F_{n_k}))\| \\
&\qquad \leq \tfrac{1}{k}\|S(F_{n_1}) - S(F_{n_1})\| + \cdots + \tfrac{1}{k}\|S(F_{n_1}) - S(F_{n_k})\| \\
&\qquad \leq \tfrac{\varepsilon}{2}(\tfrac{1}{k} + \cdots + \tfrac{1}{k}) = \tfrac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, $\|S(F_{n_1}) + \cdots + S(F_{n_k})\| = \|S(F)\|$, donde $F = F_{n_1} \cup \cdots \cup F_{n_k}$. Por consiguiente, $\|\frac{1}{k}(S(F_{n_1}) + \cdots + S(F_{n_k}))\| \leq \frac{1}{k}M < \frac{\varepsilon}{2}$ y deducimos que $\|S(F_{n_1})\| < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. ∎

NOTA 12.3.6 1) Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una serie Sco, tiene sentido considerar $M = \{S(A) : A \in P(\mathbb{N})\}$, donde $S(A) = \sum_{i \in A} x_i$ y por $S(\emptyset)$ denotamos el cero. Probaremos que M es compacto en X. En efecto, consideremos el espacio de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y la aplicación $S : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to X$ definida por

$$S((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i.$$

Observemos que si $A = \{i \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = +1\}$ es $S((\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}) = S(A)$; además $S(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) = M$, por lo que bastará probar que S es continua. Sea $\varepsilon > 0$, como

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| S(F)\| \leq \varepsilon$ si $F \in \Phi$ y $n_0 < \inf F$. Si $B \in P(\mathbb{N})$ y $\inf B > n_0$ se verifica que $\|S(B)\| \leq \varepsilon$. Sea $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$; tenemos que $H = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_{n_0}\} \times \{0,1\} \times \cdots$ es un entorno de a y si $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in H$ será $\|S(a) - S(b)\| = \|S(B)\|$, donde $\inf B > n_0$ si $B \neq \emptyset$. Por tanto, $\|S(a) - S(b)\| < \varepsilon$. Finalmente observemos que $M = cl(\{S(F) : F \in \Phi\})$.

Hemos obtenido una condición necesaria para la S-convergencia. Veamos ahora una condición suficiente, supongamos que $Q = cl(\{S(F) : F \in \Phi\})$ es compacto. En esta situación tenemos que $\{S(F) : F \in \Phi\}$ es precompacto y la serie será incondicionalmente de Cauchy, por lo que será S-Cauchy. Por consiguiente, dada una subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tenemos que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ es de Cauchy y sus sumas parciales están en Q, que es compacto. Esto prueba que $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ es convergente y deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es S-convergente.

2) Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una serie BM-convergente y consideremos el espacio topológico producto $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ (en el caso complejo se tomaría $D^{\mathbb{N}}$, donde D es el disco unidad cerrado) y la aplicación $S : [-1,1]^{\mathbb{N}} \to X$ definida por $S((a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.

Sea $a \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es incondicionalmente de Cauchy, tenemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < \frac{\varepsilon}{8}$ si $n_0 < \inf F$ y $F \in \Phi$. Consideremos $\delta > 0$ tal que si $r = \text{máx}\{\|x_1\|,\ldots \|x_{n_0}\|\}$ se verifique $\delta < \dfrac{\varepsilon}{4rn_0}$. Tenemos que $H = [a_1 - \delta, a_1 + \delta] \times \cdots\cdots \times [a_{n_0} - \delta, a_{n_0} + \delta] \times \cdots \times [-1,1] \times \cdots$ es un entorno de a. Si $b \in H$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|S(a) - S(b)\| &\leq \|(a_1 - b_1)x_1 + \cdots + (a_{n_0} - b_{n_0})x_{n_0}\| + \|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} (a_i - b_i)x_i\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{4} + 2\|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} c_i x_i\|,\end{aligned}$$

donde $c_i = \frac{a_i - b_i}{2} \in [-1,1]$ si $i \geq n_0 + 1$. Para cada $n > n_0 + 1$ tenemos que $\|\sum_{i=n_0+1}^{n} c_i x_i\| \leq \sup\{\|\sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon_i x_i\| : \varepsilon_i = \pm 1\}$. Así pues, existe $\{\varepsilon_{n_0+1}, \ldots, \varepsilon_n\} \subset$

$\{-1,1\}$ tal que

$$\|\sum_{i=n_0+1}^{n} c_i x_i\| - \frac{\varepsilon}{8} < \|\sum_{i=n_0+1}^{n} \varepsilon_i x_i\| \leq \|\sum_{i\in F_1} x_i\| + \|\sum_{i\in F_2} x_i\| < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4},$$

donde $F_1 = \{i \in \{n_0+1,\ldots,n\} : \varepsilon_i \geq 0\}$ y $F_2 = \{i \in \{n_0+1,\ldots,n\} : \varepsilon_i < 0\}$. Por consiguiente, $2\|\sum_{i=n_0+1}^{n} c_i x_i\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que $2\|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} c_i x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$ y será $\|S(a) - S(b)\| \leq \varepsilon$.

Deducimos pues que $M = \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i : (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_\infty}\}$ es un subconjunto compacto de X. Finalmente observemos que $M = cl(A)$ donde

$$A = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, \{a_1,\ldots,a_n\} \subset [-1,1]\}.$$

Hemos obtenido así una condición necesaria para la BM-convergencia.

Veamos ahora una condición suficiente. Supongamos que $Q = cl(A)$ es compacto. Entonces tendremos que $\{S(F) : F \in \Phi\}$ es precompacto y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ será incondicionalmente de Cauchy, por lo que es BMCa. Así pues, dada una sucesión $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ tenemos que las sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\|a\|} x_i$ forman una sucesión de Cauchy en M, que es completo. Por consiguiente, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\|a\|} x_i$ es convergente y también lo será $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Podemos pues afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es BM-convergente.

TEOREMA 12.3.7 *Sea X un espacio normado y sea $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ una serie en X. Se verifica que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.- $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es uniCa.

2.- $L = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, \{a_1,\ldots,a_n\} \subset [-1,1]\}$ es acotado.

3.- $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es de Cauchy para cada $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de c_0.

4.- $\{\sum_{i\in F} x_i : F \in \Phi\}$ *es acotado.*

5.- $\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i : n \in \mathbb{N}, \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \subset \{-1, 1\}\}$ *es acotado.*

6.- $\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| : n \in \mathbb{N}, f \in B_{X^*}\}$ *es acotado.*

DEMOSTRACIÓN $\boxed{1\Rightarrow 2}$ Sea $f \in X^*$; tenemos que si $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in L$ se verifica que $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$. Así pues, considerando a L como subconjunto de X^{**} y aplicando el teorema de la acotación uniforme deducimos que L es acotado.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Supongamos que $M > 0$ es tal que si $x \in L$ es $\|x\| < M$. Sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ y sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_i| < \frac{\varepsilon}{M}$ si $i \geq n_0$. Entonces, si $q > p \geq n_0$ tenemos que $\frac{M}{\varepsilon}\left(\sum_{i=p}^{q} a_i x_i\right) \in L$ y, por tanto, $\frac{M}{\varepsilon}\|\sum_{i=p}^{q} a_i x_i\| < M$, por lo que que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es de Cauchy.

$\boxed{3\Rightarrow 4}$ Supongamos que $\{\sum_{i\in F} x_i : F \in \Phi\}$ no es acotado. Entonces, existe $F_1 \in \Phi$ tal que $\|\sum_{i\in F_1} x_i\| > 1$. Claramente $\{\sum_{i\in F} x_i : F \in \Phi, \inf F > \sup F_1\}$ no es acotado; así pues, existe $F_2 \in \Phi$ con $\inf F_2 > \sup F_1$ de modo que $\|\sum_{i\in F_1} x_i\| > 2$. razonando inductivamente, se obtiene una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos finitos no vacíos de $\mathbb{N}$ tales que $\|\sum_{i\in F_n} x_i\| > n$ si $n \in \mathbb{N}$. Sea $a \in c_0$ tal que $a(i) = \frac{1}{n}$ si $i \in F_n$ y $a(i) = 0$ si $i \notin F_n$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|\sum_{i\in F_n} a(i) x_i\| > 1$, por lo que $\sum_{i=1}^{\infty} a(i) x_i$ no es de Cauchy.

$\boxed{4\Rightarrow 5}$ Sea $M > 0$ tal que $\|\sum_{i\in F} x_i\| < M$ si $F \in \Phi$. Entonces, si $n \in \mathbb{N}$ y $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} \subset \{-1, 1\}$, consideraremos los conjuntos $F_1 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \varepsilon_1 \geq 0\}$ y $F_2 = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \varepsilon_i < 0\}$. Tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\| \leq \|\sum_{i\in F_1} x_i\| + \|\sum_{i\in F_2} x_i\| \leq 2M.$$

Por otra parte, es trivial que 5 $\Rightarrow$ 4.

$\underline{5\Rightarrow 6}$ | Sea $M > 0$ la cota dada por 5. Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua con $\|f\| \leq 1$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tomamos $\varepsilon_i = 1$ si $f(x_i) \geq 0$ y $\varepsilon_i = -1$ si $f(x_i) < 0$. Se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i) \leq \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \leq M.$$

Observemos que si X es complejo entonces la cota correspondiente a

$$\{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j i x_j : n \in \mathbb{N}, \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subset \{-1, 1\}\}$$

será también M. Por tanto, si X es complejo y $g : X \to \mathbb{C}$ es lineal y continua con $\|g\| \leq 1$ tenemos que, si $f = Reg$, se verifica $g(x) = f(x) - if(ix)$ y si $n \in \mathbb{N}$ será

$$\sum_{j=1}^{n} |g(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(x_j)| + \sum_{j=1}^{n} |f(ix_j)| \leq 2M.$$

$\underline{6\Rightarrow 1}$ | Si $f \in X^* \setminus \{0\}$ entonces de 6 se deduce que $\sum_{i=1}^{\infty} |\frac{f}{\|f\|}(x_i)|$ es convergente y por tanto también será convergente $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)|$. ∎

12.4 Copias de espacios de Banach

El teorema anterior es válido tanto si X es real o complejo. Si X es espacio complejo es claro que, en el punto 2, se podía haber sustituido L por

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, |a_i| \leq 1 \text{ para } i \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

En el punto 3 se puede considerar, si se desea, el espacio c_0 complejo. Si M es la cota correspondiente de L en 2, se verifica que si $a \in l_\infty$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq M\|a\|$. Si M es la cota correspondiente a 6 y $f \in B_{X^*}$ tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\frac{f}{\|f\|}(x_i)\right| \leq M$ y por tanto $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| \leq M\|f\|$.

Es sencillo comprobar que toda subserie de una serie wiCa es también wiCa.

Finalmente, si X es completo podemos considerar la aplicación $\sigma : c_0 \to X$ definida por $\sigma(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_i$. Observemos que si M es la cota correspondiente a 2 tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\|\sum_{i=1}^{n} \frac{a(i)}{\|a\|} x_i\| \leq M$ y, por tanto, $\|\sigma(a)\| \leq M\|a\|$, por lo que σ es continua.

Dada una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es un espacio normado X, definimos $\sigma_0 : c_{oo} \to X$, $\sigma_0(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)x_i$ entonces del teorema anterior (punto 2) se deduce que σ_0 es continua si y sólo si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es débil incondicionalmente de Cauchy. Si además X es completo σ es la extensión de σ_0 a c_0 y claramente es $\|\sigma\| = \|\sigma_0\|$.
Observemos que si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es $wiCa$ entonces para cada $f \in X^*$ se cumple $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, por lo que $w\lim(x_n) = 0$ (el recíproco es falso).

Observemos que en c_0 la serie $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ es débil incondicionalmente de Cauchy pero no es convergente. La existencia de este tipo de series caracteriza precisamente a los espacios que tienen copia de c_0.

TEOREMA 12.4.1 **[Teorema de Bessaga-Pelczynski (1958)].**
Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) Existe una serie débil incondicionalmente de Cauchy que no es ico.

ii) Existe una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ que es débil incondicionalmente de Cauchy pero $\inf_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| > 0$.

iii) X tiene copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN
$3 \Rightarrow 2$ | Sea $T : c_0 \to Y \subset X$ isomorfismo de c_0 sobre un subespacio Y de X. Existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\alpha\|a\| \leq \|Ta\| \leq \beta\|a\|$ si $a \in c_0$. Tenemos que T es débil - débil continua; así pues, como $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es wiCa, la serie $\sum Te_n$ es wiCa y es claro que $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|Te_n\| \geq \alpha > 0$.

$2 \Rightarrow 1$ | Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es wiCa e $\inf \|x_i\| > 0$ es claro que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es convergente.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ es wiCa pero que no es *ico*. Entonces, tampoco será incondicionalmente de Cauchy y existen $\varepsilon > 0$ y $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Phi$ tales que $\inf F_{n+1} > \sup F_n$ y $\|\sum_{i\in F_n} y_i\| > \varepsilon$, si $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n = \sum_{i\in F_n} y_i$. Es sencillo comprobar que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es wiCa y tenemos que $\inf_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| > \varepsilon$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es wiCa y que existe $\delta > 0$ tal que $\|x_i\| > \delta$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $w \lim_n x_n = 0$, sabemos que existe una subsucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es básica. Como $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ es wiCa, tenemos que el dominio de convergencia de la sucesión básica $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ contiene a c_0. Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ es convergente tenemos que $\delta|a_i| \leq \|a_i y_i\|$ y, como $\lim_{i\to\infty} \|a_i y_i\| = 0$, se verifica $\lim a_i = 0$: por consiguiente, el dominio de convergencia de la sucesión básica $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es exactamente c_0, lo que significa que $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de c_0, por lo que existe un isomorfismo T de c_0 sobre $Y = [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$. ∎

NOTA 12.4.2 1. Sabemos que l_1 no tiene copia de c_0; por tanto, en l_1 toda serie wiCa es *ico*.

2. Sea X un espacio normado y $A \subset X$. Denotamos, para cada subconjunto finito F de A, por $S(F)$ a la suma de los elementos de F. La familia A se dice que es sumable a x si dado $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F_0 de A tal que $\|S(F) - x\| < \varepsilon$, si $F \subset A$ es finito y $F_0 \subset F$.

Es claro que los términos de una serie *ico* forman una familia sumable. Veremos que, en esencia, cada familia A que sea sumable es una serie *ico*. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \subset A$ finito tal que si $F \subset A$ es finito y $F_n \subset F$ se cumple $\|S(F) - x\| < \frac{1}{3n}$. Por tanto, si $a \notin F_n$ tenemos que

$$\|a\| = \|(x - S(F_n)) - (x - S(F_n \cup \{a\}))\| \leq \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}.$$

Esto prueba que $A_n = \{a \in A : \|a\| > \frac{1}{n}\}$ es finito y que $\{a \in A : a \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es numerable. Si denotamos a este conjunto por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, es claro que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *ico*.

Se dice que $A \subset X$ **verifica la condición de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $F(\varepsilon) \subset A$ tal que $\|S(F)\| < \varepsilon$. Si $F \subset A$ es finito y $F \cap F(\varepsilon) = \emptyset$. Así, para cada $a \notin F(\varepsilon)$ se verifica $\|a\| < \varepsilon$. Por tanto es fácil deducir que $\{a \in A : a \neq 0\}$ es numerable.

Si X es un espacio de Banach y $A \subset X$ es de Cauchy probaremos que A es sumable. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = F(1/2) \cup \cdots \cup F(1/2^n)$. Denotemos a $S(G_n)$ por S_n. Si $q > p$ se tiene que $\|S_q - S_p\| < \frac{1}{2^p}$; así pues, (S_n) es de Cauchy y será convergente a cierto $x \in X$, que será tal que $\|x - S_p\| \leq \frac{1}{2^p}$, para cada $p \in \mathbb{N}$. Si $F \subset A$ es finito y contiene a G_n entonces $\|S(F) - S_n\| < \frac{1}{2^n}$ y por tanto

$$\|x - S(F)\| \leq \|x - S_n\| + \|S_n - S(F)\| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

TEOREMA 12.4.3 **[Teorema de Orlicz-Pettis]**

Sea X un espacio de Banach. Si $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una serie en X cuyas subseries son débil convergentes entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es ico.

DEMOSTRACIÓN Para cada $f \in X^*$ tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)$ es una serie de escalares cuyas subseries son convergentes, lo que prueba que $\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty$ y, por tanto, que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es *wiCa*.

Supongamos que existe una subserie, que seguimos denotando por $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, de modo que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no es convergente. Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ no será de Cauchy y por tanto existe $\varepsilon > 0$ y existen unas sucesiones crecientes de enteros $(p_n), (q_n)$ con $p_1 < q_1 < \cdots < p_n < q_n < \cdots$ y tales que si $y_n = \sum_{j=p_n}^{q_n} x_j$ entonces $\|y_n\| > \varepsilon$. Entonces es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sigue siendo una serie cuyas subseries son débil convergentes. Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es wiCa y también $w \lim_n y_n = 0$. Así pues como $\|y_n\| > \varepsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existe una subsucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es básica, $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es wiCa y $\|z_n\| > \varepsilon$, para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 y existirá un isomorfismo $T : c_0 \to [z_n]_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T(e_n) = z_n$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es débil convergente, tendrá que ser $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ débil convergente, lo cual es falso. ∎

TEOREMA 12.4.4 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en X (es decir, $\|x_n\| = 1$ si $n \in \mathbb{N}$). Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 si y sólo si existe $k > 0$ tal que para cada sucesión de escalares $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| \leq k \sup_{1\leq i\leq n} |c_i|.$$

DEMOSTRACIÓN Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la sucesión $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de c_0 entonces existe un isomorfismo $T : c_0 \to [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que $T(e_n) = x_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $c_1, \ldots, c_n$ son escalares, consideremos la sucesión $\alpha \in c_0$, donde $\alpha(i) = c_i$ si $i \leq n$ y $\alpha(i) = 0$ si $i > n$. Tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| = \|T\alpha\| \leq \|T\| \|\alpha\| \leq \|T\| \sup_{1\leq i\leq n} |c_i|.$$

Por tanto, es suficiente tomar $k = \|T\|$.

Veamos ahora el recíproco. Definimos $T : c_0 \to [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ por $T(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Demostraremos que T está bien definida. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim \alpha_i = 0$, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_i| < \frac{\varepsilon}{k}$, si $i \in \mathbb{N}$ e $i \geq i_0$. Si $p > q \geq i_0$ se cumple

$$\|\sum_{i=p}^{q} \alpha_i x_i\| \leq k \sup_{p\leq i\leq q} |\alpha_i| \leq \varepsilon.$$

Es claro que T es lineal y también es inyectiva, ya que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es básica. Veamos que T es sobreyectiva. Sea $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Es claro que, como $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es normalizada, se verifica $\beta = (\beta_i) \in c_0$, por lo que $T\beta = y$.

Probaremos ahora que T es continua. Si $\alpha = (\alpha_i) \in c_0$ tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| \leq k \sup_{1\leq i\leq n} |\alpha_i| \leq k\|\alpha\|,$$

por lo que $\|T(\alpha)\| \leq k\|\alpha\|$.

(Podemos observar en la demostración que no es preciso que tenga que ser $\|x_n\| = 1$ y que basta con imponer que exista $\delta > 0$ tal que $\|x_n\| > \delta$ si $n \in \mathbb{N}$). ■

TEOREMA 12.4.5 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica normalizada en X. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_1 si y sólo si existe $k > 0$ tal que para cada sucesión de escalares $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq k\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|.$$

DEMOSTRACIÓN $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \to l_1$ un isomorfismo tal que $T(x_n) = e_n$. Sea $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\|T(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n)\| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \|T\| \, \|c_1x_1 + \cdots + c_nx_n\|,$$

por lo que basta tomar $k = \|T\|$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \to l_1$ la aplicación definida, para cada $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$, por $T(y) = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Veamos que T está bien definida. Si $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $q > p \geq n_0$ se cumple $\|\sum_{i=p}^{q} \alpha_i x_i\| < \frac{\varepsilon}{k}$. Por tanto, se verifica $\sum_{i=p}^{q} |\alpha_i| \leq k\|\sum_{i=p}^{q} \alpha_i x_i\| \leq \varepsilon$, por lo que $(\alpha_i) \in l_1$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq k\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\|$, deducimos que $\|Ty\| \leq k\|y\|$. Así pues, T es continua.

Es claro que T es lineal e inyectiva; concluiremos viendo que T es sobreyectiva. Es sencillo comprobar que si $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$ entonces $y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y será $Ty = \alpha$.

(En la demostración podremos observar que no es preciso que tenga que ser $\|x_n\| = 1$ y basta con imponer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea acotada). ∎

NOTA 12.4.6 1. Recordemos que se dice que Y es cociente de X si existe un subespacio vectorial cerrado K de X tal que Y es isomórfico a X/K. Si este isomorfismo es $T : X/K \to Y$ y p es la proyección canónica $p : X \to Y/K$, tenemos que $Tp : X \to Y$ es lineal continua y sobreyectiva. Recíprocamente si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal continua y sobreyectiva y $K = ker\,T$ entonces la correspondiente aplicación $\tilde{T} : X/K \to Y$ es un isomorfismo, por tanto Y es cociente de X.

Demostraremos ahora que ***si l_1 es un cociente de un espacio de Banach X entonces l_1 es isomórfico a un subespacio complementado de X***. En efecto, sea $T : X \to l_1$ una aplicación lineal, continua y sobreyectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in X$ tal que $Tz_n = e_n$ y $\|z_n\| \leq M\|e_n\| = M$ (donde M es la constante abierta de T). Esto prueba que (z_n) es una sucesión acotada. Consideremos la aplicación $S : l_1 \to X$ definida por $S(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i$. Tenemos que S es lineal y que es continua, ya que $\|S(\alpha)\| \leq M\|\alpha\|$. Si $\alpha \in l_1$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T z_i\| \leq \|T\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\|.$$

Así pues, $\|\alpha\| \leq \|T\| \, \|S(\alpha)\|$ y esto prueba que l_1 es isomórfico a un subespacio cerrado, Im $S = H$, de X.

Observemos que $TS : l_1 \to l_1$ es la identidad, ya que

$$T(S\alpha) = T(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T z_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \alpha.$$

Consideremos la aplicación $p = ST : X \to X$. Tenemos que $p(p(x)) = ST(ST(x)) = ST(x) = p(x)$, por lo que p es una proyección tal que $\operatorname{Im} p \subset H$. Veamos que $H \subset \operatorname{Im} p$. En efecto, si $z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i \in H$ se verifica $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_1$ y existirá $x \in X$ tal que $Tx = \alpha$. Entonces $p(x) = S(Tx) = S(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z_i = z$. Por tanto H está complementado en X y es isomórfico a l_1.

TEOREMA 12.4.7 *Sea X un espacio de Banach, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.- X^* tiene copia de c_0.

2.- X tiene una copia complementada de l_1.

3.- X^* tiene una copia Z de l_∞ tal que

a) Z es isomórfico a l_∞, si se considera en Z la topología $*$-w de X^* y en l_∞ la topología $*$-w dada por l_1.

b) Existe proyección $p : X^* \to X^*$ con $Imp = Z$ y que es $*$-w - $*$-w continua.

DEMOSTRACIÓN $\underline{1 \Rightarrow 2}$ | Sea T un isomorfismo de c_0 en X^*. Tenemos que $T^* : X^{**} \to (c_0)^* \approx l_1$ es sobreyectiva continua y $*$-w - $*$-w continua. Sea $S = T^*_X$ (la restricción de T^* a X), $S : X \to l_1$. Observemos que si $x \in X$ se cumple que $Sx = T^*x : c_0 \to \mathbb{K}$ está definida, para $\alpha \in c_0$, por

$$(T^*x)(\alpha) = \hat{x}(T\alpha) = \hat{x}(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i T e_i(x).$$

Por consiguiente, $Sx = (Te_1(x), Te_2(x), \ldots)$.

Como B_X es $*$-w denso en $B_{X^{**}}$, se tiene que $T^*B_X = SB_X$ es un conjunto $*$-w denso en $T^*B_{X^{**}}$. Observemos que, como T^* es abierta, se verifica que $T^*B_{X^{**}}$ es un entorno de cero en $(c_0)^* \approx l_1$ y existirá $\alpha > 0$ tal que $\alpha B_{l_1} \subset T^*B_{X^{**}}$.

Para $\alpha e_1^* : c_0 \to \mathbb{K}$, consideremos el $*$-w entorno $B_1 = B(\alpha e_1^*; e_1; \frac{\alpha}{2})$. Tenemos que existe $x_1 \in B_X$ tal que $Sx_1 \in B_1$. Por ello, $|Sx_1(e_1) - \alpha e_1^* e_1)| < \frac{\alpha}{2}$ y

$$|Sx_1(e_1)| \geq |\alpha e_1^*(e_1)| - |Sx_1(e_1) - \alpha e_1^*(e_1)| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Por tanto, $\|Sx_1\| > \frac{\alpha}{2}$.

Para αe_2^*, consideremos el $*$-w entorno $B_2 = B(\alpha e_2^*; e_1, e_2; \frac{\alpha}{3})$. Existe un $x_2 \in B_X$ tal que $Sx_2 \in B_2$ y se verifica $|Sx_2(e_1) - \alpha e_2^*(e_1)| = |Sx_2(e_1)| < \frac{\alpha}{3}$. Además se tiene

$$|Sx_2(e_2)| \geq |\alpha e_2^*(e_2)| - |Sx_2(e_2)| - \alpha e_2^*(e_2)| > \alpha - \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3} > \frac{\alpha}{2}$$

y será $\|Sx_2\| > \frac{\alpha}{2}$.

Para αe_3^* consideremos el $*$-w entorno $B_3 = B(\alpha e_3^*; e_1, e_2, e_3; \frac{\alpha}{4})$ y sea $x_3 \in B_X$ tal que $Sx_3 \in B_3$. Se verifica $|Sx_3(e_1)| < \frac{\alpha}{3}|Sx_3(e_2)| < \frac{\alpha}{3}$ y $|Sx_3(e_3)| > \alpha - \frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4} > \frac{\alpha}{2}$, por lo que será $\|Sx_3\| > \frac{\alpha}{2}$.

Razonando inductivamente obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en B_X tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\|Sx_n\| > \frac{\alpha}{2}$ y $|Sx_n(e_1)| < \frac{\alpha}{n} \ldots |Sx_n(e_{n-1})| < \frac{\alpha}{n}$. Por tanto, para cada k fijo, se verifica $\lim\limits_{n\to\infty} Sx_n(e_k) = 0$. Además, los funcionales asociados a la base $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de l_1 son $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $|e_k(Sx_n)| = |Sx_n(e_k)| \underset{n}{\rightarrow} 0$, si $k \in \mathbb{N}$ es fijo. Por tanto deducimos, de un teorema anterior, que $(Sx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión, que denotamos por (Sy_n), que es básica y equivalente a una sucesión bloque de $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. Como las sucesiones bloque de $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes a la propia $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ y además el espacio vectorial cerrado que generan está complementado en l_1 (teorema 12.2.17), existe, por tanto, una proyección continua $p : l_1 \to [Sy_n]_{n\in\mathbb{N}}$. Observemos que si $z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i S y_i \in [Sy_n]_{n\in\mathbb{N}}$ se verifica $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_1$ y, por tanto, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$ es convergente a cierto $y \in X$. Tenemos que $Sy = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i S y_i = z$, por lo que $pS : X \to [Sy_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es sobreyectiva. Como $[Sy_n]_{n\in\mathbb{N}}$ es isomórfico a l_1, se verifica que l_1 es un cociente de X.

De la nota anterior deducimos que l_1 es isomórfico a un subespacio complementado de X.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Supongamos que topológicamente tenemos que $X = A \oplus B$, con $A \approx l_1$. Considerando la proyección $p : X \to X$ de X sobre A desde B, sabemos que la aplicación dual $p^* : X^* \to Y^*$ es una proyección de X^* sobre B^0 desde A^0. Si consideramos la aplicación canónica $q : X \to X/B$, se demostró que la aplicación dual $q^* : (X/B)^* \to X^*$ es un isomorfismo de $(X/B)^*$ sobre $(\ker q)^0 = B^0$ (es además isometría). Observemos que q^* es un $*$-w - $*$-w isomorfismo. Del isomorfismo entre X/B y A se deduce que existe otro isomorfismo, para las topologías $*$-w - $*$-w, entre $(X/B)^*$ y A^*. Del isomorfismo entre l_1 y A se deduce que existe otro, que es además $*$-w - $*$-w entre A^* y l_∞. Por tanto si $Z = B^0$, tenemos que Z es isomórfico a l_∞, por medio de una aplicación que es también isomorfismo $*$-w - $*$-w. Además $p : X^* \to X^*$ es una proyección de X^* sobre Z que es $*$-w - $*$-w continua.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Es evidente que si X^* tiene copia de l_∞ entonces la tendrá también de c_0. ∎

NOTA 12.4.8 Sea X un espacio normado y sea $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ una serie en X^* que es wiCa. Para cada $x^{**} \in X^{**}$ se verifica $\sum_{n=1}^{\infty} |x^{**}(f_n)| < \infty$ y, en particular, para cada $x \in X$ se cumple $\sum |f_n(x)| < \infty$.

Recíprocamente, supongamos que X es tonelado y que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty$, para cada $x \in X$. Consideremos

$$E = \{\sum_{n=1}^{n} \alpha_i f_i : n \in \mathbb{N}, \{\alpha_i, \cdots, \alpha_n\} \subset [-1,1]\}.$$

Si $x \in X$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in E$ tenemos que

$$|\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|.$$

Como E es puntualmente acotada en X, E es uniformemente acotado; es decir, E es acotado y $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ es una serie wiCa.

TEOREMA 12.4.9 *Sean X un espacio de Banach y X^* su espacio dual. Entonces, en X^* cada serie wiCa es ico si y sólo si X^* no tiene copia de l_∞.*

DEMOSTRACIÓN $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que X^* tiene copia de l_∞ entonces también la tendrá de c_0. Sea pues T un isomorfismo de c_0 en X; tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} Te_n$ es wiCa en X^* y, por tanto, será también *ico*. Se deduce entonces que también lo sería $\sum e_n$, lo que es falso.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si existe una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_n^*$ en X^* que es wiCa pero no es ico tenemos que entonces X^* tendrá copia de c_0 y por tanto también de l_∞. ∎

12.5 Bases incondicionales, contractivas y acotadamente completas

Es sencillo comprobar que si X es c_0 o l_p, $p \in [1, +\infty)$ y $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la correspondiente base canónica entonces, para cada $\alpha \in X$, se verifica que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(i) e_i = \alpha$

y la convergencia es incondicional. Una base con esta propiedad será llamada **base incondicional.** Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de un espacio de Banach X. tenemos que, para cada $M \subset \mathbb{N}$ infinito, si $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ es convergente será ico y por tanto Sco. Así pues, $\sum_{i\in M} \alpha_i e_i$ es también convergente y podemos afirmar que $(e_i)_{i\in M}$ es una subbase complementada. Recordemos que en $l_1, b_1 = e_1, \cdots, b_n = e_n - e_{n-1} \cdots$ era una base tal que cierta subsucesión no era base complementada; así pues, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base de l_1 que no es incondicional.

Las siguientes cuestiones son evidentes:

i.- Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo y (b_n) es una base incondicional de X entonces $(Tb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de TX: por tanto, si dos bases son equivalentes y una de ellas es incondicional también lo es la otra.

ii.- Sea X un espacio de Banach y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base incondicional de X. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los funcionales asociadas a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - b_n\| \, \|f_n\| = p < 1$, entonces sabemos que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será equivalente a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será una base incondicional.

iii.- *Sea X un espacio normado y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $[b_n]_{n\in\mathbb{N}} = X$ y existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ con $f_i(b_j) = \delta_{ij}$, si $i, j \in \mathbb{N}$. Para cada $M \in \Phi$, sea $P_M(x) = \sum_{i\in M} f_i(x) b_i$. Si existe algún $k > 0$ tal que $\|P_M\| < k$, para cada $M \in \Phi$, entonces $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de X.*

En efecto, ya se ha probado que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X. Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i = x \in X$. Veremos que la convergencia es incondicional. Sea $\varepsilon > 0$, como $x \in [b_i]_{n\in\mathbb{N}}$, existe $y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Entonces, si $M \supset \{1, \ldots, m\}$ se verifica

$$\|\sum_{i\in M} \alpha_i x_i - y\| = \|P_M(x) - P_M(y)\| \le k\|x - y\| < k\varepsilon,$$
$$\|\sum_{i\in M} \alpha_i x_i - x\| \le \|P_M(x) - y\| + \|y - x\| \le \varepsilon k + \varepsilon = \varepsilon(k+1).$$

Veamos ahora que si X es de Banach es válido el recíproco del resultado anterior; es decir: *si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de X entonces existe $k > 0$ tal que $\|P_M\| < k$ para cada $M \in \Phi$.*

En efecto, como X es un espacio de Banach, los funcionales asociados f_n serán continuos y por tanto es evidente que para cada $M \in \Phi$ será P_M continuo. Si $x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) b_i$ tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) b_i$ es wiCa y por tanto existe n_0 tal que $\|\sum_{i\in M} f_i(x) b_i\| < 1$ si $\inf M > n_0$ y $M \in \Phi$. Entonces es claro que $\{P_M(x) : M \in \Phi\}$

es acotado y, por el principio de la acotación uniforme, podemos afirmar que existe $k > 0$ tal que $\|P_M\| \leq k$ si $M \in \Phi$.

Observemos que, en esta situación, si $A \subset \mathbb{N}$ es infinito podemos considerar $P_A : X \to X$ $P_A(x) = \sum_{i \in A} f_i(x) b_i$. Es claro que también es $\|P_A\| \leq k$.

iv.- Demostraremos ahora que *si X es un espacio de Banach y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ es tal que $[b_n]_{n \in \mathbb{N}} = X$ entonces $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base incondicional de X si y sólo si existe algún $k > 0$ tal que para cada $A, B \in \Phi$ con $A \subset B$ y cada sucesión $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de escalares se verifica que*

$$\|\sum_{i \in A} \alpha_i b_i\| < k \|\sum_{i \in B} \alpha_i b_i\|.$$

En efecto, si $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una base incondicional existe $k > 0$ tal que $\|P_F\| < k$ si $F \in \Phi$. Entonces si $A, B \in \Phi$ con $A \subset B$ y $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares tenemos que

$$\|\sum_{i \in A} \alpha_i b_i\| = \|P_A\left(\sum_{i \in B} \alpha_i b_i\right)\| \leq k \|\sum_{i \in B} \alpha_i b_i\|.$$

Recíprocamente, si se da la condición anterior es claro que $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una base tal que $\|P_F\| \leq k$ si $F \in \Phi$. Así pues, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ será una base incondicional.

DEFINICIÓN 12.5.1 *Sea X un espacio de Banach y sea $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de X. Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ los funcionales asociados a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Se dirá que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base contractiva* (shrinking, *sh*) *si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base de X^*. Se dice que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base acotadamente completa* (boundedly complete, *bc*) *si para cada sucesión $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de escalares se verifica que si $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ es convergente.*

TEOREMA 12.5.2 *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base de X. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son los correspondientes funcionales asociados tenemos que las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base de X^*; es decir, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es base Sh.

b) Para cada $f \in X^*$ es $\lim_{n \to \infty} \|f\|_n = 0$, donde $\|f\|_n$ es la norma de f restringida a $\mathcal{L}(x_i : i > n)$.

c) Para cada $f \in X^*$ es $\lim_n (\sup\{|f(x)|, x = \sum_{i > n} a_i x_i, \|x\| = 1\}) = 0$; es decir $\lim_n \|f\|'_n = 0$, donde $\|f\|'_n$ es la norma de f restringida a $[x_i]_{i > n}$.

DEMOSTRACIÓN Veremos en primer lugar la equivalencia entre 2 y 3.

Supongamos que 2 es cierto. Para $f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ se verifica $\|f\|_n \leq \varepsilon$. Así pues, si $\|x\| = 1$ y $x \in [x_i]_{i > n}$ se tiene

$|f(x)| \leq \varepsilon$, por lo que $|f(x)| \leq \varepsilon$ para cada $x \in \overline{\mathcal{L}(x_{n+1}, \ldots)}$ con $\|x\| = 1$. Por tanto, $\sup\{|f(x)| : x = \sum_{i>n} a_i x_i, \|x\| = 1\} \leq \varepsilon$ si $n \geq m$.

Recíprocamente, si 3 es cierto y $\varepsilon > 0$ tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{|f(x)| : x = \sum_{i>m} a_i x_i, \|x\| = 1\} < \varepsilon$. Esto claramente implica que $\|f\|_n < \varepsilon$ si $n \geq m$.

$1 \Rightarrow 2$ Sea $f \in X^*$; entonces podemos escribir $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$. Sea $\varepsilon > 0$; existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - \sum_{i=1}^{m} a_i f_i\| = \|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i f_i\| < \varepsilon$. Entonces, si $x \in \mathcal{L}(x_{m+1}, \ldots)$ y $\|x\| = 1$, tenemos que $|f(x)| = |\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i f_i(x)| \leq \|\sum_{i=m+1}^{\infty} a_i f_i\| < \varepsilon$. Por tanto, $\|f\|_m \leq \varepsilon$ y, como $(\|f\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, deducimos que $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$.

$2 \Rightarrow 1$ Demostraremos que $\overline{[f_n]_{n\in\mathbb{N}}} = X^*$. Sean $f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Veremos que existe $g \in \mathcal{L}(f_n : n \in \mathbb{N})$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$. Sea k la constante básica de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ es $\|f\|_n < \frac{\varepsilon}{1+k}$. Consideremos $g = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) f_i$; tenemos que $g \in \mathcal{L}(f_n : n \in \mathbb{N})$ y si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in S_X$ entonces

$$\begin{aligned}
|(f-g)(x)| &= \left| f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\right) - \sum_{i=1}^{m} f(x_i) f_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\right)\right| \\
&= \left| f\left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\right) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i)\right| \\
&= \left| f\left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha_j x_j\right)\right| \leq \|f\| \left\|\sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha_j x_j\right\|
\end{aligned}$$

Como $\|\sum_{j=m+1}^{\infty} \alpha_j x_j\| \leq \|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\| + \|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\| \leq 1 + k\|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j\| = 1 + k$, se tiene $|(f-g)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{1+k}(1+k) = \varepsilon$, por lo que $\|f - g\| \leq \varepsilon$ ∎

TEOREMA 12.5.3 **[Teorema de James]**

Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entonces X es reflexivo si y sólo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sh y bc.

DEMOSTRACIÓN Denotaremos por $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de funcionales asociados a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supongamos que X es reflexivo; demostraremos en primer lugar que

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es bc. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| < k$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe una subsucesión (u_{n_k}) que es débilmente convergente a cierto $u \in X$. Supongamos que $u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i x_i$. Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_k f_n(u_{n_k}) = f_n(u) = \beta_n$. Si $n_k > n$ se verifica $f_n(u_{n_k}) = \alpha_n$. Así pues, también se cumple $\lim_k f_n(u_{n_k}) = \alpha_n$ y deducimos que $\alpha_n = \beta_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$.

Demostraremos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sh. Supongamos que no lo es; entonces existe $f \in X^*$ tal que no es cierto que $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$. Entonces existirán $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros tales $\|f\|_{p_n} > \varepsilon$ si $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para cada n existe $y_n \in \mathcal{L}(x_{p_n+1}, \ldots)$ con $\|y_n\| = 1$ y tal que $|f(y_n)| > \varepsilon$. Para $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que será débilmente convergente a cierto $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$. Si $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\lim_k f_n(y_{n_k}) = f_n(y) = c_n$. Si $p_{n_k} > n$ se verifica $f_n(y_{n_k}) = 0$; esto prueba que $\lim_k f_n(y_{n_k}) = 0$ y $c_n = 0$ si $n \in \mathbb{N}$. Así pues, $w\lim(y_{n_k}) = 0$; esto contradice que $|f(y_{n_k})| > \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sh y bc. Probaremos que X es reflexivo. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de B_X y supongamos que $k > 0$ es la constante básica. Para cada $n \in \mathbb{N}$ supongamos que $y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^n x_i$. Sea $i \in \mathbb{N}$ fijo y sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\alpha_i^n x_i\| &= \|\alpha_1^n x_1 + \cdots + \alpha_i^n x_i^n - (\alpha_i^n x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}^n x_{i-1}^n)\| \\
&\leq \|\alpha_i^n x_1 + \cdots + \alpha_i^n x_i^n\| + \|\alpha_i^n x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}^n x_{i-1}^n\| \\
&\leq 2k\|y_n\| \leq 2k.
\end{aligned}$$

Así pues, para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $|\alpha_i^n| \leq \frac{2k}{\|x_i\|}$ y podemos afirmar que la sucesión $(\alpha_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada. Para $(\alpha_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe $M_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $(\alpha_1^j)_{j\in M_1}$ converge a cierto $\alpha_1 \in \mathbb{K}$. Para $(\alpha_2^n)_{j\in M_1}$ existe $M_2 \subset M_1$ infinito con $\min M_1 < \min M_2$ tal que $(\alpha_2^n)_{j\in M_2}$ converge a cierto $\alpha_2 \in \mathbb{K}$. Razonando inductivamente determinamos una sucesión de conjuntos infinitos $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tales que $M_{k+1} \subset M_k$ y $\min M_{k+1} > \min M_k$ y $(\alpha_k^j)_{j\in M_k}$ converge a cierto $\alpha_k \in \mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $p_n = \min M_n$ y consideremos la subsucesión (y_{p_n}). Observemos que si $n > k$ es $p_n \in M_k$ y por tanto para $k \in \mathbb{N}$ fijo tenemos que $(\alpha_k^{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión $(\alpha_k^j)_{j\in M_k}$ y convergerá pues a α_k. Para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|\alpha_1^{p_n} x_1 + \cdots + \alpha_N^{p_n} x_N\| \leq k\|y_{p_n}\| \leq k$, y esto se verifica para cada p_n.

Dejando fijo N y haciendo $p_n \to \infty$ obtenemos que $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N\| \leq k$.

Esto significa que $\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i x_i\right)_{N\in\mathbb{N}}$ es acotada. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base bc, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i$ converge a cierto $y \in X$.

Demostraremos ahora que $w\lim_n y_{p_n} = y$. Sea $f \in X^*$; probaremos que $\lim_n f(y_{p_n}) = f(y)$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base sh, tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f\|_N < \frac{\varepsilon}{8k}$. Como

$$\lim_n(\alpha_1^{p_n}) = \alpha_1, \ldots, \lim_n(\alpha_{N-1}^{p_n}) = \alpha_{N-1},$$

existe $M \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq M$ y $i \in \{1, \ldots, N-1\}$ se verifica $|\alpha_i^{p_n} - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|\,\|x_i\|(N-1)}$. Entonces

$$\|\sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i - \alpha_i^{p_n})x_i\| < \|x_1\||\alpha_1 - \alpha_1^{p_n}| + \cdots + \|x_{N-1}\||\alpha_{N-1} - \alpha_{N-1}^{p_n}| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|}.$$

Por otra parte, para cada $t \in \mathbb{N}$ se cumple $\|\sum_{N}^{N+t}\alpha_i^{p_n}x_i\| \leq 2k\|y_{p_n}\| \leq 2k$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así pues, tomando $p_n \to \infty$ deducimos que $\|\sum_{N}^{N+t}\alpha_i x_i\| \leq 2k$. Como esto es cierto para cada $t \in \mathbb{N}$, se verificará $\|\sum_{i=N}^{\infty}\alpha_i x_i\| \leq 2k$. Por tanto, si $n \geq M$, se cumple

$$\begin{aligned}|f(y) - f(y_{p_n})| &\leq |f\left(\sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i - \alpha_i^{p_n})x_i\right)| + |f\left(\sum_{i=N}^{\infty}\alpha_i x_i\right)| + |f\left(\sum_{i=N}^{\infty}\alpha_i^{p_n}x_i\right)| \\ &\leq \|f\|\tfrac{\varepsilon}{2\|f\|} + \|f\|_N 2k + \|f\|_N 2k \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

∎

TEOREMA 12.5.4 *Sea X un espacio de Banach. Sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de X y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los correspondientes funcionales. Entonces, si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base sh de X tenemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base bc de X^*.*

DEMOSTRACIÓN Sabemos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X^*; probaremos que es una base bc. Sea $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\| < M$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $x \in X$ demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i f_i(x) < \infty$.

Tenemos que existe una sucesión $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de escalares de modo que $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $n \geq m$, se verifica

$$\| \sum_{i=m}^{n} \alpha_i f_i \| \leq \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \| + \| \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i f_i \| \leq 2M.$$

Además, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m \geq n_0$ se cumple $\| \sum_{i=m}^{n} \beta_i b_i \| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ y

$$\begin{aligned} |\sum_{i=m}^{n} \alpha_i f_i(x)| &= | \left(\sum_{i=m}^{n} \alpha_i f_i \right) \left(\sum_{i=m}^{n} \beta_i b_i \right) | \\ &\leq \| \sum_{i=m}^{n} \alpha_i f_i \| \, \| \sum_{i=m}^{n} \beta_i b_i \| \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$ es convergente para cada $x \in X$. Esto significa que la aplicación definida por $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x)$ es lineal y continua, ya que si $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se verifica $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)| \leq M\|x\|$. Por tanto $|f(x)| \leq M\|x\|$.

En principio, sin hacer uso de la hipótesis de que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base sh, lo que ha quedado probado es que $*\text{-}w \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i = f$. Observemos que, al ser $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base sh, se tiene que (f_n) es una base de X^*; así pues, existe una sucesión $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que $f = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i f_i$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $f(b_j) = \delta_j$ y también $f(b_j) = \alpha_j$. Por consiguiente, $\alpha_j = \delta_j$ y $f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i$. ∎

TEOREMA 12.5.5 *Sea X un espacio de Banach que tiene una base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es bc. Entonces, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los funcionales asociados se verifica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base sh de $Z = [f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y X es isomórfico a Z^*.*

DEMOSTRACIÓN Sea $\varphi : X \to Z^*$ la aplicación obtenida al considerar que, para cada $x \in X$, $\varphi(x)$ es la aplicación de Z en $\mathbb{K}$ definida por $\varphi(x)(f) = f(x)$. Es decir, $\varphi(x)$ es la restricción de $\hat{x}$ desde X^* a Z^*. Así pues, $\|\varphi(x)\| \leq \|\hat{x}\| = \|x\|$. Sea $x = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$ un elemento de $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$. Si k es la constante básica tenemos que $\|P_n\| = \|P_n^*\| \leq k$. Consideremos $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Tenemos que $\|x\| = f(x) = f(P_n(x))$. Observemos que $fP_n = \hat{x_1}(f) f_1 + \cdots + \hat{x_n}(f) f_n$; así pues, $fP_n \in Z$ y será $\|x\| = \varphi(x)(f(P_n)) \leq \|\varphi(x)\| \, \|fP_n\| \leq k\|\varphi(x)\|$. Por tanto, $\frac{1}{k}\|x\| \leq \|\varphi(x)\|$ y podemos afirmar que φ es un isomorfismo.

Observemos que los funcionales asociados a $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Es claro que $[\varphi(x_n)]_{n\in\mathbb{N}} = Z^*$; así pues, $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Z^*. Sea $g \in Z^*$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $q_n : Z^* \to Z^*$ la correspondiente proyección generada por la base $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Si $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$q_n(g) = \sum_{i=1}^{n} g(f_i^*)\varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} g(f_i^*)x_i\right)$$

y $\|q_n(g)\| \leq k\|g\|$. Por tanto, la sucesión $\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} g(f_i^*)x_i\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y también será acotada $\left(\sum_{i=1}^{n} g(f_i^*)x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Por consiguiente, como $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es bc se verifica $\sum_{i=1}^{\infty} g(f_i^*)x_i = x$.

Probaremos que φ es sobreyectiva probando que $\varphi(x) = g$. En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple $\varphi(x)(f_i^*) = g(f_i^*)$, por lo que $\varphi(x) = g$. Finalmente observemos que (f_n) es una base sh de Z, ya que los funcionales asociados, $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, forman una base de Z^*. ■

NOTA 12.5.6 1. Es importante, para entender el teorema anterior, que observemos lo siguiente: si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de X con constante básica k y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los correspondientes funcionales asociados, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $[f_n]_{n\in\mathbb{N}}$ con constante básica k y los funcionales asociados son $(\hat{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Además, para cada $f \in [f_n]_{n\in\mathbb{N}}$, se verifica $f = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{b}_i(f)f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f(b_i)f_i$.

2. Omitimos la demostración del siguiente resultado: *si X es un espacio de Banach tal que X^* tiene base, entonces X tiene una base bc y por tanto X^* tiene una base sh.* el lector interesado puede consultar el trabajo "On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces" (Israel J. Math 9, 488-506, 1971) de W.B. Johnson, H.P. Rosenthal y M. Zippin.

3. Pasamos ahora a estudiar algunas cuestiones relacionadas con las bases incondicionales. Recordemos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional, tanto en c_0 como en l_p, $p \in [1, +\infty)$. Sin embargo, $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es acotadamente completa en c_0 ya que $(e_1 + \cdots + e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada pero $\sum_{i=1}^{\infty} e_i$ no converge en c_0. Si $p \in [1, +\infty)$ tenemos que (e_i) es una base acotadamente completa de l_p, ya que si $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada tenemos que existe algún $M > 0$ tal que

$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p\right)^{1/p} \leq M$ si $n \in \mathbb{N}$, lo que prueba que $\alpha = (\alpha_i) \in l_p$ y $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i = \alpha$.

Un ejemplo de base no incondicional en c_0 es la llamada base sumante de c_0. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $z_n = e_1 + \cdots e_n$; tenemos que si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ entonces $a = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i z_i$, donde $\alpha_i = a_i - a_{i+1}$. En efecto,

$$\|a - \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i z_i\| = \|(a_{n+1}, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1}, \ldots)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por otra parte, si $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i z_i = 0$ tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\sum_{i=n}^{\infty}\alpha_i = 0$ y $\sum_{i=n+1}^{\infty}\alpha_i = 0$. Restando, deducimos que $\alpha_n = 0$. Así pues, $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de c_0 que no es incondicional, ya que para cada N se verifica

$$\|\sum_{i=1}^{N}(-1)^i z_i\| = 1,$$

$$\|\sum_{i=1}^{N}(-1)^i z_i + \sum_{i=N+1}^{2N} z_i\| \geq N.$$

Por tanto, no es posible que se cumpla la condición de base incondicional.

4. Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de X. Es sencillo comprobar que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de l_2 y que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de X que es *sh* y *bc*.

5. Sea X un espacio de Banach que tiene base incondicional $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $k > 0$ una constante tal que si $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $A, B \in \Phi$ con $A \subset B$ se verifica que $\|\sum_{i\in A}\alpha_i e_i\| \leq k\|\sum_{i\in B}\alpha_i e_i\|$. Para cada $x = \sum_{i=1}^{\infty}a_i e_i$, definimos

$$|x| = \sup\{\, \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i e_i\| : \varepsilon_i = \pm 1, i \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\|x\| \leq |x|$. Si $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\{-1, 1\}$ y $A_1 = \{i \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = +1\}$, $A_2 = \{i \in \mathbb{N} : \varepsilon_i = -1\}$, entonces tenemos que

$$\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i e_i\| \leq \|\sum_{i\in A_1}a_i e_i\| + \|\sum_{i\in A_2}a_i e_i\| \leq 2k\|\sum_{i=1}^{\infty}a_i e_i\|.$$

Así pues, $|x| \leq 2k\|x\|$. Es fácil probar que $|\cdot|$ es una norma en X y hemos probado que es equivalente a $\|\cdot\|$. Veamos que para la norma $|\cdot|$ se verifica que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional monótona; es decir, donde la correspondiente constante básica puede tomarse como $k = 1$. En efecto, sea $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares y $A, B \in \Phi$ con $A \subset B$. Sea $x = \sum_{i \in B} \alpha_i e_i$; tenemos que si $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\{-1, 1\}$ se verifica que

$$|x| \geq \| \sum_{i \in A} \varepsilon_i \alpha_i e_i + \sum_{i \in B-A} \varepsilon_i \alpha_i e_i \|.$$

Por otro lado,

$$|x| \geq \| \sum_{i \in A} \varepsilon_i \alpha_i e_i - \sum_{i \in B-A} \varepsilon_i \alpha_i e_i \|,$$

por lo que deducimos (multiplicando por 1/2) que $\| \sum_{i \in A} \varepsilon_i \alpha_i e_i \| \leq |x|$. Así pues, $| \sum_{i \in A} \alpha_i e_i | \leq | \sum_{i \in B} \alpha_i e_i |$.

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ es *ico*, tenemos que, si $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es tal que $|b_i| \leq |a_i|$ y si $i \in \mathbb{N}$, podemos definir $\alpha_i = \frac{b_i}{a_i}$ si $a_i \neq 0$ y $\alpha_i = 0$ si $a_i = 0$ (sería $b_i = 0$). Entonces $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ también será convergente.

Veamos que si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base con esta propiedad entonces $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es incondicional. En efecto, si $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ y $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, se verifica $|\frac{1}{\|\alpha\|} \alpha_i c_i| \leq |a_i|$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\|\alpha\|} \alpha_i a_i e_i$ es convergente. Por tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i e_i$ es convergente y deducimos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ es *ico*.

6. Sea X un espacio de Banach con base incondicional $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Sea $k > 0$ tal que si $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $A, B \in \Phi$ con $A \subset B$ se verifica que $\| \sum_{i \in A} \alpha_i e_i \| \leq k \| \sum_{i \in B} \alpha_i e_i \|$. Para cada sucesión $d = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{1, -1\}$, consideremos la aplicación $R_d : X \to X$ definida por

$$R_d \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i a_i e_i.$$

Es claro que R_d es lineal y es sencillo comprobar que

$$\|R_d \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) \| \leq 2k \, \| \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \|.$$

Así pues, R_d es continuo. Como $\|R_d(x)\| \leq 2k \|x\|$, independientemente de la sucesión $d = (d_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{1, -1\}$, podemos deducir, del principio de la acotación uniforme, que existe $M > 0$ tal que $\|R_d\| \leq M$ para cada sucesión $d = (d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{1, -1\}$. A la constante M se le suele denominar **constante básica incondicional** de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Demostraremos ahora que para cada sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ converge y cada sucesión acotada $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, se verifica que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i\| \leq 2k\|\lambda\| \, \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\|.$$

En efecto, tenemos que existe una aplicación $f : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua con $\|f\| = 1$ y tal que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i\| = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i||f(a_i e_i)| \leq \|\lambda\| \sum_{i=1}^{\infty} |f(a_i e_i)|.$$

Si ahora es $A_1 = \{i \in \mathbb{N} : f(a_i l_i) \geq 0\}$ y $A_2 = \mathbb{N} - A_1$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i\| &\leq \|\lambda\|\left(|\sum_{i\in A_1} f(a_i e_i) - \sum_{i\in A_2} f(a_i e_i)|\right) \\
&\leq \|\lambda\||f(\sum_{i\in A_1} a_i e_i) - f(\sum_{i\in A_2} a_i e_i)| \\
&\leq \|\lambda\| \left(\|\sum_{i\in A_1} a_i e_i\| + \|\sum_{i\in A_2} a_i e_i\|\right) \leq \|\lambda\| 2k \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\|.
\end{aligned}$$

Observemos que si fijamos $\lambda \in l_\infty$ y definimos $T_\lambda : X \to X$ por $T_\lambda \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i$ tenemos que $\|T_\lambda(x)\| \leq 2k\|\lambda\| \, \|x\|$. Así pues, T_λ es lineal y continua con $\|T_\lambda\| \leq 2k\|\lambda\|$. Si definimos $T : l_\infty \to C\mathcal{L}(X)$ por $T(\lambda) = T_\lambda$, tenemos que T es lineal y continua con $\|T\| \leq 2k$.

Si fijamos $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$, podemos considerar $T_x : l_\infty \to X$ definida por $T_x(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es *ico*, sabemos que $A_x = \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i x_i : \lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in B_{l_\infty}\}$ es compacto y, por tanto, existe $M_x > 0$ tal que para cada $\lambda \in l_\infty$ se verifica $\|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\|\lambda\|} a_i x_i\| \leq M_x$. Así pues, $\|T_x(\lambda)\| \leq M_x\|\lambda\|$. También sabemos que $\|T_x(\lambda)\| \leq 2k\|x\| \, \|\lambda\|$, por lo que tenemos que $\|T_x\| \leq 2k\|x\|$. Si consideramos $T : X \to C\mathcal{L}(l_\infty, X)$ definida por $T(x) = T_x$, tenemos que $\|T(x)\| \leq 2k\|x\|$; así pues $\|T\| \leq 2k$.

Finalmente, sea $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = x \in X$ y consideremos una sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, de escalares con $|b_i| \leq |a_i|$ si $i \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i$ es convergente y sea $\lambda_i = \frac{b_i}{a_i}$ si $a_i \neq 0$, $\lambda_i = 0$ si $a_i = 0$ (será $b_i = 0$). Entonces,

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i e_i\| = \|\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i\| \leq 2k\|\lambda\| \, \|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\| \leq 2k\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\|.$$

Vamos ahora a definir una norma $|\cdot|$ en X equivalente a la original $\|\cdot\|$: para $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ sea $|x| = \sup\{\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i\| : |b_i| \leq |a_i| \text{ si } i \in \mathbb{N}\}$. Es claro que $\|x\| \leq |x| \leq 2k\|x\|$; así pues, $|\cdot|$ es equivalente a $\|\cdot\|$.

TEOREMA 12.5.7 *Sea X un espacio de Banach con base incondicional $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una base acotadamente completa se verifica que X tiene copia de c_0.*

DEMOSTRACIÓN Consideremos en X la norma definida en cada $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ por $|x| = \sup\{\|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i e_i\| : \varepsilon_i = \pm 1 \text{ si } i \in \mathbb{N}\}$. Como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es acotadamente completa, existe una serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ que no es convergente pero es tal que existe $H > 0$ con $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\sum_{i=1}^{n} a_i e_i| < H$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ no verifica la condición de Cauchy, existe $\varepsilon > 0$ de modo que para cada n existe $m > n$ tal que $|\sum_{i=n+1}^{m} a_i e_i| > \varepsilon$. Para $n_1 = 1$ existe $m_1 > n_1$ tal que $|\sum_{i=n_1+1}^{m_1} a_i e_1| > \varepsilon$. Para $n_2 = m_1$ existe $m_2 > n_2$ tal que $|\sum_{n_2+1}^{m_2} a_i e_i| > \varepsilon$. Razonando inductivamente obtenemos una sucesiones crecientes de enteros $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, (m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que si $k \in \mathbb{N}$ es $n_k < m_k = n_{k+1}$ y $|\sum_{n_k+1}^{m_k} a_i e_i| > \varepsilon$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $z_k = \sum_{n_k+1}^{m_k} a_i e_i$. Es claro que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica. Además, $\inf \|z_k\| > \varepsilon$. Por tanto, si probamos que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es wiCa quedará probado que X tiene copia de c_0. Sea $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de escalares y sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i| = |\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| z_i| \leq \sup_{i\in\{1,\dots,n\}} |\alpha_i| \, |\sum_{i=1}^{n} z_i| \leq H \sup_{i \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq H\alpha.$$

Como esta acotación es independiente de $n \in \mathbb{N}$, queda probado que $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de c_0 y también que $\sum_{i=1}^{\infty} z_i$ es wiCa. ∎

TEOREMA 12.5.8 *Sea X un espacio de Banach con base incondicional $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces si $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es sh se verifica que X tiene copia de l_1.*

DEMOSTRACIÓN Supongamos que X está dotado de la misma norma que en el teorema anterior. Como $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es sh, existirá $f \in X^*$ de modo que no sea cierto que $\lim_{n\to\infty} \|f\|_n = 0$. Podemos suponer que f es real y que $\|f\| = 1$. Existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente de enteros $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $\sup\{|f(x)| : x = \sum_{i>n_k} \alpha_i e_i, |x| = 1\} > \varepsilon$.

Para $m_1 = n_1$ existe $z_1 = \sum_{i>m_1} \alpha_i^{1)} e_i$ con $|z_1| = 1$ tal que $f(z_1) > \varepsilon$. De la convergencia de $\sum_{i>m_1} \alpha_i^{1)} e_i$ deducimos que existe $m_1' > n_1$ de modo que $|\sum_{i>m_1'} \alpha_i^{1)} e_i| < \varepsilon/2$. Así pues, para $x_1 = \sum_{i>m_1}^{m_1'} \alpha_i^{1)} e_i$ tenemos que $f(x_1) \geq f(z_1) - f(\sum_{i>m_1'} \alpha_i^{1)} e_i) \geq \varepsilon/2$ y

$$|x_1| = |z_1 - \sum_{i>m_1'} \alpha_i^{1)} e_i| \geq 1 - \varepsilon/2.$$

Existe cierto n_k tal que $n_k > m_1'$ y para $m_2 = n_k$ existe $z_2 = \sum_{i>m_2} \alpha_i^{2)} e_i$ tal que $f(z_2) > \varepsilon$. De la convergencia de $\sum_{i>m_2} \alpha_i^{2)} e_i$ deducimos que existe $m_2' > m_2$ tal que $|\sum_{i>m_2'} \alpha_i^{2)} e_i| < \varepsilon/2$. Así pues, para $x_2 = \sum_{i>m_2}^{m_2'} \alpha_i^{2)} e_i$ tenemos que $f(x_2) \geq \varepsilon/2$ y $|x_2| > 1 - \varepsilon/2$.

Razonando inductivamente determinaremos dos sucesiones crecientes de enteros (m_k) y (m_k') de modo que $m_k < m_k' < m_{k+1}$ y una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n = \sum_{i>m_n}^{m_n'} \alpha_i^{n)} e_i$ y $f(x_n) > \varepsilon/2$ y $|x_n| > 1 - \varepsilon/2$. Es claro que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es básica, ya que es una sucesión bloque de una subsucesión de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Si $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i| = |\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| x_i| \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| f(x_i) \geq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Esto prueba que la sucesión básica (x_n) es equivalente a la base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de l_1. ∎

TEOREMA 12.5.9 **[Teorema de James]**

Sea X un espacio de Banach con base incondicional $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces X es reflexivo si y sólo si X no contiene copia de l_1 y no contiene copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN Es claro que si X es reflexivo no puede contener copia de c_0 ni de l_1. Por otra parte, si X tiene una base incondicional $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y no tiene copia de c_0 entonces $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ será acotadamente completa y, como X tampoco tiene copia de l_1, será $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base sh; así pues, X será reflexivo. ∎

Tema 13

Espectro y aplicaciones compactas

13.1 El espectro de un operador

Sea X un espacio normado y consideremos en el espacio vectorial $C\mathcal{L}(X)$ la operación $A \circ B$, composición de aplicaciones, que denotaremos simplemente por AB. Es claro que si $A, B, C \in C\mathcal{L}(X)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces:

i) $A(BC) = (AB)C$;

ii) $A(B + C) = AB + AC$;

iii) $(B + C)A = BA + CA$;

iv) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$;

v) $AI = A$, donde I es la identidad;

vi) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$;

vii) $\|I\| = 1$.

Si Z es un espacio de Banach en el que está definida una operación interna, que suele denominarse multiplicación, y se verifican estas siete propiedades que tiene la composición en $C\mathcal{L}(X)$ se dice que Z es un **álgebra de Banach con unidad.**

Si $A \in C\mathcal{L}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$ denotamos $A^n = A \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} A$ y $A^0 = I$ (la identidad).

DEFINICIÓN 13.1.1 *Se dice que $A \in C\mathcal{L}(X)$ es* ***invertible*** *si existe $B \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $AB = BA = I$, es decir si A es isomorfismo de X sobre X (en esta situación a la inversa B se la denota por A^{-1} y claramente es única).*

Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un ***valor espectral*** *de $A \in C\mathcal{L}(X)$ si $A - \lambda I$ no es invertible. Se llama* ***espectro*** *de A a*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda I \textit{ no es invertible}\}$$

y se llama ***resolvente*** *de A a $\rho(A) = \mathbb{K} \setminus \sigma(A)$. Por tanto,*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : A - \lambda I \textit{ es invertible}\}.$$

Obsérvese que $A - \lambda I$ es invertible si y sólo si $\lambda I - A$ es invertible; en ocasiones a estas aplicaciones las denotaremos simplemente por $A - \lambda$ o $\lambda - A$.

Teorema 13.1.2 **(Desarrollos de Neumann)**
Sea X un espacio de Banach y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$

i) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\|A\| < |\lambda|$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y

$$(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n, \qquad \|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

ii) Si A invertible y si $B \in C\mathcal{L}(X)$ es tal que $\|B - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces B es invertible. Si $\|B - A\| < \dfrac{\epsilon}{\|A^{-1}\|}$ con $\epsilon < 1$ se verifica que

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2 \frac{\|B - A\|}{1 - \epsilon}.$$

Demostración i) Consideremos $B = \dfrac{1}{\lambda} A$; tenemos que $\|B\| = \dfrac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1$. Recordemos que entonces $B - I$ tiene inversa y es $(B - I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} B^n$. Multiplicando por λ, deducimos que $A - \lambda I$ tiene inversa y que $(A - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$. Además, $\|(I - B)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = \dfrac{1}{1 - \|B\|}$; por tanto $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.

ii) La primera afirmación ya se probó para una situación más general como es $C\mathcal{L}(X, Y)$. Por otra parte, si A y B son invertibles y $\|B - A\| < \dfrac{\epsilon}{\|A^{-1}\|}$, $\epsilon < 1$, tenemos que

$$\|B^{-1}\| - \|A^{-1}\| \leq \|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A - B)A^{-1}\| \leq \epsilon \|B^{-1}\|.$$

Por tanto $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1-\epsilon}$ y

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \, \|A - B\| \, \|A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|^2 \frac{\|B - A\|}{1-\epsilon}.$$

■

TEOREMA 13.1.3 *Sea X un espacio de Banach:*

a) Si $A \in C\mathcal{L}(X)$ entonces $\sigma(A)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}$.

b) Si $Inv(X)$ es el conjunto de los elementos invertibles de $C\mathcal{L}(X)$ entonces $Inv(X)$ es abierto en $C\mathcal{L}(X)$ y la aplicación $\varphi : Inv(X) \to Inv(X)$, $\varphi(A) = A^{-1}$ es continua.

DEMOSTRACIÓN

a) Como consecuencia del teorema anterior tenemos que $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|A\|\}$, por lo que $\sigma(A)$ es acotado. Si $A - \lambda I$ es invertible y λ' es tal que $|\lambda - \lambda'| < \dfrac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|}$ tenemos que

$$\|(A - \lambda' I) - (A - \lambda I)\| = |\lambda - \lambda'| < \frac{1}{\|(A - \lambda I)^{-1}\|},$$

por lo que $(A - \lambda' I)$ es invertible. Esto prueba que $\rho(A)$ es abierto y, por tanto, $\sigma(A)$ será compacto, por ser cerrado y acotado.

b) Es claro que $Inv(X)$ es un subconjunto abierto de $C\mathcal{L}(X)$: dados $A \in Inv(X)$ y $\epsilon > 0$ tenemos que si $\|B - A\| < \dfrac{r}{\|A^{-1}\|}$ y $r < 1$ se verifica que B es invertible. Consideremos $r < \dfrac{\epsilon}{\epsilon + \|A^{-1}\|}$, $r > 0$, entonces si $\delta = \dfrac{r}{\|A^{-1}\|}$ y $\|A - B\| < \delta$ será

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| < \frac{\|A^{-1}\|^2 \|A - B\|}{1 - r} < \frac{\|A^{-1}\|^2 \frac{r}{\|A^{-1}\|}}{1 - r} = \frac{\|A^{-1}\| r}{1 - r} < \epsilon.$$

■

NOTA 13.4 Sea X un espacio de Banach

a) Sabemos que si $A \in C\mathcal{L}(X)$ es invertible y $A' \in C\mathcal{L}(X)$ es tal que $\|A' - A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ entonces A' es invertible. Así pues, si $\lambda \in \rho(A)$ y $\mu \in \mathbb{K}$ es tal que $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|(\lambda - A)^{-1}\|}$ entonces $|(\lambda - A) - (\mu - A)| = |\lambda - \mu|$ y será $\mu \in \rho(A)$.

Para $\lambda \in \mathbb{K}$ denotamos $d(\lambda) = dis(\lambda, \sigma(A))$, observemos que si $\lambda \in \rho(A)$ y $\mu \in \mathbb{K}$ es tal que $|\mu| < \dfrac{1}{\|(\lambda - A)^{-1}\|}$ entonces $\lambda + \mu \in \rho(A)$ y por tanto será $d(\lambda) \geq \dfrac{1}{\|(\lambda - A)^{-1}\|}$.

b) En lo que sigue, si $\lambda \in \rho(A)$, denotaremos por $R(\lambda, A)$ a $(\lambda - A)^{-1}$ (o bien por $R(\lambda)$ si no hay confusión). Sabemos que $R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$ si $|\lambda| > \|A\|$. Demostraremos que

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu).$$

Esta expresión es conocida como **ecuación de la resolvente**. En efecto,

$$\begin{aligned} (\mu - A)(\lambda - A)(R(\lambda) - R(\mu)) &= (\mu - A)(\lambda - A)R(\lambda) - (\mu - A)(\lambda - A)R(\mu) \\ &= (\mu - A) - (\lambda - A) = (\mu - \lambda)I. \end{aligned}$$

y deducimos que $R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$.

c) Si $A \in C\mathcal{L}(X)$ y $\lambda \in \rho(A)$ entonces $R(\lambda, A)(\lambda, A) = I$ y por tanto

$$(\lambda - A^*) R(\lambda, A)^* = I.$$

Deducimos que $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^*$ y $\lambda \in \rho(A^*)$. Si $\lambda \in \rho(A^*)$ tenemos que $\lambda - A^*$ es la aplicación dual de $\lambda - A$ y, como $\lambda - A^*$ es invertible, es sencillo ver que $\lambda - A$ es invertible. Deducimos que $\rho(A) = \rho(A^*)$ y por tanto $\sigma(A) = \sigma(A^*)$.

d) Sea X un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces, la aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ definida por $\varphi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ es sesquilineal y continua. Se deduce que existe una única $T' \in C\mathcal{L}(X)$ tal que para cada $x, y \in X$ es

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T'y \rangle.$$

Se dice entonces que T' es la **adjunta** de T. La aplicación $F : C\mathcal{L}(X) \to C\mathcal{L}(X)$ definida por $F(A) = A'$ verifica las propiedades $F(A + B) = F(A) + F(B)$, $F(\alpha A) = \overline{\alpha} F(A)$, $F(AB) = F(B)F(A)$ y $F(F(A)) = A$. Una aplicación con estas características se dice que es una **involución.**

Demostraremos algunas de las propiedades:

- $\langle \alpha A x, y \rangle = \alpha \langle Ax, y \rangle = \alpha \langle x, A'y \rangle = \langle x, \overline{\alpha} A'y \rangle$;
- $\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A'y \rangle = \langle x, B'A'y \rangle$;
- $\langle Ax, y \rangle = \overline{\langle A'y, x \rangle} = \overline{\langle y, A''x \rangle} = \langle A''x, y \rangle$.
- Por otra parte $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A'Ax, x \rangle \leq \|A'A\| \, \|x\|^2$ y se deduce que $\|A\|^2 \leq \|A'A\|$ pero $\|A'A\| \leq \|A'\| \, \|A\| = \|A\|^2$; por lo que $\|A'A\| = \|A\|^2$.

Observemos que si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $R(\lambda, A)(\lambda - A) = I$. Tomando adjuntos será $R(\lambda, A)'(\overline{\lambda} - A') = I$ así pues $\overline{\lambda} \in \rho(A')$, por este motivo si $\lambda \in \rho(A')$ será $\overline{\lambda} \in \rho(A'') = \rho(A)$ y deducimos que $\rho(A')$ es el conjugado de $(\rho(A))$ y que $\sigma(A')$ es el conjugado de $(\sigma(A))$.

∎

TEOREMA 13.1.5 **[Teorema de Gelfand-Mazur (1.941)]**
Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $A \neq 0$ entonces:

a) $\sigma(A)$ no es vacío;

b) (Fórmula del radio espectral) La sucesión $\{\|A^n\|^{1/n}\}_n$ es convergente y

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

DEMOSTRACIÓN
a) Sea $f : C\mathcal{L}(X) \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua. Si $\lambda \in \rho(A)$ definimos $w(\lambda) = f((\lambda - A)^{-1})$. En $\rho(A)$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda' \to \lambda} \frac{w(\lambda') - w(\lambda)}{\lambda' - \lambda} &= \lim_{\lambda' \to \lambda} f\left(\frac{(\lambda' - A)^{-1} - (\lambda - A)^{-1}}{\lambda' - \lambda}\right) \\
&= \lim_{\lambda' \to \lambda} f\left(\frac{(\lambda - \lambda')(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}}{\lambda' - \lambda}\right) \\
&= -\lim_{\lambda' \to \lambda} f((\lambda' - A)^{-1}(\lambda - A)^{-1}) = -f((\lambda - A)^{-2}).
\end{aligned}$$

Si fuese $\rho(A) = \mathbb{C}$ sería $w(\lambda)$ analítica en $\mathbb{C}$ y si $\lambda \neq 0$ se cumpliría $(\lambda - A)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}A)^{-1}$. Como $\left\{\left\|\left(I - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}\right\| : |\lambda| > 1\right\}$ es acotado y como $\dfrac{1}{\lambda} \to 0$ si $|\lambda| \to \infty$, se tendría $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} (\lambda - A)^{-1} = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} w(\lambda) = 0$; entonces **$w$ estaría acotada en $\mathbb{C}$. Por el teorema de Liouville tiene que ser constante en $\mathbb{C}$.** Entonces está claro que $w(\lambda) = 0$ si $\lambda \in \mathbb{C}$. Pero si $f \in (C\mathcal{L}(X))^*$ es escogido de modo que $f(-A^{-1}) = \|A^{-1}\|$, deducimos que $w(0) = f(-A^{-1}) = \|A^{-1}\| = 0$ lo que es absurdo. Esto prueba que $\rho(A) \neq \mathbb{C}$ y por tanto $\sigma(A) \neq \emptyset$.

b) Se define el radio espectral por

$$r(A) = max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Probaremos que $r(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Si $|\lambda| > \|A\|$ tenemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n = R(\lambda)$ y además $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|A^n\|$ es convergente. El radio de convergencia de esta serie se calcula por la condición de que el siguiente límite sea menor que 1, $\displaystyle\limsup \sqrt[n]{\frac{\|A^n\|}{|\lambda|^{n+1}}} = \limsup \frac{1}{|\lambda|} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Entonces, si $l = \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$ tenemos que, para $|\lambda| > l$, se verifica que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|A^n\|$ es convergente y $\lambda \in \rho(A)$. Así pues, si $\lambda \in \sigma(A)$, se cumple $|\lambda| \leq l$ y será $r(A) \leq \limsup \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Bastará entonces con probar que $\liminf \sqrt[n]{\|A^n\|} \leq r(A)$.

Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ es $\rho(A^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \rho(A)\}$. En efecto, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son las raíces del polinomio $t^n - \lambda$ es sencillo comprobar que

$$A^n - \lambda I = (A - \lambda_1 I) \ldots (A - \lambda_n I).$$

Por tanto, $A^n - \lambda I$ es invertible si y sólo si $A - \lambda_j I$ es invertible, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Así pues $\lambda \in \sigma(A)$ si y sólo si $\lambda^n \in \sigma(A^n)$ y será $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$; es decir $|\lambda| \leq \sqrt[n]{\|A^n\|}$. Por tanto $r(A) \leq \liminf \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$. ∎

Observemos que el teorema de Gelfand-Mazur, y la fórmula del radio espectral, no son ciertas si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. En efecto, sea $X = \mathbb{R}^2$ y $t \in [0, 2\pi)$, sea $A_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$A_t(x(1), x(2)) = (x(1)\cos t - x(2) \operatorname{sen} t, x(1) \operatorname{sen} t + x(2) \cos t).$$

Entonces, si $t \neq 0$ y $t \neq \pi$ se verifica que $\sigma(A_t) = \emptyset$ y $\|A_t^n\| = 1$.

13.2 Partición del espectro

Sea X un espacio de Banach y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Vamos a establecer la siguiente partición del espectro $\sigma(A)$ de A.

a) $\sigma_p(A)$, el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que existe $x \in X \setminus \{0\}$ con $Ax = \lambda x$. También puede definirse como el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda - A$ no es inyectiva. Este conjunto es denominado **espectro puntual** de A, sus elementos son denominados **autovalores** de A. Si λ es autovalor de A, el espacio $\ker(\lambda - A)$ se denomina **autoespacio** correspondiente al autovalor λ. A los elementos no nulos de $\ker(\lambda - A)$ se les denomina **autovectores** correspondientes al autovalor λ. Observemos que si X es de dimensión finita es $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.

b) $\sigma_c(A)$, el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $\lambda - A$ es inyectiva, pero no es sobreyectiva e $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ es densa en X. Este conjunto se denomina **espectro continuo** de A.

c) $\sigma_r(A)$, el conjunto de los $\lambda \in \sigma(A)$ tales que $\lambda - A$ es inyectiva pero $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ no es densa en X. Este conjunto es denominado **espectro residual** de A.

Antes de continuar recordaremos algunos resultados elementales:

Si $\operatorname{Im} A$ es densa entonces A^* es inyectiva. En efecto, sea $x^* \in \ker A^*$; se verifica $A^* x^* = 0$ y, por tanto, si $x \in X$ se tiene $A^* x^*(x) = x^*(Ax) = 0$, por lo que $x^* = 0$. Supongamos ahora que A^* es inyectiva, probaremos que $\operatorname{Im} A$ es densa. En efecto, si $\overline{\operatorname{Im} A} \neq X$ existirá $y^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $y^*(\operatorname{Im} A) = 0$ entonces $y^* \in \ker A^*$ y A^* no sería inyectiva.

Recordemos que $M \subset X^*$ es un conjunto $*$-w denso en X^* si separa los puntos de X. *Supongamos que A es inyectiva; probaremos que $\operatorname{Im} A^*$ es $*$-w denso en X^*.* En efecto, si $x \neq y$ se tiene $Ax \neq Ay$ y existirá $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(Ax) \neq y^*(Ay)$, por lo que $A^*y^*(x) \neq A^*y^*(y)$ e $\operatorname{Im} A^*$ es $*$-w denso en X^*. Por otra parte, si $\operatorname{Im} A^*$ es $*$-w denso en X^* entonces separa los puntos de X. Por tanto, si $x \neq y$ existirá $A^*x^* \in \operatorname{Im} A^*$ tal que $A^*x^*(x) \neq A^*x^*(y)$. Así pues, $x^*(Ax) \neq x^*(Ay)$ y $Ax \neq Ay$. Utilizando estos resultados obtenemos para $A \in C\mathcal{L}(X)$ las siguientes conclusiones:

i) Si $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \lambda - A$ no es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ no es $*$-w densa $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ no es densa $\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_c(A^*)$.

ii) Si $\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow$
- $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ densa en $X \Leftrightarrow \lambda - A^*$ inyectiva $\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_p(A^*)$
- $(\lambda - A)$ inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ es $*$-w densa en X^*

iii) Si $\lambda \in \sigma_r(A) \Leftrightarrow$
- $(\lambda - A)$ inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ es $*$-w densa
- $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ no densa en $X \Leftrightarrow \lambda - A^*$ no inyectiva $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma_p(A^*)$

Por tanto $\sigma_r(A) \subset \sigma_p(A^*)$.

iv) Si $\lambda \in \sigma_p(A^*) \Leftrightarrow \lambda - A^*$ no es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A)$ no es densa en $X \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_c(A)$.

v) Si $\lambda \in \sigma_r(A^*)$ entonces $\lambda - A^*$ es inyectiva y será $\operatorname{Im}(\lambda - A)$ denso en X. Así pues, $\lambda \notin \sigma_r(A)$. Además $\operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ no es densa en X^*. Observemos que bien podría ser $\operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ $*$-w densa.

Si X es reflexivo tenemos que $\lambda - A^{**}$ no es inyectiva, es decir $\lambda - A$ no es inyectiva. Por tanto $\lambda \in \sigma_p(A)$. Así pues, *si X es reflexivo es $\sigma_c(A^*) \subset \sigma_p(A)$.*

vi) $\lambda \in \sigma_c(A^*) \Leftrightarrow$
- $\lambda - A^*$ es inyectiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\lambda - A)$ densa en $X \Leftrightarrow \lambda \notin \sigma_r(A)$
- $\operatorname{Im}(\lambda - A^*)$ es densa en X^* por tanto es $*$-w densa en $X^* \Leftrightarrow \lambda - A$ es inyectiva y deducimos que $\lambda \notin \sigma_p(A)$ y $\lambda \in \sigma_r(A)$

Por tanto $\sigma_c(A^*) \subset \sigma_c(A)$.

Veamos ahora un *ejemplo en el que $\sigma_p(A)$ sea vacío.* Sea $A : l_2 \longrightarrow l_2$ la aplicación definida por $A((a_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ donde $b_1 = 0$ y $b_i = a_{i-1}$ si $i > 1$. Es claro que $\|Aa\| = \|a\|$. Si $a \in l_2$ es tal que $Aa = \lambda a$, entonces para cada $i > 1$ se verifica $a_{i-1} = \lambda a_i$ y también $\|\lambda a\| = \|a\|$. Así pues, si $a \neq 0$ será $\lambda = 1$ y a será una sucesión constante no nula. Esto contradice que $\lim\limits_{i\to+\infty} a_i = 0$.

Recordemos que si $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son autovectores que se corresponden con autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A entonces $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es libre. Vamos a demostrarlo por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$ ésto es evidente. Suponemos que es cierto para $n - 1$. Sean $x_1, \cdots, x_n$ autovectores que se corresponden con autovalores distintos $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Si $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ tenemos que

$$A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n = 0.$$

Como $\lambda_1 \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n x_n = 0$, deducimos que $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1} = 0$. Por tanto $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ y también será $\alpha_n = 0$.

Se define el **espectro aproximado**, $\sigma_a(A)$, de $A \in C\mathcal{L}(X)$ como el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S_X$ con $\lim(Ax_n - \lambda x_n) = 0$. En este caso a λ se le denomina **casi-autovalor** y a la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le denomina **sucesión de casi-autovectores** asociada al casi-autovalor λ.

Finalmente, si $\lambda \notin \sigma(A)$ y $x \in S_X$ se verifica

$$1 = \|x\| = \|(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A)(x)\| \leq \|(\lambda - A)^{-1}\| \, \|\lambda x - Ax\|.$$

Así pues, $\lambda \notin \sigma_a(A)$ y deducimos que $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$.

TEOREMA 13.2.1 *Sea X un espacio de Banach y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Se verifica que $\sigma_a(A)$ es un subconjunto cerrado de $\sigma(A)$ y $\sigma_a(A) \supset Fr(\sigma(A)) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.*

DEMOSTRACIÓN En primer lugar demostraremos que $\sigma_a(A)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{K}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $x_n \in S_X$ tal que $\|(\lambda - A)(x_n)\| \leq \frac{1}{n}$, tendremos que $\lambda \in \sigma_a(A)$. Así pues, si $\lambda \notin \sigma_a(A)$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in S_X$, se verifica $\|(\lambda - A)(x)\| > \frac{1}{m}$. Por tanto, si $\mu \in U(\lambda; \frac{1}{2m})$ y $x \in S_X$, se tiene

$$\|(\mu - A)x\| = \|(\mu - \lambda)x + (\lambda - A)(x)\| \geq \|(\lambda - A)x\| - \|(\mu - \lambda)x\| > \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m}.$$

Por consiguiente, $\mu \notin \sigma_a(A)$ y, por ser $\sigma(A)$ compacto, queda probado que $\sigma_a(A)$ es un subconjunto cerrado de $\sigma(A)$.

Veamos ahora que $Fr(\sigma(A)) \subset \sigma_a(A)$. Sea $\lambda_0 \in Fr(\sigma(A))$ y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $x \in S_X$ tal que $\|\lambda_0 x - Ax\| < \varepsilon$ y por tanto $\lambda_0 \in \sigma_a(A)$. En efecto, tenemos que existe $\lambda \notin \sigma(A)$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(\lambda) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sabemos que $\|(\lambda - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{d(\lambda)} \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Por tanto, existe $y \in S_X$ tal que $\|(\lambda - A)^{-1}y\| \geq \frac{2}{\varepsilon}$. Sea $x = \frac{(\lambda - A)^{-1}y}{\|(\lambda - A)^{-1}y\|}$. Entonces, $\|x\| = 1$ y observemos que $\|(\lambda - A)(x)\| = \frac{\|y\|}{\|(\lambda - A)^{-1}y\|} < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, $\|(\lambda_0 - A)x - (\lambda - A)x\| = |\lambda_0 - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$, por lo que

$$\|(\lambda_0 - A)x\| = \|(\lambda_0 - A)x - (\lambda - A)x + (\lambda - A)x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|(\lambda - A)x\| < \varepsilon.$$

Por otra parte es claro que $\sigma_p(A) \subset \sigma_a(A)$.

Si $\lambda \in \sigma(A)$ pero $\lambda \notin \sigma_a(A)$ tenemos que existirá $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ se cumple $\|(\lambda - A)x\| \geq \delta\|x\|$. Si fuese $(\lambda - A)x = 0$ sería $x = 0$ y por tanto $\lambda - A$ sería inyectiva.

Veremos ahora que $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ es cerrado. En efecto, supongamos que $\lim(\lambda - A)(x_n) = y$. Por ser $((\lambda - A)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy deducimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y existirá $x \in X$ tal que $\lim x_n = x$. Por consiguiente, $\lim(\lambda - A)(x_n) = (\lambda - A)(x)$ y será $(\lambda - A)(x) = y$, por lo que $y \in \mathrm{Im}(\lambda - A)$, $\mathrm{Im}(\lambda - A)$ no es densa y $\lambda \notin \sigma_c(A)$. Queda así probado que $\sigma_c(A) \subset \sigma_a(A)$. ∎

TEOREMA 13.2.2 *Sea X un espacio reflexivo y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Sea $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \in \sigma_a(A)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ cualquier sucesión de casi-autovectores para λ. Entonces:*

i) o bien λ no es autovalor y $w\lim x_n = 0$;

ii) o bien λ es autovalor y cada elemento no nulo de débil acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es autovector para λ.

DEMOSTRACIÓN Por ser X reflexivo sabemos que existe alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es débil convergente. Si es falso que $w\lim x_n = 0$ tenemos que existirá alguna subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w\lim\limits_k x_{n_k} = z$ y $z \neq 0$. Entonces, $w\lim\limits_k Ax_{n_k} = Az$ pero también $w\lim\limits_k(Ax_{n_k} - \lambda x_{n_k}) = 0$. Así pues, restando, tenemos que $w\lim \lambda x_{n_k} = Az$ pero $w\lim \lambda x_{n_k} = \lambda z$. Por tanto, $Az = \lambda z$; así pues, λ es un autovalor y z es un autovector asociado a λ. Si λ no fuese autovalor tenemos que será $w\lim(x_n) = 0$. ∎

TEOREMA 13.2.3 *Supongamos que X es un espacio de Hilbert, $A \in C\mathcal{L}(X)$ y que $\lambda \in \sigma_a(A)$. Si λ no es autovalor entonces existe una sucesión ortonormal de casi-autovectores para λ.*

DEMOSTRACIÓN Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ una sucesión de casi-autovectores para λ. Tenemos que $w\lim(x_n) = 0$. Sea $Z = \overline{\mathcal{L}(x_n)}$ y sea $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortogonal de Z. Para cada $i \in \mathbb{N}$, se verifica $x_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i(n)w_n$, donde $a_i(n) = \langle x_i, w_n\rangle$. Dado $\varepsilon > 0$, para x_1 existirá $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_1 - \sum\limits_{j=1}^{m_1} a_1(j)w_j\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Denotamos $n_1 = 1$ y $z_1 = \sum\limits_{j=1}^{m_1} a_1(j)w_j$ y consideramos

$$f_{w_1} \cdots f_{w_{m_1}} (f_{w_j}(x) = \langle x, w_j\rangle).$$

Como $\lim\limits_n f_{w_1}(x_n) = 0, \ldots, \lim\limits_n f_{w_{m_1}}(x_n) = 0$, existe algún $n_2 > n_1$ tal que

$$|f_{w_1}(x_{n_2})| + \cdots + |f_{w_{m_1}}(x_{n_2})| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Es decir, tal que $|a_{n_2}(1)| + \cdots + |a_{n_2}(m_1)| < \frac{\varepsilon}{8}$. Para $x_{n_2} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_2}(j)w_j$, existirá $m_2 > m_1$ tal que $\|x_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_2} a_{n_2}(j)w_j\| < \frac{\varepsilon}{8}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|x_{n_2} - \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_{n_2}(j)w_j\| &= \|x_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_2} a_{n_2}(j)w_j + \sum_{j=1}^{m_1} a_{n_2}(j)w_j\| \\
&\leq \|x_{n_2} - \sum_{j=1}^{m_2} a_{n_2}(j)w_j\| + |a_{n_2}(1)| + \cdots + |a_{n_2}(m_1)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Si denotamos $z_2 = \sum_{j=m_1+1}^{m_2} a_{n_2}(j)w_j$ y continuamos de la misma forma, obtendríamos una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de vectores $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de soporte finito en $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y disjunto (es decir, $\langle z_i, z_j\rangle = 0$ si $i \neq j$) de manera que $\|x_{n_k} - z_k\| < \frac{\varepsilon}{2k}$. Como para cada $k \in \mathbb{N}$ se verifica

$$\|\lambda z_k - Az_k\| \leq \|\lambda z_k - \lambda x_{n_k}\| + \|\lambda x_{n_k} - Ax_{n_k}\| + \|A(x_{n_k} - z_k)\|,$$

deducimos que $\lim(\lambda z_k - Az_k) = 0$ y $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\|z_k\| \leq \|x_{n_k}\| + \|z_k - x_{n_k}\| \leq 2. \qquad \|z_k\| \geq \|x_{n_k}\| - \|z_k - x_{n_k}\| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2k} \geq \frac{1}{2}.$$

Así pues, $\left(\frac{1}{\|z_k\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y deducimos que $\lim_k \frac{1}{\|z_k\|}(\lambda z_k - Az_k) = 0$. Por tanto, si $y_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}$, para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal de casi-autovectores para λ. ∎

NOTA 13.2.4 Sea $A : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ la aplicación definida por $A(a) = b$ donde $b_n = a_{n+1}$ si $n \in \mathbb{Z}$. Se verifica que $\|A\| = 1$ y será $r(A) \leq 1$. Por tanto $\sigma(A) \subset D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Observemos que A es invertible y A^{-1} viene dado por $A^{-1}(a) = b$, donde $b_n = a_{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $\lambda - A$ es invertible también lo será $A^{-1}(\lambda - A)$. Recíprocamente, si $A^{-1}(\lambda - A)$ es invertible, también lo será $AA^{-1}(\lambda - A) = \lambda - A$. Por tanto $\lambda - A$ es invertible si y sólo si lo es $\lambda A^{-1} - I$. Recordemos que si $T \in C\mathcal{L}(X)$ es tal que $\|T\| < 1$ es $T - I$ invertible. Por tanto, si $\lambda < 1$ se verifica que $\lambda A^{-1} - I$ es invertible y también lo será $\lambda - A$, por lo que $\sigma(A) \subset S_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Demostraremos que $\sigma(A) = S_{\mathbb{C}}$. Consideremos, para $y = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y_k z_k$, la ecuación $(e^{i\theta} - A)x = y$, que podemos expresar, en cada $k \in \mathbb{Z}$, por $e^{i\theta}x_k - x_{k-1} = y_k$.

Observemos que entonces

$$\begin{aligned}&y_1+e^{i\theta}y_2+e^{i\theta 2}y_3+\cdots+e^{i\theta(k-1)}y_k\\&=e^{i\theta}x_1-x_0+e^{i\theta}(e^{i\theta}x_2-x_1)+e^{i\theta 2}(e^{i\theta}x_3-x_2)+\cdots+e^{i\theta(k-1)}(e^{i\theta}x_k-x_{k-1})\\&=e^{i\theta k}x_k-x_0.\end{aligned}$$

Podemos escoger y de manera que $y_k=\dfrac{e^{-i(k-1)\theta}}{k}$, ya que $\sum_{k\geq 1}|y_k|^2=\sum_{k\geq 1}\dfrac{1}{k^2}<\infty$.

Entonces se tendría que $y_1+e^{i\theta}y_2+\cdots+e^{i(k-1)\theta}y_k=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{k}$ y deducimos que $\lim_{k\to+\infty}|e^{i\theta k}x_k-x_0|=\infty$, lo que no es posible ya que $\lim_{k\to+\infty}|e^{i\theta k}x_k|=0$. Por tanto, para cada $\theta\in\mathbb{R}$ la ecuación $(e^{i\theta}-A)x=y$ no siempre tiene solución. Esto significa que $e^{i\theta}-A$ no es sobreyectiva y, por tanto, $\sigma(A)=S_{\mathbb{C}}$. En su momento se vio que $\sigma_p(A)=\emptyset$.

Consideremos la aplicación $A^*:l_2^*\to l_2^*$, donde $A^*((a_n)_{n\in\mathbb{N}}^*):l_2\to\mathbb{K}$, viene dada por $A^*((a_n)^*)(b_n)=(a_n)^*(A(b_n))=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_{n-1}\overline{a}_n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_n\overline{a_{n+1}}=(a_{n+1})^*$. Se tiene que A^* actúa de manera idéntica a A, ya que $l_2^*\cong l_2$. Por tanto se tiene $\sigma_p(A^*)=\emptyset$ y, como $\sigma_r(A)\subset\sigma_p(A^*)$, se verifica $\sigma_r(A)=\emptyset$. Así pues, $\sigma(A)=\sigma_c(A)\subset\sigma_a(A)\subset\sigma(A)$. Por tanto, $\sigma(A)=\sigma_c(A)=\sigma_a(A)$.

Observemos que A es una isometría sobreyectiva y, de manera análoga a lo hecho aquí, se podría probar que si $A\in C\mathcal{L}(X)$ es una isometría sobreyectiva entonces $\sigma(A)\subset S_{\mathbb{C}}$. No obstante, si A es isometría no sobreyectiva la cosa cambia.

TEOREMA 13.2.5 *Si $A\in C\,\mathcal{L}\,(X)$ es una isometría no sobreyectiva entonces $\sigma(A)=B_{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN Como $\|A\|=1$, $\sigma(A)\subset B_{\mathbb{C}}=U_{\mathbb{C}}\cup S_{\mathbb{C}}$. Si $\lambda\in U_{\mathbb{C}}$ se verifica $|\lambda|<1$ y $\|(\lambda-A)x\|\geq(1-|\lambda|)\|x\|$, por lo que $\lambda\notin\sigma_a(A)$; así pues, $Fr(\sigma(A))\cup\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\subset\sigma_a(A)\subset S_{\mathbb{C}}$ y tenemos que $Fr(\sigma(A))\subset S_{\mathbb{C}}$.

Por otra parte, es claro que $0\in\sigma(A)$ ya que A no es sobreyectiva. Como $0\notin Fr(\sigma(A))$, tenemos que $0\in Int(\sigma(A))$. Sea $B=\rho(A)\cap U$ que será abierto y disjunto con $Int(\sigma(A))$. Tenemos que $B\cup Int(\sigma(A))\subset U$. Si $\lambda\in U$ y $\lambda\notin B$, será $\lambda\in\sigma(A)\setminus Fr(\sigma(A))$. Así pues, $\lambda\in Int(\sigma(A))$ y se deduce que $U=B\cup Int(\sigma(A))$. Como U es abierto conexo (¡bendita topología!) uno de los dos abiertos es vacío; así pues, $B=\emptyset$ y, como $\sigma(A)$ es cerrado, se tiene que $\sigma(A)\supset \mathrm{cl}(U)=B_{\mathbb{C}}$. Así pues, $\sigma(A)=B_{\mathbb{C}}$ y deducimos que $Fr(\sigma(A))=S_{\mathbb{C}}=\sigma_a(A)$. ∎

13.3 Operadores compactos

DEFINICIÓN 13.3.1 *Sean X,Y dos espacios normados y sea $T:X\to Y$ una aplicación lineal. Se dice que T es compacta (o totalmente continua) si $\overline{T(B_X)}$ es compacto en Y. Se dice que T es precompacta si $T(B_X)$ es precompacto.*

Es claro que el que T sea compacta equivale a afirmar que para cada $A \subset X$ que sea acotado se verifica que $\overline{TA}$ es compacto y también equivale a que $\overline{T(B)}$ sea compacto para algún entorno B de cero en X.

Si T es compacta también será precompacta y si T es precompacta será continua. Si T es precompacta tenemos que $\operatorname{Im} T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT(B_X)$ y, como, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $nT(B_X)$ precompacto y por tanto separable, resulta que *el rango de T es separable.*

TEOREMA 13.3.2 *Sean X, Y espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal:*

(a) T es compacta si y sólo si para cada sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se verifica que $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente;

(b) Si Y es Banach y T es precompacta entonces T es compacta;

(c) Si $\operatorname{Im}T$ es finito dimensional entonces $\operatorname{Im}T$ es cerrado y T es compacta. Si X e Y son espacios de Banach y T es compacta con $\operatorname{Im}T$ cerrado entonces $\operatorname{Im}T$ es finito dimensional;

(d) Si T es compacta, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w\lim x_n = x$ se verifica que $\lim Tx_n = Tx$. El recíproco es cierto si X es reflexivo.

DEMOSTRACIÓN (a) Si T es compacta y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en X, existe $H > 0$ tal que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset HB_X$. Como $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{T(HB_X)}$, que es compacto, existe alguna subsucesión $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para la cual existe $\lim_k Tx_{n_k}$. Recíprocamente, para cada sucesión $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de TB_X se verifica que, al ser $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, existe alguna subsucesión $(Tx_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente; esto prueba que $\overline{TB_X}$ es compacto.

(b) Es claro ya que $\overline{T(B_X)}$ es compacto, por ser $T(B_X)$ precompacto y $\overline{T(B_X)}$ completo.

(c) Si $\operatorname{Im} T$ es finito dimensional entonces $\operatorname{Im} T$ cerrado y $\overline{T(B_X)}$ es un subconjunto cerrado y acotado de un espacio finito dimensional, por lo que es compacto.

Supongamos ahora que X e Y son dos espacios de Banach y que T es una aplicación compacta con $\operatorname{Im} T$ cerrado. Tenemos que $Z = \operatorname{Im} T$ será un espacio de Banach y que $T : X \to Z$ es continua y sobreyectiva. Por tanto T es abierta y existirá $\alpha > 0$ tal que $\alpha B_Z \subset T(B_X)$; como $\overline{T(B_X)}$ es compacto, B_Z también es compacto, lo que significa que Z es finito dimensional.

(d) Sean T compacta y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $w\lim x_n = x$. Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada y por tanto para cada subsucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe otra subsucesión $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a cierto $y \in X$. Como $w\lim_k Tx_{n_k} = Tx$ se tiene $Tx = y$ y esto prueba que $\lim Tx_n = Tx$.

Supongamos ahora que X es reflexivo y que $T : X \to Y$ es lineal tal que si $w\lim x_n = x$ entonces $\lim Tx_n = Tx$. Veamos que T es compacta. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada; entonces, como X es reflexivo, existe alguna subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $w\lim_k(x_{n_k}) = x$, por lo que $\lim Tx_{n_k} = Tx$.

Observemos que de este resultado no se debe deducir que si T es compacta entonces $T : (X, w) \to (Y, \| \|)$ es continua, ya que si esto sucediera se podría probar que $\operatorname{Im} T$ es finito dimensional. ∎

Sean X, Y dos espacios normados y sean $T_1, T_2 : X \to Y$ dos aplicaciones lineales compactas. Como $(T_1 + T_2)(B_X) \subset \overline{T_1(B_X)} + \overline{T_2(B_X)}$ es compacto resulta que $\overline{(T_1 + T_2)(B_X)}$ es también compacto, y deducimos que $T_1 + T_2$ es compacto. De manera similar, si $\alpha \in \mathbb{K}$, se prueba que αT_1 es compacta.

Supongamos ahora que Z es otro espacio normado y que $T : X \to Y$ es una aplicación compacta y que $S : Y \to Z$ es una aplicación lineal continua. Consideremos $ST : X \to Z$. Tenemos que $S(TB_X) \subset S(\overline{TB_X})$ que es compacto, por tanto $\overline{S(TB_X)}$ es compacto y será ST compacta.

Supongamos que $R : Z \to X$ es una aplicación lineal y continua y que $T : X \to Y$ es una aplicación compacta probaremos que TR es compacta. En efecto, como $R(B_X)$ es acotado en X tenemos que $\overline{T(RB_X)}$ es compacto.

Los resultados anteriores son también válidos para aplicaciones precompactas.

Al conjunto de las aplicaciones lineales y compactas de X en Y lo denotamos por $K\mathcal{L}(X, Y)$ y al de las precompactas la denotamos por $P\mathcal{L}(X, Y)$. Es claro que $K\mathcal{L}(X, Y)$ es subespacio vectorial de $C\mathcal{L}(X, Y)$ y que $K\mathcal{L}(X, Y)$ lo es de $P\mathcal{L}(X, Y)$.

Demostraremos que $P\mathcal{L}(X, Y)$ es cerrado. En efecto, sea $T_0 \in \overline{P\mathcal{L}(X, Y)}$ y probaremos que $T_0(B_X)$ es precompacto. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos que existe $T \in P\mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\|T - T_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y existirán $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset B_X$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n} B(Tx_i, \frac{\varepsilon}{2}) \supset T(B_X)$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} B(Tx_i, \varepsilon) \supset T_0(B_X)$ y deducimos que $T_0(B_X)$ es precompacto.

Denotamos por $F\mathcal{L}(X, Y)$ a las aplicaciones lineales de X en Y con imagen finito dimensional. Es claro que $F\mathcal{L}(X, Y) \subset P\mathcal{L}(X, Y)$ y si $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ es el límite de una sucesión de $F\mathcal{L}(X, Y)$ tendremos que $T \in P\mathcal{L}(X, Y)$.

Si Y es un espacio de Banach tenemos que $K\mathcal{L}(X, Y) = P\mathcal{L}(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $C\mathcal{L}(X, Y)$ que es de Banach. Entonces $K\mathcal{L}(X, Y)$ es también de Banach; en esta situación, si $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ es el límite de una sucesión de $F\mathcal{L}(X, Y)$, tenemos que T será compacta. En el siguiente teorema probamos que si Y es un espacio de Banach con base el recíproco es cierto.

Sabemos que si Y es de Banach entonces $C\mathcal{L}(X, Y)$ es también de Banach. Demostraremos ahora que *si $X \neq \{0\}$ y $C\mathcal{L}(X, Y)$ es de Banach entonces Y es de Banach.*

En efecto, sea $a \in S_X$. Existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(a) = \|a\| = 1$. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y; para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_n : X \to Y$ por $T_n(x) = f(x) y_n$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se verifica $\|T_n - T_m\| \leq \|y_n - y_m\|$, por lo que (T_n) es de Cauchy en $C\mathcal{L}(X, Y)$ y existe $T \in C\mathcal{L}(X, Y)$ tal que $\lim T_n = T$. Por tanto, $\lim y_n = \lim T_n(a) = T(a)$. Observemos que, como cada T_n es compacto, si $K\mathcal{L}(X, Y)$ fuese de Banach entonces podríamos deducir, con el mismo razonamiento, que Y es de Banach.

TEOREMA 13.3.3 *Sea X un espacio normado y sea Y un espacio de Banach con* *base entonces* $\overline{F\mathcal{L}(X,Y)} = K\mathcal{L}(X,Y)$.

DEMOSTRACIÓN Sea $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de proyecciones asociada a cierta base de Y. Sean $T \in K\mathcal{L}(X,Y)$ y $\varepsilon > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que P_nT es de $F\mathcal{L}(X,Y)$. Tenemos que $P_n(y)$ converge a y puntualmente en $T(B_X)$, que es precompacto. Por tanto, $P_n(y)$ converge uniformemente a Y en $T(B_X)$; así pues existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_n(y) - y\| < \varepsilon$ si $y \in T(B_X)$ y $n \geq n_0$. Por consiguiente, $\|P_nT - T\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y esto prueba que $T \in \overline{F\mathcal{L}(X,Y)}$. ∎

NOTA 13.3.4 1. En 1932 se planteó la cuestión de que si cada operador compacto definido en un espacio de Banach separable es límite de operadores de rango finito. En 1973 se resolvió negativamente esta cuestión, por P. Enfo.

2. Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Por medio de α definimos la aplicación $T : l_\infty \to l_\infty$, $T(x) = (\alpha_i x(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Es claro que T es lineal y que es continua, ya que $\|T(x)\| \leq \|\alpha\|\,\|x\|$. Demostraremos que T es compacta si y sólo si $\lim \alpha_i = 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la aplicación $T_k : l_\infty \to l_\infty$ por $(T_kx)(i) = \alpha_i x(i)$ si $i \leq k$ y $(T_kx)(i) = 0$ si $i > k$. Tenemos que $\operatorname{Im} T_k$ es finito dimensional y que $\|(T - T_k)(x)\| \leq \|x\| \sup\{|\alpha_i| : i > k\}$. Así pues, si $\lim \alpha_i = 0$, deducimos que $\lim T_k = T$ y T será compacto. Por otra parte, si T es compacta, como $w\lim(e_i) = 0$, se verifica $\lim Te_i = 0$ y por tanto $\lim \alpha_i = 0$. Estas conclusiones son también válidas si cambiamos l_∞ por c_0 o l_p.

3. Si X es normado infinito dimensional es claro que $I : X \to X$ (I identidad) no es compacta.

TEOREMA 13.3.5 **[Teorema de Schauder]**

Sean X, Y dos espacios normados y sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal precompacta. Entonces la aplicación dual $T^* : Y^* \to X^*$ es compacta.

DEMOSTRACIÓN Como X^* es completo, bastará probar que T^* es precompacta. Sea $\varepsilon > 0$. Como $T(B_X)$ es precompacta, existen $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset TB_X$ tales que

$$TB_X \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Observemos que si $y \in TB_X$ se verifica $\|y\| \leq \|T\|$. Como $M = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ es precompacto, existen unos subconjuntos $M_1, \ldots, M_n$ de $\mathbb{K}$ con diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ de modo que $M \subset \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Sea H las variaciones con repetición de $\{1, \ldots, n\}$ tomados de m en m. Para cada $(j_1, \ldots, j_m) \in H$ definimos

$$A(j_1, \ldots, j_m) = \{g \in B_{Y^*} : g(y_1) \in M_{j_1}, \ldots, g(y_n) \in M_{j_n}\}.$$

Es claro que si $g \in B_{Y^*}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple $|g(y_i)| \leq \|y_i\| \leq \|T\|$. Así pues, $g(y_i) \in M$ y existe $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g(y_i) \in M_{j_i}$. Tendremos que $g \in A(j_1, \ldots, j_m)$. Por tanto $B_{Y^*} \subset \bigcup_{(j_1,\ldots,j_m)\in H} A(j_1, \ldots, j_m)$ y será

$$T^*B_{Y^*} \subset \bigcup_{(j_1,\ldots,j_m)\in H} T^*(A(j_1, \ldots, j_m)).$$

Probaremos que cada $T^*(A(j_1,\dots,j_m))$ tiene diámetro menor que ε. Sean $g,h \in A(j_1,\dots,j_m)$. Si $x \in B_X$ entonces para algún $i \in \{1,\dots,m\}$ se verifica $\|Tx - y_i\| < \frac{\varepsilon}{4}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}|(T^*g)(x) - (T^*h)(x)| &= |g(Tx) - h(Tx)| \\ &\leq |g(Tx) - g(y_i)| + |g(y_i) - h(y_i)| + |h(y_i) - h(Tx)| \\ &\leq \|Tx - y_i\| + |g(y_i) - h(y_i)| + \|Tx - y_i\| \\ &\leq \tfrac{\varepsilon}{2} + |g(y_i) - h(y_i)|.\end{aligned}$$

Como $g,h \in A(j_1,\dots,j_m)$, serán $g(y_i), h(y_i) \in M_{j_i}$ y por tanto $|g(y_i) - h(y_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues, $|(T^*g)(x) - (T^*h)(x)| \leq \varepsilon$ si $x \in B_X$ y, por tanto, $\|T^*g - T^*h\| \leq \varepsilon$. ■

Nota 13.3.6 1. Sean X, Y espacios normados. Es claro que si $T \in K\mathcal{L}(X,Y)$ entonces $T^* \in K\mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Supongamos ahora que $T^* \in K\mathcal{L}(Y^*, X^*)$ y que Y es de Banach. Probaremos que $T \in K\mathcal{L}(X,Y)$.

En efecto, tenemos que $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es compacta; así pues, $T^{**}(B_{X^{**}})$ es precompacto pero $T^{**}(j(B_X)) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$ y tendremos que $T^{**}(j(B_X))$ es precompacto, donde $j : X \to X^{**}$ es la aplicación canónica usual. Si $j' : Y \to Y^{**}$ es también la aplicación canónica deducimos que $T(B_X) = j'^{-1}(T^{**}(j(B_X)))$, ya que $j'T = T^{**} \circ j$. Así pues, $T(B_X)$ es precompacto y, como Y es de Banach, se verifica que $\overline{T(B_X)}$ compacto.

2. Supongamos que $T : X \to Y$ es compacta. Sea $j : X \to X^{**}$ la aplicación canónica. Tenemos que $\overline{j(X)}$ es la compleción de X. Consideremos $T_0 = T^{**}\Big|_{\overline{j(X)}}$, veamos que T_0 es también compacta.

En efecto, sea (x_n^{**}) una sucesión acotada de $\overline{j(X)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $x_n \in X$ tal que $\|j(x_n) - x_n^{**}\| < \frac{1}{n}$. Tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, luego existe una subsucesión (x_{n_k}) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge a cierto $y \in Y$. Entonces, si $j' : Y \to Y^{**}$ es la aplicación canónica, se verifica $\lim_k j'(Tx_{n_k}) = j'(y)$. Como $j'T = T^{**}j$ y $\lim_k T^{**}j(x_{n_k}) = \lim_k j'(Tx_{n_k}) = j'(y)$, resulta que T_0 es una aplicación compacta de $\overline{j(X)}$ en $\overline{j'(Y)}$ y $T_0' = j'^{-1}T_0$ será una extensión compacta de $T : X \to Y$, a la compleción $\overline{j(X)}$ de X.

3. Supongamos que $T : X \to Y$ es lineal y que existe $\alpha > 0$ tal que si $x \in X$ es $\alpha\|x\| \leq \|Tx\|$. Si T es compacta entonces, por el apartado anterior, podemos suponer que X es de Banach. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_X$ tendremos que para $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe alguna subsucesión $(Tx_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a cierto $y \in Y$. Como $\alpha\|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\| \leq \|Tx_{n_{k_1}} - Tx_{n_{k_2}}\|$, se tiene que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y será pues convergente. Esto significa que B_X es compacto y X tendrá que ser finito dimensional. Por tanto, si X es de dimensión infinita y $T : X \to X$ es lineal y con inversa continua entonces no puede ser compacta.

13.4 El espectro de un operador compacto

A continuación pasaremos a estudiar cuestiones relativas al espectro de un operador compacto y después estudiaremos los teoremas de la alternativa de Fredholm.

LEMA 13.4.1 *Sea X un espacio normado y $A \in K\mathcal{L}(X)$. Entonces, $\sigma_a(A) \subset \sigma_p(A)$.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, sea $\alpha \in \sigma_a(A)$, tenemos que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ tal que $\lim \|A(x_n) - \alpha(x_n)\| = 0$. Pero también existe una subsucesión $(A(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente a cierto $y_0 \in X$. Como $\lim \|A(x_{n_j}) - \alpha x_{n_j}\| = 0$, se tiene $\lim_j \alpha x_{n_j} = y_0$ y, por tanto, $A(y_0) = \lim_j \alpha A(x_{n_j}) = \alpha y_0$. Esto prueba que $\alpha \in \sigma_p(A)$. ∎

LEMA 13.4.2 *Sea X un espacio normado y sea $T \in C\mathcal{L}(X)$. Sea Y un subespacio vectorial cerrado de X tal que $(T - I)(X) \subset Y$. Entonces, para cada $a \in (0,1)$ existe $x_a \in S_X$ con $d(T(x_a), T(Y)) \geq a$.*

DEMOSTRACIÓN Dado $a \in (0,1)$ sabemos, por el teorema de Riesz, que existe $x_a \in S_X$ tal que $d(x_a, Y) \geq a$. Entonces, si $y \in Y$, como $y + (T - I)(y) - (T - I)(x_a) \in Y$, tenemos que $\|T(x_a) - T(y)\| = \|x_a - [y + (T-I)(y) - (T-I)(x_a)]\| \geq a$. ∎

TEOREMA 13.4.3 *Sea X un espacio normado y sea $T \in K\mathcal{L}(X)$. Entonces, $\sigma_p(T)$ es numerable y 0 es el único punto de acumulación posible de $\sigma_p(T)$.*

DEMOSTRACIÓN Sea $E_r = \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > r\}$, si $r > 0$. Tenemos que $\sigma_p(T) - \{0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{\frac{1}{n}}$. Demostraremos que cada E_r es finito.

Supongamos que E_r es infinito. Entonces podemos escoger una sucesión $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de autovectores mutuamente distintos. Sabemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la correspondiente sucesión de autovectores entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es libre. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $Y_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y tenemos que $Y_n \subset Y_{n+1}$ si $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\dfrac{1}{\lambda_{n+1}}T$. Tenemos que $\left(\dfrac{1}{\lambda_{n+1}}T - I\right)(Y_{n+1}) \subset Y_n$ ya que si $z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1}x_{n+1}$ es

$$\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}T - I\right)(z) = \alpha_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} - 1\right)x_1 + \cdots + \alpha_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda n + 1} - 1\right)x_n \in Y_n.$$

Por tanto, existe $y_{n+1} \in Y_{n+1}$ con $\|y_{n+1}\| = 1$ y

$$d\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}}T(y_{n+1}) - \frac{1}{\lambda_{n+1}}T(Y_n)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $d(T(y_{n+1}), T(Y_n)) \geq \dfrac{1}{2}|\lambda_{n+1}| \geq \dfrac{1}{2}r$. Si consideramos la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, es claro que si $n > m$ es $\|T(y_n) - T(y_m)\| \geq \dfrac{1}{2}r$. Como T es compacto, existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(T(y_{n_k}))$ es convergente, esto es una contradicción.

Finalizaremos probando que si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\lambda \neq 0$ entonces λ no es un punto de acumulación de $\sigma_p(T)$. En efecto, sea $r \in \mathbb{K}$ tal que $0 < r < |\lambda|$, entonces $B = \{h \in \mathbb{K} : |h| > r\}$ es entorno abierto de λ y $B \cap \sigma_p(A) \subset E_r$. Por tanto, $B \cap \sigma_p(A)$ es finito y λ no es de acumulación. ∎

TEOREMA 13.4.4 *Sea X un espacio de Banach y sean $A \in K\mathcal{L}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces:*

a) $\ker(A-\lambda)$ *es de dimensión finita;*

b) $Im(A-\lambda)$ *es cerrado;*

c) $A-\lambda$ *es inyectiva si y sólo si* $A-\lambda$ *es sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $A-\lambda = \lambda(\frac{1}{\lambda}A - I)$ y $\frac{1}{\lambda}A$ es compacto. Bastará, por tanto, pues hacer la demostración para la aplicación $A-I$.

a) Supongamos que $\ker(A-I)$ es de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vectores de $\ker(A-I)$ que forma un sistema libre. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $Y_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$. Tenemos que $Y_n \subset Y_{n+1}$ y además $(A-I)(Y_{n+1}) \subset Y_n$, ya que si $z \in Y_{n+1}$ es $(A-I)(z) = 0 \in Y_n$. Por tanto en cada Y_n podemos escoger $y_n \in Y_n$ con $\|y_n\| = 1$ y $d(A(y_n), A(Y_{n-1})) \geq \dfrac{1}{2}$ si $n > 1$ y en particular $\|A(y_n) - A(y_m)\| \geq \dfrac{1}{2}$ si $n > m$. Esto contradice el que $(A(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tenga una subsucesión convergente, por ser A compacto.

b) Como $\ker(A-I)$ es de dimensión finita tendrá en X un complemento topológico M, de forma que $X = \ker(A-I) \oplus M$. Sea $S : M \to X$ la aplicación definida por $S = (A-I)_M$. Es claro que S es inyectiva y que $\operatorname{Im} S = \operatorname{Im}(A-I)$. Veamos que existe $r > 0$ tal que si $x \in M$ se cumple $r\|x\| \leq \|S(x)\|$. En efecto, en caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in M$ con $\|S(x_n)\| < \|x_n\|\frac{1}{n}$. Sea $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$; tenemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ y $\lim S(y_n) = 0$.

Por otra parte, alguna subsucesión, $(A(y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$, de $(A(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente a cierto $x_0 \in X$. Como $\lim_k (A-I)(y_{n_k}) = \lim_k S(y_{n_k}) = 0$, resulta $\lim_k y_{n_k} = \lim_k A(y_{n_k}) = x_0$. Como M es cerrado será $x_0 \in M$, pero entonces $S(x_0) = \lim_k S(y_{n_k}) = 0$. Como S es inyectiva se tiene que $x_0 = 0$. Esto es una contradicción ya que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset S_X$. Por tanto, existe $r > 0$ tal que $r\|x\| \leq \|S(x)\|$ si $x \in M$. Desde aquí es sencillo probar que $\operatorname{Im} S$ es completo y por tanto cerrado.

c) Resolveremos primero ciertas cuestiones. Tenemos que las siguientes inclusiones pueden ser comprobadas fácilmente:

$$\begin{array}{l} \ker(A-I) \subset \ker(A-I)^2 \subset \cdots \subset \ker(A-I)^n \subset \cdots \\ \operatorname{Im}(A-I) \supset \operatorname{Im}(A-I)^2 \supset \cdots \supset \operatorname{Im}(A-I)^n \supset \cdots \end{array}$$

Es evidente que la primera cadena es de subespacios cerrados. Veamos que cada subespacio de la segunda cadena es también cerrado. En efecto,

- si n es par es $I-(A-I)^n$ un polinomio en A sin término independiente. Como A es compacto, para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que A^P es compacto y las combinaciones lineales finitas de un operador compacto son operadores compactos. Por tanto, $I-(A-I)^n$ es compacto y tendremos que $\operatorname{Im}(I - (I-(A-I)^n)) = \operatorname{Im}(A-I)^n$ es cerrado.

- Si n es impar $(A-I)^n - I$ es polinomio en A sin término independiente y por tanto es compacto. Así pues, $\mathrm{Im}((A-I)^n + I - I) = \mathrm{Im}(A-I)^n$ es cerrado. Para $n \in \mathbb{N}$, si $z \in \ker(A-I)^{n+1}$ se tiene que $(A-I)^n(A-I)(z) = 0$. Por tanto, $(A-I)(z) \in \ker(A-I)^n$. Esto significa que $(A-I)(\ker(A-I)^{n+1}) \subset \ker(A-I)^n$.

Supongamos que los contenidos de la primera cadena son estrictos, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos escoger $y_n \in \ker(A-I)^n$ con $\|y_n\| = 1$ y

$$d(A(y_n), T(\ker(A-I)^{n-1})) \geq \frac{1}{2}.$$

En particular sería $\|A(y_n) - A(y_m)\| \geq \frac{1}{2}$, si $n > m$. Por tanto, tenemos la contradicción de que $(y_n)_n \in \mathbb{N}$ es una sucesión acotada y $(A(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesión convergente. Así pues existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\ker(A-I)^n = \ker(A-I)^{n+1}$.

Observemos ahora que en la segunda cadena es $\mathrm{Im}(A-I)^{n+1} \subset \mathrm{Im}(A-I)^n$ y $(A-I)(\mathrm{Im}(A-I)^n) \subset \mathrm{Im}(A-I)^{n+1}$. Si los contenidos son siempre estrictos tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_b \in \mathrm{Im}(A-I)^n$ tal que $d(y_n, \mathrm{Im}(A-I)^{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ y $\|y_n\| = 1$. En particular tenemos que $d(y_n, y_m) \geq \frac{1}{2}$ si $n > m$, con lo que de nuevo se obtiene una contradicción. Así pues, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Im}(A-I)^m = \mathrm{Im}(A-I)^{m+1}$.

Una vez vistas estas cuestiones previas, pasemos a la demostración de c).

Supongamos ahora que $A-I$ es inyectiva. De la igualdad $\mathrm{Im}(A-I)^m = \mathrm{Im}(A-I)^{m+1}$ deduciremos que $\mathrm{Im}(A-I)^m = \mathrm{Im}(A-I)^{m-1}$.

En efecto, se tiene $\mathrm{Im}(A-I)^m \subset \mathrm{Im}(A-I)^{m-1}$ y si $y \in \mathrm{Im}(A-I)^{m-1}$ existe $x \in X$ tal que $(A-I)^{m-1}(x) = y$. Por tanto, $(A-I)(y) = (A-I)^m(x)$ y $(A-I)(y) \in \mathrm{Im}\,(A-I)^m = \mathrm{Im}\,(A-I)^{m+1}$ y existe $z \in X$ tal que $(A-I)\,(y) = (A-I)^{m+1}(z) = (A-I)(A-I)^m(z)$. Como $A-I$ es inyectiva se tiene $y = (A-I)^m(z)$. Por tanto, $y \in \mathrm{Im}(A-I)^m$. Reiterando este razonamiento llegaríamos a que $\mathrm{Im}(A-I)^2 = \mathrm{Im}(A-I)$; así, si $x \in X$ se tiene $(A-I)(x) \in \mathrm{Im}(A-I) = \mathrm{Im}(A-I)^2$. Existe pues algún $z \in X$ tal que $(A-I)(x) = (A-I)^2(z)$; entonces será $x = (A-I)(z)$, por lo que $\mathrm{Im}(A-I) = X$ y $A-I$ es sobreyectiva.

Recíprocamente, supongamos que $(A-I)$ es sobreyectiva. De la igualdad $\ker(A-I)^{n+1} = \ker(A-I)^n$ deduciremos la igualdad $\ker(A-I)^n = \ker(A-I)^{n-1}$. En efecto, tenemos que $\ker(A-I)^{n-1} \subset \ker(A-I)^n$. Sea $y \in \ker(A-I)^n$; como $A-I$ es sobreyectiva, existe $z \in X$ tal qu0e $(A-I)(z) = y$. Entonces, $0 = (A-I)^n(y) = (A-I)^{n+1}(z)$ y, por ser $\ker(A-I)^{n+1} = \ker(A-I)^n$, tenemos que $z \in \ker(A-I)^n$. Así pues, $(A-I)^{n-1}(y) = (A-I)(z) = (A-I)^n(z) = 0$. Reiterando el razonamiento, obtendríamos finalmente que $\ker(A-I) = \ker(A-I)^2$. Sea $y \in \ker(A-I)$. Como $A-I$ es sobreyectiva, existe $z \in X$ tal que $(A-I)(z) = y$. Así pues, $(A-I)^2(z) = (A-I)(y) = 0$. Por tanto, $z \in \ker(A-I)^2 = \ker(A-I)$, tenemos que $y = (A-I)(t) = 0$ y será $\ker(A-I) = \{0\}$. Por consiguiente, $A-I$ es inyectiva. ∎

El siguiente teorema tiene ahora una demostración inmediata.

TEOREMA 13.4.5 *Sea X un espacio de Banach y sea $T \in K\mathcal{L}(X)$. Entonces:*

i) Si $\lambda \in \sigma(T)$ *y* $\lambda \neq 0$ *se verifica* $\lambda \in \sigma_p(T)$*;*

ii) Si $\lambda \neq 0$ *la dimensión de* $\ker(T-\lambda)$ *es finita;*

iii) $\sigma(T)$ *es numerable y el único punto posible de acumulación es el cero.*

Es claro, en esta situación, que si $\sigma(T)$ no es finito será un compacto numerable y, como el único posible punto de acumulación es el cero, deducimos que $\sigma(T)$ es una sucesión que converge a cero. La otra posibilidad es que $\sigma(T)$ sea finito. Observemos que si $\dim X = \infty$ entonces $0 \in \sigma(T)$. Recordemos que si $A \in C\mathcal{L}(X)$ es compacto entonces A^* es compacto. En el siguiente teorema relacionamos los autovalores de A y A^*.

TEOREMA 13.4.6 *Sea X un espacio de Banach y sea $T \in K\mathcal{L}(X)$. Entonces:*

i) $\dim\ker(T-I) = \dim\ker(T^*-I) < +\infty$*;*

ii) Los autovalores no nulos de T^* son los mismos que los de T y los correspondientes autoespacios tienen la misma dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN

i) Observemos en primer lugar que, por ser T y T^* compactos, tenemos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $\dim\ker(T-I) = m$ y $\dim(T^*-I) = n$.

Vamos a demostrar que $\dim\ker(T-I) \leq \dim\ker(T^{**}-I)$. Sea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ una base de $\ker(T-I)$. Tenemos que $\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$ es libre en X^{**}; bastará probar que para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ se verifica $\hat{x}_i \in \ker(A^{**}-I)$. Tenemos que $(T^{**}-I)(\hat{x}_i) = T^{**}(\hat{x}_i) - \hat{x}_i$. Veamos que $T^{**}(\hat{x}_i) = \hat{x}_i$ si $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $x^* \in X^*$, se verifica que $T^{**}(x_i)(x^*) = \hat{x}_i(T^*x^*) = (T^*x^*)(x_i) = x^*(Tx_i) = x^*(x_i) = \hat{x}_i(x^*)$.

Demostraremos que $n \leq m$. Si fuese $n = 0$ el resultado es trivial. Si $m = 0$ se tiene que $T-I$ es inyectiva y por tanto $T-I$ es sobreyectiva y $(T-I)^* = T^*-I$ será inyectiva; por tanto, $n = \dim\ker(T^*-I) = 0$. Supongamos pues que $n \geq 1$ y $m \geq 1$. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que es $m < n$. Sea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ una base de $\ker(T-I)$. Sea $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ un sistema libre en X^* tal que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $\{y_1^*, \ldots, y_n^*\}$ una base de $\ker(T^*-I)$ y sea $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un sistema libre en X tal que $y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos, para cada $x \in X$, $C(x) = T(x) + B(x)$, donde $B(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x)y_i$. Es claro que B es continua y, como $\dim \operatorname{Im} B$ es finito, tenemos que B es compacto. Por tanto, $C = T + B$ será compacto.

Demostraremos que $C - I$ es inyectiva. Si $C(x) = x$ será

$$x = T(x) + \sum_{i=1}^{m} x_i^*(x)y_i, \qquad (T-I)(x) = -\sum_{i=1}^{m} x_i^*(x)y_i.$$

Tenemos que $\ker(T^*-I) = (\operatorname{Im}(T-I))^0$; por tanto, si $j \in \{1, \ldots, m\}$ se verifica $y_j^*((T-I)(x)) = x_j^*(x) = 0$ y será $(T-I)(x) = 0$. Deducimos que $x \in \ker(T-I)$

y x será de la forma $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$. Como para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene $x_j^*(x) = \alpha_j = 0$, necesariamente será $x = 0$. Tenemos que $C - I$ es inyectiva y por tanto $C - I$ será sobreyectiva. Existe un $z \in X$ tal que $(C - I)(z) = y_{m+1}$. Entonces

$$1 = y_{m+1}^*(y_{m+1}) = y_{m+1}^*((C-I)(z)) = y_{m+1}^*((T-I)z) + y_{m+1}^* \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^*(z) y_i \right) = 0.$$

Esto es una contradicción.

Tenemos que $\dim \ker(T^* - I) \leq \dim \ker(T - I)$. Por la misma razón es $\dim \ker(T^{**} - I) \leq \dim \ker(T^* - I)$ y, como hemos probado que $\dim \ker(T - I) \leq \dim \ker(T^{**} - I)$, deducimos que $\dim \ker(T^* - I) = \dim \ker(T - I)$.

ii) Tenemos que si $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \dim \ker(T - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \dim \ker(T^* - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \rho(T^*)$.

Si $\lambda \neq 0$ fuese un autovalor de T o de T^* tenemos que $\dim \ker(T - \lambda I) = \dim \ker(\frac{T}{\lambda} - I) = \dim \ker(\frac{T^*}{\lambda} - I) = \dim \ker(T^* - \lambda I)$. ∎

NOTA 13.4.7 1- Si X es un espacio de Banach infinito dimensional y $A \subset C\mathcal{L}(X)$ es compacta, sabemos que no es posible que exista $\alpha > 0$ de modo que para cada $x \in X$ sea $\alpha \|x\| \leq \|Ax\|$. Esto significa que A no es invertible y por tanto $0 \in \sigma(A)$.

2- Sea $A : l_2 \to l_2$ la aplicación definida por $A(x) = (\alpha_i x(i))_{i \in I}$, donde $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ es una sucesión de escalares. Sabemos que A es compacto si y sólo si $\lim \alpha_i = 0$. En esta situación, si λ es un autovalor, será $A(x) - \lambda x = 0$, para algún $x \in l_2$ con $x \neq 0$. Es decir, $\alpha_i x(i) - \lambda x(i) = 0$ si $i \in \mathbb{N}$. Deducimos que $\lambda = \alpha_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Recíprocamente, es sencillo comprobar que cada α_i es un autovalor de A.

- Si cada α_i es distinto de cero deducimos que $\sigma_p(A) = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{0\}$, pero $0 \notin \sigma_p(A)$.

- Si existe algún α_i que es cero, se tiene $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ y en esta situación si $M = \{i \in \mathbb{N} : \alpha_i = 0\}$ es infinito y en esta situación deducimos que 0 es el único autovalor tal que su correspondiente autoespacio tiene dimensión infinita.

3- Si X es infinito dimensional y $A : X \to X$ es lineal con $\dim \operatorname{Im} A$ finita es claro que 0 es autovalor de A y su correspondiente autoespacio $\ker A$ es de dimensión infinita.

4- Sea $A : l_2 \to l_2$ la aplicación definida por $A(x) = (0, x(1), \frac{1}{2}x(2), \ldots)$. Tenemos que A es compacta y también será compacta $A^* : (l_2)^* \to (l_2)^*$. Si $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in (l_2)^*$ sabemos que $A^*((y_i))$ es el elemento de $(l_2)^* \equiv l_2$ definido por $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$, donde, para cada $j \in \mathbb{N}$, h_j está definido por

$$A^*((y_i))(e_j) = (y_i)(A(e_j)) = y_1 0 + y_2 e_j(1) + y_3 \frac{1}{2} e_j(2) + \ldots.$$

Así pues, $h_1 = y_2$, $h_2 = \frac{1}{2}y_3 \ldots$ y tenemos que $A^*y = (y_2, \frac{1}{2}y_3, \ldots)$ y será $A^*(e_1) = 0$. Esto prueba que $0 \in \sigma_p(A^*)$ pero $0 \notin \sigma_p(A)$.

5- Si X es un espacio normado y $A \in C\mathcal{L}(X)$ tenemos que $\sigma(A) = \sigma(A^*)$. Si además X es infinito dimensional y A es compacto, la única posible diferencia entre $\sigma_p(A)$ y $\sigma_p(A^*)$ está en que sí tienen o no tienen al cero como elemento.

6- Consideremos $A : l_2 \to l_2$ la aplicación definida por $A(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}x(j)$. Es decir, A está definida por una matriz infinita $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Vamos a demostrar que si la familia $(|\alpha_{ij}|^2)_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es sumable entonces A es lineal y compacta. Sea $\sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 = \alpha$. Es sencillo comprobar que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |A(x)(i)|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}x(j) \right|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}x(j)| \right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^2 \right) \right) \\
&\leq \alpha \|x\|^2.
\end{aligned}
$$

Así pues, A está bien definida. Es claro que A será lineal y que $\|Ax\|^2 \leq \alpha\|x\|^2$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}$ sea $A_n : l_2 \to l_2$ definida por la matriz $(\beta_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, donde $\beta_{ij} = 0$ si $i > n$, $j \in \mathbb{N}$ y $\beta_{ij} = \alpha_{i,j}$ si $i \leq n$ y $j \in \mathbb{N}$. Es claro que $A_n(x)(i) = 0$ si $i > n$ y, por tanto, $\dim \operatorname{Im} g(A_n) < \infty$. Además, si $x \in l_2$ es

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |(A - A_n)(x)(i)|^2 &= \sum_{i=n}^{\infty} |A(x)(i)|^2 = \sum_{i=n}^{\infty} |\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij}x(j)|^2 \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} ((\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2)\ (\sum_{j=1}^{\infty} (x(j))^2)) \\
&= \|x\|^2 (\sum_{i=n}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2)).
\end{aligned}
$$

Así pues, $\|A - A_n\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2)$. Por tanto, $\lim \|A - A_n\| = 0$ y A es compacto.

Consideremos ahora la aplicación dual $A^* : l_2^* \to l_2^*$. Si $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (l_2)^*$, sabemos que $A^*((y_i))$ es el elemento de $(l_2)^* \equiv l_2$ definido por $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$, donde, para cada $j \in \mathbb{N}$, h_j está definido por $A^*((y_i))(e_j) = (y_i)(A(e_j)) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i\alpha_{ij}$. Así pues, $h_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i1}y_i$, $h_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i2}y_i, \ldots$. Por tanto, es claro que $A^* : l_2 \to l_2$ es la aplicación determinada por la matriz $(\alpha_{j,i})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, que es la traspuesta de $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.

13.5 Teoremas de la alternativa de Fredholm

Para ilustrar los teoremas de la alternativa de Fredholm, comenzamos con estudiar algunos resultados sobre sistemas lineales de ecuaciones.

Consideremos en $\mathbb{K}$ un sistema de n ecuaciones y n incógnitas.

$$\begin{aligned} \alpha_n x(1) + \cdots + \alpha_{1n}x(n) &= y(1) \\ \vdots &= \vdots \\ \alpha_{n1}x(1) + \cdots + \alpha_{nn}x(n) &= y(n). \end{aligned}$$

Si denotamos $A = (\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, podemos expresar el sistema por $Ax = y$, donde A determina una aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$, y se tiene que $y \in \mathbb{K}^n$. Aquí x denota la incógnita de $\mathbb{K}^n$. Las siguientes afirmaciones son todas conocidas y fáciles de probar.

i- Para cada $y \in \mathbb{K}^n$ el sistema $Ax = y$ tiene una única solución si y sólo si el sistema $Ax = 0$ (sistema homogéneo asociado) admite como única solución a la trivial.

ii- El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución distinta de cero si y sólo si $A^t x = 0$ tiene solución distinta de cero. En esta situación el máximo número de soluciones linealmente independientes de $Ax = 0$ y de $A^t x = 0$ es el mismo (es exactamente $n - \textit{rango}\, A = n - \textit{rango}\, A^t$).

iii- Para cada $y_0 \in \mathbb{K}^n$, el sistema $Ax = y_0$ posee solución si y sólo si para cada solución $x = (x(1), \ldots, x(n))$ de $A^t x = 0$ se verifica que $x(1)y_0(1) + \cdots + (x_n)y_0(n) = 0$.

En esta situación cualquier solución de $Ax = y_0$ se obtiene como la suma de una solución fija de $Ax = y_0$ y una combinación lineal de soluciones del homogéneo $Ax = 0$.

Estos resultados sobre aplicaciones lineales en espacios de dimensión finita pueden generalizarse al caso de aplicaciones compactas. El estudio fue hecho en 1903 por *Fredholm* para el caso de operadores integrales y *F. Riesz* en 1918 para el caso de aplicaciones compactas cualesquiera.

TEOREMA 13.5.1 **[Teorema de la alternativa de Fredholm (I)]**

Sea X un espacio de Banach y sea $A \in K\mathcal{L}(X)$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces exactamente una de las siguientes alternativas se verifica.

i) Para cada $y \in X$ la ecuación $A(x) - \lambda x = y$ tiene una única solución en X.

ii) Existe una solución distinta de cero de $Ax - \lambda x = 0$.

En la situación de la alternativa ii) el máximo número de soluciones linealmente independientes de $Ax - \lambda x = 0$ es finito.

DEMOSTRACIÓN Como A es compacto y $\lambda \neq 0$ tenemos que si $\lambda \in \sigma(A)$ entonces λ es autovalor y se verifica la alternativa ii). En este caso tenemos que $\dim\ker(A-\lambda I)$ es finito. Si $\lambda \notin \sigma(A)$ entonces $A - \lambda I$ es invertible y se verifica i). ∎

TEOREMA 13.5.2 **[Teorema de la alternativa de Fredholm (II)]**
Sea X un espacio de Banach y sea $A \in K\mathcal{L}(X)$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Entonces, la ecuación homogénea $A(x) - \lambda x = 0$ tiene una solución $x \in X$ distinta de cero si y sólo si la ecuación homogénea $A^*(x^*) - \lambda x^* = 0$ tiene una solución $x^* \in X^*$ distinta de cero. En esta situación el número máximo de soluciones linealmente independientes de ambos sistemas es finito y es el mismo.

DEMOSTRACIÓN Es una sencilla consecuencia de que $\sigma_p(A) = \sigma_p(A^*)$ y de que si $\lambda \in \sigma_p(A)$ entonces $\dim\ker(A - \lambda I) = \dim\ker(A^* - \lambda I)$. ∎

TEOREMA 13.5.3 **[Teorema de la alternativa de Fredholm (III)]**
Sea X un espacio de Banach y sea $A \in K\mathcal{L}(X)$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ y sea $y \in X$. Entonces la ecuación $A(x) - \lambda x = y$ tiene una solución $x \in X$ si y sólo si $x_j^*(y) = 0$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, donde $\{x_1^*, \ldots, x_m^*\}$ es una base del espacio de las soluciones de la ecuaciones homogénea $A^*x - \lambda^* x = 0$.

En esta situación, si x_0 es una determinada solución de $A(x) - \lambda x = y$ entonces la solución general de esta ecuación es $x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$, donde $\{x_1, \ldots, x_m\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea $A(x) - \lambda x = 0$.

DEMOSTRACIÓN Recordemos que si E es un subespacio vectorial de X y $a \in X$ entonces $a \in \overline{E}$ si y sólo si $f(a) = 0$ para cada $f \in (E)^0$.

La ecuación $A(x) - \lambda x = y$ tiene solución $x \in E$ si y sólo si $y \in Im(A - \lambda I)$ (que es cerrado). Esto sucederá si y sólo si $x^*(y) = 0$ para cada $x^* \in (Im\,(A - \lambda I)^0)$. Tenemos que $x^* \in (Im\,(A - \lambda I))^0$ si y sólo si $x^*(y) = 0$ para cada $x^* \in (Im\,(A - \lambda I))^0$. También tenemos que $x^* \in (Im\,(A - \lambda I))^0$ si y sólo si para cada $x \in X$ es $x^*(A(x) - x) = 0$; es decir, si y sólo si $(A^* - \lambda I)(x^*)(x) = 0$; es decir si y sólo si $(A^* - \lambda I)(x^*) = 0$ $(x^* \in \ker(A^* - \lambda I))$.

Por otra parte, sea $x_0 \in X$ una determinada solución de $A(x) - \lambda x = y$ y sea $\{x_1, \ldots, x_m\}$ una base del espacio de soluciones de $A(x) - \lambda x = 0$. Entonces $x \in X$ es solución de $A(x) - \lambda x = y$ si y sólo si $x - x_0$ es solución de $A(x) - \lambda x = 0$. Esto sucede si y sólo si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que $x - x_0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$. ∎

TEOREMA 13.5.4 *Sea X un espacio de Banach y sea $A \in K\mathcal{L}(X)$ de modo que $1 \notin \sigma_p(A)$. Entonces*

i) Para cada $y \in X$ existe un único $x \in X$ tal que $x - A(x) = y$.

ii) Si $A_1 \in C\mathcal{L}(X)$ y $\|A - A_1\| \cdot \|(I - A)^{-1}\| = \varepsilon < 1$. entonces, para cada $y_1 \in X$, existe un único $x_1 \in X$ tal que $x_1 - A_1(x_1) = y_1$.

iii) Si $y, y_1 \in X$ y $x, x_1 \in X$ son como en i) y ii), entonces

$$\|x - x_1\| \leq \frac{\|(I - A)^{-1}\|}{1 - \varepsilon}(\varepsilon\|y\| + \|y - y_1\|).$$

DEMOSTRACIÓN

i) Es claro ya que $I - A$ es invertible.

ii) Si $A_1 \in C\mathcal{L}(X)$ y $\|A - A_1\|\|(I - A)^{-1}\| = \varepsilon < 1$ será $\|(I - A_1) - (I - A)\| < \frac{\varepsilon}{\|(I - A)^{-1}\|}$ y entonces $I - A_1$ es invertible. Sabemos que será

$$\|(I - A_1)^{-1} - (I - A)^{-1}\| < \frac{\|(I - A)^{-1}\|^2\|A - A_1\|}{1 - \varepsilon}.$$

Como $I - A_1$ es invertible es claro que se verifica ii)

iii) Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(I - A_1)^{-1}\| &\leq \|(I - A_1)^{-1} - (I - A)^{-1}\| + \|(I - A)^{-1}\| \\
&\leq \frac{\|(I - A)^{-1}\|^2\|A - A_1\|}{1 - \varepsilon} + \|(I - A)^{-1}\| \\
&= \|(I - A)^{-1}\|^2 \frac{\varepsilon}{\|(I - A)^{-1}\|} \frac{1}{1 - \varepsilon} + \|(I - A)^{-1}\| \\
&= \frac{1}{1 - \varepsilon}\|(I - A)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Si tenemos que $x - A(x) = y$, $x_1 - A(x_1) = y_1$ entonces

$$\begin{aligned}
\|x - x_1\| &= \|(I - A)^{-1}(y) - (I - A_1)^{-1}(y_1)\| \leq \|(I - A)^{-1}(y) \\
&= (I - A_1)^{-1}(y)\| + \|(I - A_1)^{-1}(y) - (I - A_1)^{-1}(y_1)\| \\
&\leq \frac{1}{1 - \varepsilon}\|(I - A)^{-1}\|^2\|A - A_1\|\|y\| + \frac{1}{1 - \varepsilon}\|(I - A)^{-1}\|\|y - y_1\| \\
&= \frac{\|(I - A)^{-1}\|}{1 - \varepsilon}(\|(I - A)^{-1}\|\|A - A_1\|\|y\| + \|y - y_1\|) \\
&= \frac{\|(I - A)^{-1}\|}{1 - \varepsilon}(\varepsilon\|y\| + \|y - y_1\|).
\end{aligned}$$

■

NOTA 13.5.5 1. Sea X un espacio de Banach. Si $A \in C\mathcal{L}(X)$ y A es compacta, tenemos que los autovalores no nulos de A y A^* son los mismos. Si A no es compacta no tiene porqué suceder esto.

Consideremos $A : l_2 \to l_2$ la aplicación definida por $A(a) = b$, donde $b_n = a_{n+1}$. Es claro que $\|A\| = 1$. Tenemos que $A(e_1) = 0$, así pues $0 \in \sigma_p(A)$ y si $\lambda \neq 0$ y $|\lambda| < 1$ es $A(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = (0, 0, \dots)$. Por tanto, $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma_p(A)$ y es claro que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$, tenemos que si $A(a) - \lambda a = 0$ se verifica $\lambda = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $|a_{n+1}| = |a_n|$. Por tanto, como $a \in l_2$ será $a = 0$. Es sencillo comprobar que $A^*(a) = (0, a_1, a_2, \dots)$ y por tanto A^* es inyectiva, por lo que $0 \notin \sigma_p(A)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\lambda \neq 0$ tenemos que, si $A^*(a) - \lambda a = 0$, se verifica $(0, a_1, a_2, \dots) - \lambda(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, 0, \dots)$ y deducimos que $a = 0$. Por tanto $\sigma_p(A^*) = \emptyset$.

2. Consideremos el espacio de Banach $X = C([0,1])$ y sea $T : X \to X$ la aplicación definida por $(Tf)(t) = tf(t)$. Es sencillo comprobar que $\|Tf\| \leq \|f\|$ y que $\|T\| = 1$. T es inyectiva, ya que, si $tf(t) = tg(t)$ para cada $t \in [0,1]$, tenemos que $f(t) = g(t)$ si $t \in (0,1]$ y por tanto, como f y g son continuas, se verifica $f = g$ en $[0,1]$. T no es sobreyectiva ya que si $g(t) = tf(t)$ para cada $t \in [0,1]$ tendremos que $g(0) = 0$. Por tanto, $\operatorname{Im} T \subset \{g \in X : g(0) = 0\}$ y entonces es también claro que $\operatorname{Im} T$ no es densa en X; por consiguiente, $0 \in \sigma_r(T)$.

Para cualquier $\lambda \neq 0$ tenemos que $\lambda - T$ es inyectiva ya que, si $\lambda f(t) - tf(t) = \lambda g(t) - tg(t)$ para cada $t \in [0,1]$, tenemos que $(\lambda - t)f(t) = (\lambda - t)g(t)$ y será $f(t) = g(t)$ para cada $t \in [0,1]$ excepto a lo sumo para $t = \lambda$. Esto significa que $f = g$ en $[0,1]$, por tanto $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Si $\lambda \notin [0,1]$ entonces $\lambda - T$ es sobreyectiva. En efecto, la ecuación $\lambda f(t) - tf(t) = g(t)$, $t \in [0,1]$, tiene la solución $f(t) = \dfrac{1}{\lambda - t} g(t)$. Por tanto, si $\lambda \notin (0,1]$ es $\lambda \in \rho(T)$.

Para cualquier $\lambda \in [0,1]$ tenemos que $\lambda - T$ no es sobreyectiva e $\operatorname{Im}(\lambda - T)$ no es densa en X. En efecto, si $g(t) = \lambda f(t) - tf(t)$ tenemos que para $t = \lambda$ es $g(\lambda) = 0$. Por tanto, $\operatorname{Im}(\lambda - T) \subset \{f \in X : f(\lambda) = 0\}$, que no es denso en X, por lo que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = [0,1]$.

3. Consideremos el espacio de Banach $X = C([a,b])$ y sea $A : X \to X$ la aplicación definida por $A(x)(s) = \int_a^b K(s,t)x(t)dt$. Suponemos que $K(s,t)$ es una función real definida en $[a,b] \times [a,b]$ y acotada. Además suponemos que las discontinuidades de $k(s,t)$ se encuentran situadas en un número finito de curvas $\varphi_k(s)$, $k \in \{1, \dots, n\}$, donde $\varphi_k : [a,b] \to [a,b]$ es continua. En esta situación *demostraremos que A es una aplicación compacta.*

Es claro que si $s \in [a,b]$ es fijo entonces la función $K(s,t)$ tiene un número finito de discontinuidades (n a lo sumo) y por tanto existe

$$y(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)dt.$$

Esto significa que existe la función $y = A(x)$, veremos que $y \in X$.

Sea $M = \sup_{s,t \in [a,b]} |k(s,t)|$ y sea G el conjunto de los $(s,t) \in [a,b] \times [a,b]$ tales que existe $k \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $|t - \varphi_k(s)| < \dfrac{\varepsilon}{12Mn}$. Es claro que G es un abierto que contiene a las gráficas de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Por tanto, $F = [a,b] \times [a,b] \setminus G$ es compacto y k es continua en F. Así pues, existe $\delta > 0$ tal que si $|\delta' - \delta''| \leq \delta$ entonces $|k(s',t) - k(s'',t)| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$, para $t \in [a,b]$. En esta situación sería

$$|y(s') - y(s'')| \leq \int_a^b |k(s',t) - k(s'',t)|\, |x(t)| dt.$$

Para evaluar esta integral dividimos $[a,b]$ de la siguiente forma:

$$P = \bigcup_{k=1}^{n}[\{t : |t-\varphi(s')| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\} \cup \{t : |t-\varphi_k(s'')| < \frac{\varepsilon}{12Mn}\}],$$
$$Q = [a,b] \setminus P.$$

Claramente P es la unión de $2n$ intervalos cuya suma de longitudes no pasa de $\frac{\varepsilon}{3M}$. Tenemos que

$$\int_P |k(s',t)-k(s'',t)||x(t)|dt \leq 2M\|x\|\frac{\varepsilon}{3M} = \frac{2\varepsilon}{3}\|x\|$$

y

$$\int_Q |k(s',t)-k(s'',t)||x(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\|x\|(b-a) = \frac{\varepsilon}{3}\|x\|.$$

Por tanto, $|y(s')-y(s'')| \leq \varepsilon\|x\|$ si $|s'-s''| < \delta$. Esto significa que $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y por tanto $y \in X$. Así pues, A está bien definida, además es claro que A es lineal.

Es sencillo comprobar, repitiendo los pasos anteriores, que si $M \subset X$ es acotado, entonces $\{Ax : x \in M\}$ es equicontinuo; es decir, si $s \in [a,b]$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s'-s| < \delta$ se verifica $|A(x)(s) - (A(x)(s')| < \varepsilon$, para cada $x \in M$. Por tanto $A(B_X)$ será relativamente compacto y deducimos que A es compacto.

Si la función $k(s,t)$ es continua y $k(s,t) = 0$ para $t > s$ tenemos que la aplicación A tiene la expresión $A(x) = y$ donde

$$y(s) = \int_a^s k(t,s)\lambda(t)dt.$$

Este tipo de aplicación es compacta y es conocida como el **operador de Volterra.**

4. Consideremos el espacio de Banach $X = C([0,1])$ y sea $A : X \to X$ la aplicación definida por $A(x) = y$, donde $y(s) = \int_0^s x(t)dt$. Tenemos que A es lineal y compacta. Además A es inyectiva y, como Ax es derivable en $[0,1]$, para cada $x \in X$ tenemos que Im $A \subset \{x \in X : x$ es derivable y $x(0) = 0\}$. Por tanto, Im A no es denso en X y deducimos que $0 \in \sigma_r(A)$. Sea $\lambda \neq 0$ y consideremos la ecuación $Ax = \lambda x$. Se tiene que x es derivable en $[0,1]$ y $\int_0^s x(t)dt = \lambda x(s)$. Por tanto, $\lambda x'(s) = x(s)$ y $x(0) = 0$. Entonces $x(t)$ debe ser de la forma $x(s) = ke^{(1/\lambda)s}$ y $x(0) = 0$, por lo que $x = 0$ y tenemos que $\sigma_p = \emptyset$.

Pero como A es compacta, sabemos que $\lambda - A$ es inyectiva si y sólo si $\lambda - A$ es sobreyectiva. Así pues, si $\lambda \neq 0$ se verifica $\lambda \in \rho(A)$ y tenemos que $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$, $\sigma_c(A) = \sigma_p(A) = \emptyset$ y también tendremos que $\sigma_a(A) = \{0\}$.

Tema 14

Operadores en espacios de Hilbert

14.1 Introducción. El adjunto de un operador

Los aspectos introductorios de este tema ya han sido vistos y aquí solo se recordarán cuando sea preciso.
Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal para X. Sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $A(a_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\langle A(a_j), a_i\rangle a_i$.
Denotamos, para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $k_{ij} = \langle A(a_j), a_i\rangle$.

Para cada $x \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned} A(x) &= A\left(\sum_{j=1}^{\infty}\langle x, a_j\rangle a_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, a_j\rangle A(a_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, a_j\rangle \left(\sum_{i=1}^{\infty}\langle A(a_j), a_i\rangle a_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, a_j\rangle \left(\sum_{i=1}^{\infty} k_{ij} a_i\right). \end{aligned}$$

Como $\langle A(x), a_n\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle x, a_j\rangle k_{nj}$ si $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\langle A(x), a_i\rangle a_i = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}\langle x, a_j\rangle\right) a_i.$$

Así pues, A está determinado por la matriz $(k_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Observemos que si $X = \mathbb{K}^n$ o $X = l_2$, y la base ortonormal considerada es la usual, entonces si $x = (x(1), x(2), \cdots)$ tenemos que $\langle x, a_j\rangle = x(j)$ y obtenemos que

$$A(x) = (k_{ij}) \begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si X es n-dimensional tenemos que (k_{ij}) es una matriz de orden n, que representa al operador A. También tenemos que cada matriz de orden n, (k_{ij}), determina un elemento de $C\mathcal{L}(X)$.

En el caso en que la dimensión de X no sea finita no es claro qué tipo de matrices (k_{ij}) determinan un elemento $A \in C\mathcal{L}(X)$. Veamos una condición suficiente. Si (k_{ij}) es una matriz asociada a $A \in C\mathcal{L}(X)$ entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ se verifica $\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle A(a_j), a_i\rangle|^2 \leq \|A(a_j)\|^2 < \infty$. Es decir, cada columna de (k_{ij}) es de l_2.

Consideremos la aplicación dual $A^* : X^* \to X^*$ y sea (k'_{ij}) la matriz asociada a A^*, por medio de la base dual $(f_{ai})_{i\in\mathbb{N}}$ de X^*. Tenemos que $k'_{ij} = \langle A^*(f_{aj}), f_{ai}\rangle$. Como $A^*(f_{aj}) = f_b$, para algún $b \in X$, será

$$\begin{aligned} k'_{i,j} &= \langle f_b, f_{ai}\rangle = \langle a_i, b\rangle = f_b(a_i) = A^*(f_{aj})(a_i) = f_{aj}(A(a_i)) \\ &= f_{aj}(k_{1i}a_1 + k_{2i}a_2 + \dots) = \langle k_{1i}a_1 + k_{2i}a_2 + \dots, a_j\rangle = k_{ji}. \end{aligned}$$

Así pues, podemos decir que (k'_{ij}) es la matriz traspuesta de (k_{ij}). Por este motivo podemos afirmar que para que (k_{ij}) sea la matriz asociada a cierto $A \in C\mathcal{L}(X)$ es necesario que tanto los vectores fila como los vectores columna sean de l_2. Desgraciadamente no se conoce una condición que sea a la vez necesaria y suficiente.

Si $X = l_2$, y en l_2 consideramos la base usual, se vio que si (k_{ij}) es tal que $\sum_{i,j=1}^{\infty} |k_{ij}|^2 = \alpha < \infty$ entonces la matriz está asociada a cierto $A \in C\mathcal{L}(X)$ que es compacto y además $\|A\| \leq (\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

En el caso de $X = l_2$, veamos también otra condición suficiente para que una matriz determine un elemento de $C\mathcal{L}(X)$. Esta condición es conocida como el **test de Schur**. Sean $\sup_{i\in\mathbb{N}}\{\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\} = \beta < \infty$ y $\sup_{j\in\mathbb{N}}\{\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}|\} = \gamma < \infty$. Sea $x \in l_2$, tenemos que

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle k_{ij} \right) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x(j) \right) e_i$$

y

$$|A(x)(i)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}x(j)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|^{\frac{1}{2}}|x(j)||k_{ij}|^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\,|x(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por tanto, $|A(x)(i)|^2 = \beta \sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\,|x(j)|^2$ y será

$$\begin{aligned}\|A(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |A(x)\,(i)|^2 \leq \beta \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|\,|x_j|^2\right)\\ &\leq \beta \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |k_{ij}|\right)|x_j|^2 \leq \beta\gamma \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \beta\gamma\|x\|^2.\end{aligned}$$

Así pues $A \in C\mathcal{L}(X)$ y $\|A\| \leq (\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}$.

Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Recordemos que la aplicación $(x, y) \to \langle A(x), y\rangle$ es sesquilineal; por tanto, existe un único $A' \in C\mathcal{L}(X)$ tal que para cada $x, y \in X$, se tiene que

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A'(y)\rangle.$$

El operador A' es denominado **adjunto de** A.

NOTA 14.1.1

1. Algunas propiedades inmediatas del adjunto son las siguientes: $(A + B)' = A' + B'$; $(\alpha A)' = \overline{\alpha} A'$; $(AB)' = B'A'$ y $(A')' = A$; $\|A'\| = \|A\|$ y $\|A'A\| = \|A\|^2$.

Para cada $x, y \in X$ tenemos que $\langle A'(x), y\rangle = \langle x, (A')'(y)\rangle = \langle x, A(y)\rangle$. Si X fuese un espacio prehilbertiano, la definición de adjunto carece de sentido. En efecto, consideremos $X = c_{00}$, con $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x(j)\overline{y(j)}$, y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ definida por $A(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x(j)}{j}, 0, \dots\right)$.

Entonces si $x, y \in X$ es $\langle A(x), y\rangle = \overline{y(1)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x(j)}{j}$ y en particular para cada $n \in \mathbb{N}$ es $\langle A(e_n), e_1\rangle = \frac{1}{n}$. Por otra parte, si $B \in C\mathcal{L}(X)$ se tiene $\langle e_n, B(e_1)\rangle = \overline{B(e_1)(n)}$. Como $B(e_1) \in X$, no puede ser $B(e_1)(n) = \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; así pues, A carece de adjunto.

2. Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de X. Sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ representado por la matriz (k_{ij}). Entonces $k_{ij} = \langle A(k_j), u_i\rangle = \langle u_j, A'(u_i)\rangle$ y, por tanto, $\langle A'(u_j), u_i\rangle = \langle u_i, A'(u_j)\rangle = \overline{k_{ji}}$. Esto prueba que la matriz que representa a A' es $(\overline{k_{ji}})$.

3. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Trataremos de relacionar $A' \in C\mathcal{L}(X)$ con $A^* \in C\mathcal{L}(X^*)$.

Si $f_y \in X^*$ entonces para cada $x \in X$ es $(A^* f_y)(x) = f_y(A(x)) = \langle A(x), y\rangle = \langle x, A'(y)\rangle$. Esto significa que el representante de $A^* f_y$ es $A'(y)$. Si T es la aplicación lineal conjugada de X^* en X definida por $T(f_y) = y$, tenemos que $TA^*(f_y) = A'(y)$; es decir $TA^*(f_y) = A'T(f_y)$; así pues, $TA^* = A'T$ y será $A' = TA^*T^{-1}$. Esta expresión nos permite estudiar las propiedades de A' por medio de las propiedades de A^*.

14.2 Operadores normales, unitarios y autoadjuntos

DEFINICIÓN 14.2.1 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$.*

a) Se dice que A es ***normal*** *si $A'A = AA'$.*

b) Se dice que A es ***unitario*** *si $A'A = AA' = I$; es decir si $A' = A^{-1}$.*

c) Se dice que A es ***autoadjunto*** *si $A' = A$.*

d) Un operador autoadjunto A se dice que es ***positivo****, en cuyo caso se escribirá $A \geq 0$, si es $\langle A(x), x\rangle \geq 0$ para cada $x \in X$.*

Si A y B son autoadjuntos y $A - B \geq 0$ escribiremos $A \geq B$.

Caracterizaremos ahora los operadores de los tipos anteriores.

TEOREMA 14.2.2 *Sea X un espacio de Hilbert. y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Si A es autoadjunto y $\langle A(x), x\rangle = 0$ para cada $x \in X$ entonces $A = 0$.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, como A es autoadjunto será $\langle A(A(x)), x\rangle = \langle A(x), A(x)\rangle$. Entonces si $x \in X$ sed verifica

$$2\langle A(x), A(x)\rangle = \langle A(x + Ax), x + Ax\rangle - \langle A(x), x\rangle - \langle A(A(x)), A(x)\rangle = 0.$$

Por tanto, $A(x) = 0$ para cada $x \in X$ y será $A = 0$. ∎

TEOREMA 14.2.3 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces A es autoadjunto si y sólo si $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, si A es autoadjunto entonces para cada $x \in X$ se verifica

$$\langle A(x), x\rangle = \langle x, A'(x)\rangle = \langle x, A(x)\rangle = \overline{\langle A(x), x\rangle}.$$

Por tanto, $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, supongamos que $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ si $x \in X$. Entonces, para cada $x, y \in X$ tenemos que

$$4\langle A(x), y\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - i\langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle.$$

Tomando conjugados deducimos que

$$4\langle x, A(y)\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle - i\langle A(y+ix), y+ix\rangle + i\langle A(y-ix), y-ix\rangle.$$

Está claro entonces que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$ y desde aquí se deduce que $A' = A$.

∎

TEOREMA 14.2.4 *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *entonces* A *es autoadjunto si y sólo si* $\langle A(x), y\rangle = \langle A(y), x\rangle$, *para cada* $x, y \in X$.

DEMOSTRACIÓN
En efecto, si A es autoadjunto se verifica

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A'(y)\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \langle A(y), x\rangle.$$

Recíprocamente, si para cada $x, y \in X$ se cumple $\langle A(x), y\rangle = \langle A(y), x\rangle$ entonces

$$\langle A(x), y\rangle = \langle A(y), x\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \langle A'(x), y\rangle.$$

Esto significa que $A(x) = A'(x)$. ∎

TEOREMA 14.2.5 A *es normal si y sólo si para cada* $x, y \in X$ *es* $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle$.

DEMOSTRACIÓN
En efecto, si A es normal y $x, y \in X$ tenemos que

$$\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, A'(A(y))\rangle = \langle x, A(A'(y))\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle.$$

Recíprocamente, si $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle$, para cada $x, y \in X$, tenemos que $\langle A'(x), A'(x)\rangle = \langle x, A(A'(x))\rangle$ y también $\langle A(x), A(x)\rangle = \langle x, A'(A(x))\rangle$. Por tanto, para cada $x \in X$ se tiene $\langle x, (AA' - A'A)(x)\rangle = 0$. Como $(AA' - A'A)' = AA' - A'A$, deducimos que $AA' - A'A$ es autoadjunto y por tanto que $AA' - A'A = 0$. ∎

TEOREMA 14.2.6 A *es normal si y sólo si para cada* $x \in X$ *es* $\|A(x)\| = \|A'(x)\|$.

DEMOSTRACIÓN En efecto, si A es normal y $x \in X$ se cumple $\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle A'(x), A'(x)\rangle = \|A'(x)\|^2$.

Recíprocamente, si $\|A(x)\| = \|A'(x)\|$, para cada $x \in X$, tenemos que $\langle A(x), A(x)\rangle = \langle A'(x), A'(x)\rangle$, para cada $x \in X$. De igual manera que antes podemos deducir que $AA' - A'A = 0$. ∎

TEOREMA 14.2.7 *A es unitario si y sólo si para cada $x, y \in X$ se verifica $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle$.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, si A es unitario será $AA' = A'A = I$; por tanto, $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle$ y $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, A'(A(y))\rangle = \langle x, y\rangle$.

Recíprocamente, si para cada $x, y \in X$ se cumple $\langle A(x), A(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle A'(x), A'(y)\rangle$, tenemos que $AA' = A'A$. Como para cada $x \in X$ se verifica $\langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A'Ax\rangle$, tenemos que $\langle x, (A'A - I)x\rangle = 0$, para $x \in X$. Teniendo en cuenta que $A'A - I$ es autoadjunto, deducimos que $A'A - I = 0$. ∎

TEOREMA 14.2.8 *A es unitario si y sólo si A es una isometría sobreyectiva.*

DEMOSTRACIÓN En efecto, si A es unitario es claro que A es biyectiva y $\|A(x)\|^2 = \langle A(x), A(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Recíprocamente, si A es isometría sobreyectiva tenemos, para cada $x \in X$, que $\langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A'Ax\rangle$. Por tanto, $\langle x, (A'A - I)x\rangle = 0$. Como $A'A - I$ es autoadjunto, se verifica $A'A = I$ y como A es invertible, se cumple $AA' - (AA')(AA^{-1}) = A(A'A)A^{-1} = AA^{-1} = I$. ∎

TEOREMA 14.2.9 *A es unitario si y sólo si para cada base ortonormal $\{a_i\}_{i\in I}$ de X se verifica que tanto $\{A(a_i)\}_{i\in I}$ como $\{A'(a_i)\}_{i\in I}$ son bases ortonormales de X.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, supongamos que A es unitario y que $\{a_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal. Tenemos que para cada $i, j \in I$ se verifica $\langle A(a_i), A(a_j)\rangle = \langle A'(a_i), A'(a_j)\rangle = \langle a_i, a_j\rangle$. Por otra parte, si $\langle x, A(a_i)\rangle = 0$, para cada $i \in I$ tenemos que será $\langle x, A(a_i)\rangle = \langle A'(x), a_i\rangle = 0$ si $i \in I$. Así pues, $A'(x) = 0$ y será $x = 0$. Esto significa que cl $\mathcal{L}(a_i : i \in I) = X$.

Si $\langle x, A'(a_i)\rangle = 0$, para cada $i \in I$, también deducimos que $\langle x, A'(a_i)\rangle = \langle A(x), a_i\rangle = 0$, si $i \in I$. Por tanto, $A(x) = 0$ y será $x = 0$. Así pues, también $\{A'(a_i)\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de X.

Recíprocamente si $\{a_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de X tal que tanto $\{A(a_i)\}_{i\in I}$ como $\{A'(a_i)\}_{i\in I}$ son bases ortonormales, tenemos que si $x \in X$, por la identidad de Parseval, se verifica

$$\|A(x)\|^2 = \sum_{i\in I}\langle A(x), a_i\rangle\langle a_i, A(x)\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, A'(a_i)\rangle\langle A'(a_i), x\rangle = \|x\|^2,$$

ya que $\{A'(a_i)\}_{i\in I}$ es una base de X. Además $A'(A(x)) = A'\left(\sum_{i\in I}\langle A(x), a_i\rangle a_i\right) = \sum_{i\in I}\langle A(x), a_i\rangle A'(a_i) = \sum_{i\in I}\langle x, A'(a_i)\rangle A'(a_i) = x$. Así pues, es claro que A es unitario. ∎

TEOREMA 14.2.10 *Sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ y consideremos la aplicación definida por $\varphi(x,y) = \langle A(x), y\rangle$. Entonces A es autoadjunto si y sólo si φ es hermítica.*

DEMOSTRACIÓN

En efecto, si A es autoadjunto tenemos que $\varphi(x,y) = \langle A(x), y\rangle = \langle x, A'(y)\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \overline{\langle A(y), x\rangle} = \overline{\varphi(y,x)}$.

Recíprocamente si φ es hermítica entonces tenemos que $A(x) = A'(x)$ si $x \in X$.

■

TEOREMA 14.2.11 *Si A sea autoadjunto se verifica que A es positivo si y sólo si la aplicación sesquilineal φ es positiva.*

En efecto, basta observar que $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ si y sólo si $\varphi(x,x) \geq 0$.

NOTA 14.2.12

Sea X un espacio de Hilbert n-dimensional y sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base ortonormal de X. Sea $A : X \to X$ una aplicación lineal y sea (k_{ij}) la matriz asociada respecto de la citada base. Tenemos que A es autoadjunto si y sólo si $k_{ij} = \overline{k_{ji}}$ para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. En este caso, A será positiva si y sólo si

$$\begin{aligned}\langle Ax, x\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, a_j\rangle \left(\sum_{i=1}^{n} k_{ij} a_i\right), \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i\rangle a_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \overline{\langle x, a_i\rangle} \langle x, a_j\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Esto sucede si y sólo si la forma cuadrática definida por la matriz (k_{ij}) es positiva.

En el caso en que $X = \mathbb{K}^n$ y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sea la base usual tenemos que A será positiva si y sólo si $\sum_{i,j=1}^{n} k_{ij} \overline{x(i)}\, \overline{x(j)} \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{K}^n$.

Discutiremos ahora las condiciones para que A sea unitaria. Es claro que A será unitaria si y sólo si $(\overline{k_{ji}})(k_{ij}) = (k_{ij})(\overline{k_{ji}})$ coincide con la matriz unidad. Tenemos que A es invertible si y sólo si $\det(k_{ij}) \neq 0$. En este caso el elemento i, j de A^{-1} es $\dfrac{\mathrm{Adj}(k_{ji})}{\det(k_{ij})}$, donde $\mathrm{Adj}(k_{ji}) = (-1)^{j+i} \det[(k_{ij})$ eliminando la fila j y la columna $i]$.

En la situación finito dimensional la condición $A'A = I$ implica de forma automática que $\det(k_{ij}) \neq 0$ y por tanto que A es invertible (después se verá que esto no es en general cierto en el caso infinito dimensional). De aquí se deduce que $AA' = (AA')(AA^{-1}) = A(A'A)A^{-1} = I$. Por tanto, podemos afirmar que A es unitario si y sólo si $\det(k_{ij}) \neq 0$ y $\overline{k_{ji}}$ coincide con el elemento ji de $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Adj}(k_{ij})}{\det(k_{ij})}$. También podemos afirmar que A es unitario si y sólo si $A'A = I$; es decir

$$\sum_{m=1}^{n} \overline{k_{mi}} k_{mj} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Así pues A es unitario si y sólo si las n columnas de (k_{ij}) forman un sistema ortonormal de $\mathbb{K}^n$. También A es unitario si y sólo si las n filas de (k_{ij}) forman un sistema ortonormal de $\mathbb{K}^n$.

Finalmente estudiaremos las condiciones que caracterizan que A sea normal. Tenemos que A es normal si y sólo si $(\overline{k_{ji}})(k_{ij}) = (k_{ij})(\overline{k_{ji}})$. Es conocido, del álgebra lineal, que la igualdad anterior sucede si y sólo si existe una base ortonormal $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de X tal que la correspondiente matriz asociada a A es diagonal.

Demostraremos que *S es normal si y sólo si para cada base ortonormal $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de X existe un operador unitario B tal que la matriz representante de $B^{-1}AB$ respecto de $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es diagonal.* En efecto, si A es normal, existe una base ortonormal $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de X, tal que la correspondiente matriz asociada a A es diagonal. Sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de X y consideremos $B : X \to X$ definido por $B(b_i) = a_i$. Es sencillo comprobar que B es unitario y si $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$\langle B^{-1}AB(b_j), b_i\rangle = \langle B^{-1}A(a_j), b_i\rangle = \langle B'A(a_j), b_i\rangle = \langle A(a_j), B(b_i)\rangle = \langle A(a_j), a_i\rangle.$$

Por tanto, la matriz de $B^{-1}AB$ respecto de $\{b_1, \ldots, b_n\}$ es diagonal.

Recíprocamente, supongamos que para cada base ortonormal $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de X existe $B : X \to X$ unitario tal que la matriz de $B^{-1}AB$, respecto de $\{b_1, \ldots, b_n\}$, es una matriz diagonal D. Entonces, como B es unitario, si $a_i = B(b_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se verifica que $\{a_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de X y

$$\langle A(a_j), a_i\rangle = \langle A(a_j), B(b_i)\rangle = \langle B'A(a_j), b_i\rangle = \langle B^{-1}A(a_j), b_i\rangle = \langle B^{-1}AB(b_j), b_i\rangle.$$

Por tanto, la matriz asociada a A respecto de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es diagonal y deducimos que A es normal.

NOTA 14.2.13 1.- Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de X. Definimos la aplicación $A : X \to X$ por $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, a_n\rangle a_n$ donde $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de $\mathbb{K}$. Es claro que $A \in C\mathcal{L}(X)$. Además, $A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n}\langle x, a_n\rangle a_n$. Por tanto

$$\begin{aligned} A'(A(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n}\langle A(x), a_n\rangle a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2\langle x, a_n\rangle a_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\langle A'(x), a_n\rangle a_n = A(A'(x)). \end{aligned}$$

Así pues, A es normal. Además, A es unitario si y sólo si $|\alpha_n| = 1$ para cada $\alpha \in \mathbb{N}$. A es autoadjunto si y sólo si $\alpha_n \in \mathbb{R}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. A es autoadjunto positivo si $\alpha_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

2.- Sea X un espacio de Hilbert. Hemos destacado antes que si $A \in C\mathcal{L}(X)$ y X es de dimensión finita entonces de la igualdad $A'A = I$ se deduce que $AA' = I$ y que por tanto A es unitaria. Veremos que esto no sucede así cuando la dimensión de X no es finita.

Consideremos la aplicación $A : l_2 \to l_2$ definida por $A(x) = (0, x(1), x(2), \dots)$. Entonces, $\|A(x)\| = \|x\|$ si $x \in l_2$ y tenemos que $A'(x) = (x(2), x(3), \dots)$. Es claro que $A'(A(x)) = x$ pero $A(A'(x)) = A(x(2), x(3), \dots) = (0, x(2), \dots)$ por tanto $A'A \neq AA'$ y A no es normal.

TEOREMA 14.2.14 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces:*

a) Existen dos únicos operadores autoadjuntos B y C de modo que $A = B + iC$;

b) A es normal si y sólo si $BC = CB$.

c) A es unitario si y sólo si $BC = CB$ y $B^2 + C^2 = I$.

DEMOSTRACIÓN Si $B = \frac{1}{2}(A + A')$ y $C = \frac{1}{2i}(A - A')$, es sencillo comprobar que B y C son autoadjuntos y $A = B + iC$. Si B_1 y C_1 son también autoadjuntos y $A = B_1 + iC_1$ tenemos que $A' = B_1 - iC_1$ y deducimos que $B_1 = \frac{1}{2}(A + A')$ y $C_1 = \frac{1}{2i}(A - A')$.

Si A es normal será $A'A = AA'$; así pues $(B - iC)(B + iC) = (B + iC)(B - iC)$ y deducimos que $BC = CB$. Recíprocamente si $BC = CB$ es sencillo comprobar que $(B - iC)(B + iC) = (B + iC)(B - iC)$ y será $A'A = AA'$.

Si A fuese unitario, de $(B - iC)(B + iC) = I = (B + iC)(B - iC)$ deducimos que $(B^2 + C^2) + i(BC - CB) = I = (B^2 + C^2) + i(CB - BC)$ y por tanto que $B^2 + C^2 = I$ y $CB - BC = 0$. Si ahora A es tal que $CB = BC$ y $B^2 + C^2 = I$ es sencillo comprobar que $A'A = I = AA'$. ■

NOTA 14.2.15 Sea X un espacio de Hilbert y sean $A, B \in C\mathcal{L}(X)$ dos operadores normales. Tenemos que $A + B$ será normal si y sólo si $(A + B)(A + B)' = (A + B)'(A + B)$. Utilizando la normalidad de A y B, esta condición equivale a que $B'A + A'B = AB' + BA'$. Tenemos que AB será normal si y sólo si $(AB)'(AB) = (AB)(AB)'$ y esto equivale a que $B'AA'B = AB'BA'$. El teorema de Fuglede (1.950), que más tarde será probado, afirma que si $N \in C\mathcal{L}(X)$ es normal y $A \in C\mathcal{L}(X)$ conmuta con N entonces A conmuta con N'. Partiendo de este resultado se deduce que si A, B son normales y A, B conmutan entonces también son normales $A + B$ y AB.

14.3 El espectro de los operadores autoadjuntos y normales

Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Recordemos que, si $\alpha \in \mathbb{K}$, se dice que α es un autovalor aproximado de A si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en S_X tal que $\lim(Ax_n - \alpha x_n) = 0$. Si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cierto $x_0 \in X$ tendremos que $Ax_0 - \alpha x_0 = 0$ y será α autovalor de A.

Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de autovalores de A que converge a cierto $\alpha \in \mathbb{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n \in S_X$ tal que $Ax_n - \alpha n x_n = 0$. Tenemos que

$$\|Ax_n - \alpha x_n\| \leq \|Ax_n - \alpha_n x_n\| + \|\alpha_n x_n - \alpha x_n\| = |\alpha_n - \alpha| \, \|x_n\|$$

y deducimos que α es autovalor aproximado.

Mas tarde veremos algún ejemplo de autovalor aproximado que no es límite de sucesión de autovalores. Trataremos ahora de determinar el espectro de A en función de los autovalores y autovalores aproximados de A y A'.

TEOREMA 14.3.1 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$:*

a) $\alpha \in \sigma(A)$ *si y sólo si* $\overline{\alpha} \in \sigma(A')$;

b) $\ker A = (Im\, A')^{\perp}$, *$A$ es inyectiva si y sólo si $Im\, A'$ es denso;*

c) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \overline{\sigma_a(A')} = \sigma_a(A) \cup \overline{\sigma_p(A')}$.

DEMOSTRACIÓN a) $\alpha \in \rho(A)$ si y sólo si $A - \alpha I$ es invertible; es decir si y sólo si existe $B \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $(A - \alpha I)B = I = B(A - \alpha I)$. Tomando adjuntos, deducimos que esto sucede si y sòlo si $B'(A' - \alpha I) = I = (A' - \alpha I)B'$; es decir si y sòlo si $\alpha \in \rho(A')$.

b) $x \in (\text{Im}\, A')^{\perp}$ si y sólo si para cada $y \in X$ es $0 = \langle x, A'(y)\rangle = \langle A(x), y\rangle$. Esto sucede si y sòlo si $A(x) = 0$; es decir $x \in \ker A$. A es inyectiva si y sólo si $\{0\} = \ker A = (\text{Im}\, A')^{\perp}$ y esto sucede si y sòlo si $\text{Im}\, A'$ es densa en X.

c) Si $\alpha \in \sigma(A)$ significa que $A - \alpha I$ no es invertible y esto significa que o bien no existe $\beta > 0$ tal que $\beta\|x\| \leq \|A(x) - \alpha x\|$, para $x \in A$, o bien $\text{Im}(A - \alpha I)$ no es denso. En el primer caso tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe y_n tal que $\|A(y_n) - \alpha y_n\| \leq \frac{1}{n}\|y_n\|$. Si $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ será $\|A(x_n) - \alpha x_n\| \leq \frac{1}{n}$ y deducimos que $\alpha \in \sigma_a(A)$. En el segundo caso tenemos que $\overline{A' - \overline{\alpha} I}$ no es inyectiva. Así pues, $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A')$. Por tanto, $\sigma(A) \subset \sigma_a(A) \cup \overline{\sigma_p(A')}$. Por otra parte, es claro que $\sigma_a(A) \subset \sigma(A)$ y como $\overline{\sigma_p(A')} \subset \overline{\sigma(A')} = \sigma(A)$ tenemos que $\sigma(A) = \sigma_a(A) \cup \overline{\sigma_p(A')}$.

Si $\alpha \in \sigma(A)$ entonces $\overline{\alpha} \in \sigma(A')$ y tendremos que o bien $\overline{\alpha} \in \sigma_a(A')$ o bien $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A'')$. Desde aquí se deduce que $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \overline{\sigma_a(A')}$. ∎

TEOREMA 14.3.2 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador normal.*

a) Si $\alpha \in \sigma_p(A)$ y x es autovector de A asociado a α entonces $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A')$ y x es autovector de A' asociado a $\overline{\alpha}$;

b) Autovectores de A correspondientes a autovalores distintos son ortogonales;

c) $\sigma(A) = \sigma_a(A)$.

DEMOSTRACIÓN a) Sea $A(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in X$, $x \neq 0$. Entonces $\|A'(x) - \overline{\alpha}x\| = \|(A - \alpha I)'(x)\| = \|(A - \alpha I)(x)\| = \|A(x) - \alpha x\| = 0$. Así pues $A'(x) = \overline{\alpha}x$.

b) Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$; $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$; $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $A(x_1) = \alpha_1 x_1$ y $A(x_2) = \alpha_2 x_2$. Entonces, $\alpha_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \alpha x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, A'(x_2)\rangle = \langle x_1, \overline{\alpha}_2 x_2\rangle = \alpha_2\langle x_1, x_2\rangle$ y deducimos que $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

c) Sea $\alpha \in \sigma(A)$ entonces o bien $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A')$ o bien $\alpha \in \sigma_a(A)$. Si $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A')$, como A' es normal se tiene $\alpha \in \sigma_p(A) \subset \sigma_a(A)$; así pues, se verifica $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. ∎

NOTA 14.3.3 1. Sean X un espacio de Hilbert separable y sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal. Sea $A : X \to X$ la aplicación definida por $A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\langle x, a_i\rangle a_i$, donde $x \in X$ y $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Se probó que $A \in C\mathcal{L}(X)$ y que A es normal; así pues, $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. Vamos a demostrar que $\sigma_p(A) = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ y que $\sigma(A) = \mathrm{cl}(\sigma_p(A))$.

En efecto, tenemos que $A(a_i) = \alpha_i a_i$. Por tanto, $\alpha_i \in \sigma_p(A)$ si $i \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $\alpha \in \sigma_p(A)$, existe $x \neq 0$ tal que

$$\alpha \sum_{i=1}^{\infty}\langle x, a_i\rangle a_i = \alpha x = A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\langle x, a_i\rangle a_i,$$

por lo que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple $\alpha\langle x, a_i\rangle = \alpha_i\langle x, a_i\rangle$. Como $x \neq 0$, existe i_0 tal que $\langle x, a_{i_0}\rangle \neq 0$ y será pues $\alpha = \alpha_{i_0}$. Por tanto $\sigma_p(A) = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Si $\alpha \notin \mathrm{cl}(\sigma_p(A))$, existirá $\delta > 0$ tal que $|\alpha - \alpha_i| \geq \delta$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Entonces, si $x \in S_X$ se verifica

$$\begin{aligned}\|A(x) - \alpha x\|^2 &= \|\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i - \alpha)\ \langle x, a_i\rangle a_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i - \alpha|^2|\langle x, a_i\rangle|^2 \geq \delta^2\|x\|^2 = \delta^2.\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha \notin \sigma_a(A)$.

DEFINICIÓN 14.3.4 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$, se define el* ***rango numérico*** *de A por $w(A) = \{\alpha \in \mathbb{K} : \alpha = \langle Ax, x\rangle$ para algún $x \in S_X\}$.*

TEOREMA 14.3.5 *Sean X un espacio de Hilbert y $A \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces:*

a) $\alpha \in w(A)$ *si y sólo si* $\overline{\alpha} \in w(A')$;

b) $\sigma(A) \subset cl(w(A))$.

DEMOSTRACIÓN a) $\alpha = \langle A(x), x\rangle$ si y sólo si $\overline{\alpha} = \langle x, A(x)\rangle = \langle A'(x), x\rangle$;

b) Sea $\alpha \in \sigma(A)$, entonces o bien $\alpha \in \sigma_a(A)$ o bien $\overline{\alpha} \in \sigma_p(A')$. Si $\alpha \in \sigma_a(A)$ existirá $(x_n) \in S_X$ tal que $\lim \|Ax_n - \alpha x_n\| = 0$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $|\langle A(x_n), x_n\rangle - \alpha| = |\langle A(x_n) - \alpha x_n, x_n\rangle| \leq \|A(x_n) - \alpha x_n\|$, resulta que $\lim\langle A(x_n), x_n\rangle = \alpha$ y esto prueba que $\alpha \in \mathrm{cl}(w(A))$. Si $\alpha \in \sigma_p(A')$ se tiene $\overline{\alpha} \in \mathrm{cl}(w(A'))$, entonces es claro que $\alpha \in \mathrm{cl}(w(A))$. ∎

NOTA 14.3.6 1. Si A es un operador autoadjunto entonces para cada $x \in X$ es $\langle A(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ y por tanto $w(A) \subset \mathbb{R}$. Si A es autoadjunto deducimos que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. No obstante, puede suceder que $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ y no sea A autoadjunto. Por ejemplo si $X = \mathbb{C}^2$ y $A(x) = (x(1) + x(2), x(2))$ entonces $\sigma(A) = \{1\}$ pero $A'(x) = (x(1), x(1) + x(2))$.

2. Si A es unitario tenemos que $AA' = A'A = I$ y $\|A\| = \|A'\| = 1$; así pues, si $x \in S_X$ se cumple $|\langle A(x), x\rangle| \leq \|A\| \, \|x\|^2 = 1$, por lo que $w(A) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$. Como $A^{-1} = A'$ tenemos que $0 \notin \sigma(A)$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $0 < |\lambda| < 1$ entonces $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > 1$ y será $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(A')$. Como $A - \lambda I = \lambda A(\lambda^{-1}I - A')$ y como λA y $\lambda^{-1}I - A'$ son invertibles se tiene que $A - \lambda I$ es invertible. Así pues, si $0 < |\lambda| < 1$ tenemos que $\lambda \notin \sigma(A)$ y esto prueba que $\sigma(A) \subset S_{\mathbb{C}}$.

3. El que un operador $A \in C\mathcal{L}(X)$ sea normal no supone, en principio, restricción para su espectro. En efecto, sea $E \subset \mathbb{K}$ cualquier subconjunto compacto y $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de E. Consideremos $A : l_2 \to l_2$ definido por $A(x) = (\alpha_1 x(1), \alpha_2 x(2), \cdots)$. Se verifica que A es normal y es sencillo comprobar que $\sigma_p(A) = \{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $\sigma(A) = E$.

Recordemos que dado $A \in C\mathcal{L}(X)$ se definía el radio espectral de A por $r_A = sup\{|\alpha| : \alpha \in \sigma(A)\}$. De manera análoga, podemos definir el radio numérico de A por $R_A = sup\{|\alpha| : \alpha \in w(A)\}$. Como $\sigma(A) \subset \mathrm{cl}(w(A))$ y si $x \in S_X$ se tiene $|\langle A(x), x\rangle| \leq \|A\|$, deducimos que $r_A \leq R_A \leq \|A\|$.

LEMA 14.3.7 *Sea X un espacio de Hilbert complejo y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ entonces:*

i) $\|A\| \leq 2R_A$;

ii) $R_{A^2} \leq (R_A)^2$.

DEMOSTRACIÓN Probaremos que para cada $x \in X$ se verifica que $\|A(x)\|^2 + |\langle A^2(x), x\rangle| \leq 2R_A\|A(x)\| \, \|x\|$. Para esto probaremos que si $x \in X$ se verifica

$$|\langle A(x), A(x)\rangle + \langle A^2(x), x\rangle| \leq 2R_A\|A(x)\| \, \|x\|.$$

Sea $\theta = \arg\langle A^2(x), x\rangle$. Entonces $e^{-i\theta}\langle A^2(x), x\rangle = |\langle A^2(x), x\rangle|$. Para $x \in X$ y $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle A(x), A(x)\rangle + \langle A^2(x), x\rangle &= \tfrac{1}{2}\big(\langle tA^2(x) + t^{-1}A(x), tA(x) + t^{-1}x\rangle \\ &\qquad -\langle tA^2(x) - t^{-1}A(x), tA(x) - t^{-1}x\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}(\langle A(tA(x) + t^{-1}x), tA(x) + t^{-1}x\rangle \\ &\qquad -\langle A(tA(x) - t^{-1}x), tA(x) - t^{-1}x\rangle).\end{aligned}$$

Así pues,

$$|\langle A(x), A(x)\rangle + \langle A^2(x), x\rangle| \leq \frac{1}{2}R_A(\|tA(x) + t^{-1}x\|^2 + \|tA(x) - t^{-1}x\|^2).$$

Por la identidad del paralelogramo esto será igual a $R_A(t^2\|A(x)\|^2+t^{-2}\|x\|^2)$. Si $A(x)=0$ entonces ambos lados de la desigualdad son cero. Para $A(x)\neq 0$, sea $t^2=\frac{\|x\|}{A(x)}$. Entonces tenemos que $|\langle A(x),A(x)\rangle+\langle A^2(x),x\rangle|\leq 2R_A\|A(x)\|\ \|x\|$ y, como hemos supuesto que $\langle A^2(x),x\rangle\geq 0$, deducimos que

$$\|A(x)\|^2+\langle A^2(x),x\rangle\leq 2R_A\|A(x)\|\ \|x\|$$

y que $\|A(x)\|^2\leq 2R_A\|A(x)\|\ \|x\|$. Por tanto $\|A(x)\|\leq 2R_A\|x\|$ y será $\|A\|\leq 2R_A$. Si $x\in S_X$ entonces $|\langle A^2(x),x\rangle|+\|A(x)\|^2-2R_A\|A(x)\|\leq 0$; es decir $|\langle A^2(x),x\rangle|+(\|A(x)\|-R_A)^2\leq (R_A)^2$. Por tanto $|\langle A^2(x),x\rangle|\leq (R_A)^2$ si $x\in S_X$ y deducimos que $R_{A^2}\leq (R_A)^2$. ∎

NOTA 14.3.8 Si X es un espacio de Hilbert real entonces los resultados del teorema anterior no necesariamente tienen que ser ciertos, ni siquiera cuando A es normal. Consideremos $X=\mathbb{R}^2$ y sea $A:X\to X$ la aplicación definida por $A(x)=(x(2),-x(1))$ entonces $A'=-A$, $A^2=-I$, $\|A\|=R_{A'}=1$, pero $R_A=0$.

Cuando X es complejo la desigualdad $\|A\|\leq 2R_A$ puede llegar a ser igualdad. Consideremos $X=\mathbb{C}^2$ y sea $A:X\to X$ la aplicación definida por $A(x)=(x(1),0)$; es claro que $\|A\|=1=2R_A$. En el caso en que A sea un operador normal probaremos que esto no sucede.

TEOREMA 14.3.9 *Sea X un espacio de Hilbert complejo y sea $A\in\mathcal{CL}(X)$ un operador normal. Entonces $\|A\|=R_A=r_A$ y existe $\alpha\in\sigma_a(A)$ tal que $|\alpha|=\|A\|$.*

DEMOSTRACIÓN En primer lugar probaremos que si $j=2^n$, $n=0,1,\dots,$ entonces $\|A^j\|=\|A\|^j$. Lo haremos por inducción sobre n. Para $n=0$ el resultado es claro. Si es verdadero para n entonces si $x\in X$ tenemos que $\|A^{2^{n+1}}(x)\|=\|A^{2^n}(A^{2^n}(x))\|=\|(A^{2^n})'(A^{2^n}(x))\|$, ya que A^{2^n} es normal. Así pues, $\|A^{2^{n+1}}\|=\|(A^{2^n})'A^{2^n}\|=(\|A^{2^n}\|)^2=(\|A\|^{2^n})^2=\|A\|^{2^{n+1}}$. Podemos deducir también que para 2^n es $R_{A^{2^n}}\leq (R_A)^{2^n}$. Por tanto si $j=2^n$ se verifica $\|A\|=\|A^j\|^{\frac{1}{j}}\leq (2R_{A^j})^{\frac{1}{j}}\leq 2^{\frac{1}{j}}R_A$. Tomando límites cuando $n\to\infty$, deducimos que $\|A\|\leq R_A$. Como también es $R_A\leq\|A\|$, será $\|A\|=R_A$.

Consideremos una sucesión $(x_n)\subset S_X$ tal que $\lim|\langle A(x_n),x_n\rangle|=\|A\|$. Podemos suponer que para alguna subsucesión, que denotamos igual, se verifica que $\lim\langle A(x_n),x_n\rangle=\alpha$, con $|\alpha|=\|A\|$. Entonces

$$0\leq\|A(x_n)-\alpha x_n\|^2=\langle A(x_n),A(x_n)\rangle-\alpha\langle x_n,A(x_n)\rangle-\overline{\alpha}\langle x_n,A(x_n)\rangle)+|\alpha|^2\langle x_n,x_n\rangle.$$

La segunda parte de la desigualdad, cuando $n\to\infty$, converge a $\|A\|^2-2\alpha\overline{\alpha}+|\alpha|^2=0$. Así pues, $\lim\limits_{n\to\infty}\|A(x_n)-\alpha x_n\|=0$ y $\alpha\in\sigma_a(A)$. Por tanto $r_A\geq\|A\|$ y será $\|A\|=r_A$. A esta igualdad se puede llegar también por la fórmula del radio espectral, ya que para $j=\frac{1}{2^n}$, $n=0,1,2,\dots$ es $r_A=\lim\limits_j\|A^j\|^{\frac{1}{j}}=\lim\limits_j(\|A\|^j)^{\frac{1}{j}}=\|A\|$. ∎

TEOREMA 14.3.10 *Sea X un espacio de Hilbert (real o complejo) y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sean m_A y M_A respectivamente el ínfimo y el supremo del rango numérico $w(A) \subset \mathbb{R}$. Entonces $m_A, M_A \in \sigma_a(A)$ y $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$. Además $r_A = R_A = max\{|m_A|, |M_A|\} = \|A\|$.*

DEMOSTRACIÓN Veamos que $m_A \in \sigma_a(A)$. Tenemos que existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_X$ tal que $\lim\langle A(x_n), x_n\rangle = m_A$. Sea $B = A - m_A I$ entonces $\lim \langle Bx_n, x_n\rangle = 0$. Además, si $x \in S_X$ se verifica $\langle Bx, x\rangle = \langle Ax - m_A x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - m_A \geq 0$ y deducimos que $B \geq 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n = \langle B(x_n), B(x_n)\rangle B(x_n) - \langle B^2(x_n), B(x_n)\rangle x_n$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ es $0 \leq \langle B(y_n), y_n\rangle = \langle B^2(x_n), B(x_n)\rangle$ y

$$\langle B^2(x_n), B(x_n)\rangle\langle B(x_n), x_n\rangle - |\langle B(x_n), B(x_n)\rangle|^2 \geq 0.$$

Por tanto, $|\langle B(x_n), B(x_n)\rangle|^2 \leq \langle B^2(x_n), B(x_n)\rangle\ \langle B(x_n), x_n\rangle$ y deducimos que $\|B(x_n)\|^4 \leq \|B^2\| \cdot \|B\|\langle B(x_n), x_n\rangle$. Así pues, $\lim \|A(x_n) - m_A x_n\|^4 = 0$ y será $m_A \in \sigma_a(A)$.

De forma análoga, considerando $C = M_A I - A$, se prueba que $M_a \in \sigma_a(A)$.

Por otra parte tenemos que $\sigma(A) \subset \mathrm{cl}(w(A)) \subset [m_A, M_A]$. Como $m_A, M_A \in \sigma(A)$ deducimos que $r_A = max(|m_A|, |M_A|) = R_A$.

Finalmente observemos que $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, y\rangle| : x, y \in S_X\}$. Como A es autoadjunto, para cada $x, y \in S_X$ tenemos que

$$\begin{aligned} Re\langle A(x), y\rangle &= \tfrac{1}{2}\left(\langle A(x), y\rangle + \overline{\langle A(x), y\rangle}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), x\rangle\right) \\ &= \tfrac{1}{4}(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle) \\ &\leq \tfrac{1}{4}R_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = \tfrac{1}{2}R_A(\|x\|^2 + \|y\|^2) = R_A. \end{aligned}$$

Sea $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta}\langle A(x), y\rangle = |\langle A(x), y\rangle|$. Entonces $Re\langle A(e^{i\theta}x), y\rangle = |\langle A(x), y\rangle|$ y deducimos que $|\langle A(x), y\rangle| \leq R_A$, para cada $x, y \in S_X$. Esto prueba que $\|A\| \leq R_A$ y, por tanto, que $\|A\| = R_A$. ∎

COROLARIO 14.3.11 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces $\|A\| = (r_{A'A})^{\frac{1}{2}}$.*

DEMOSTRACIÓN Tenemos que $A'A$ es un autoadjunto y será $\|A'A\| = r_{A'A}$ pero como $\|A'A\| = \|A\|^2$ deducimos que $\|A\| = (r_{A'A})^{\frac{1}{2}}$. ∎

NOTA 14.3.12 1. Sea $X = \mathbb{K}^2$ y sea $A : X \to X$ la aplicación definida por $A(x) = (\alpha x(1) + x(2), \alpha x(2))$ donde $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces la matriz representante de A es

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

y $\sigma(A) = \alpha$. Así pues, $r_A = |\alpha|$. La matriz representante de $A'A$ es

$$\begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \overline{\alpha} \\ \alpha & |\alpha|^2 + 1 \end{bmatrix}$$

y se verifica $\sigma(A'A) = |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{|\alpha|^2 + \frac{1}{4}}$. Por tanto,

$$\|A\| = \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{|\alpha|^2 + \frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observemos que en este caso es $r_A < \|A\|$.

2. Sea X un espacio de Hilbert con $\dim X = n$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces el espectro de cada $A \in C\mathcal{L}(X)$ consiste de n autovalores (aquí consideramos la multiplicidad). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces el espectro de cada $A \in C\mathcal{L}(X)$ que sea autoadjunto consiste de n autovalores reales. En efecto, sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ una base ortonormal de X. Sea $A : X \to X$ una aplicación lineal y sea $M = (k_{ij})$ la matriz representante de A, $k_{ij} = \langle A(a_j), a_i \rangle$. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $\alpha \in \sigma(A)$ si y sólo si $A - \alpha I$ no es invertible. Es decir, si y sólo si $\det[M - \alpha I] = 0$. Esto nos da una ecuación polinómica en α de grado n denominada **ecuación característica** (el correspondiente polinomio es denominado **polinomio característico**). Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ entonces el polinomio característico tiene raíces complejas cuya suma de multiplicidades es n. Si α_0 es una de estas raíces tenemos que el siguiente sistema en $x(1), \ldots, x(n)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
(k_{11} - \alpha_0)x(1) & + & k_{12}x(2) & + & \cdots & + & k_{1n}x(n) & = 0 \\
k_{21}x(1) & + & (k_{22} - \alpha_0)x(2) & + & \cdots & + & k_{2n}x(n) & = 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
k_{n1}x(1) & + & k_{n2}x(2) & + & \cdots & + & (k_{nn} - \alpha)x(n) & = 0
\end{array}$$

tendrá alguna solución no trivial $x_0 = (x_0(1), \ldots, x_0(n))$, esto significa que α_0 es un autovalor y que $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_0(i)a_i$ es un autovector asociado a α_0.

Sea ahora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sea $\alpha_0 = a + ib$ una raíz del polinomio característico de $M = (k_{ij})$, matriz representante de A. Tenemos que $\overline{k_{ij}} = k_{ij}$ y probaremos que $b = 0$. Si I denota la matriz identidad tenemos que $\det((M - aI)^2 + b^2 I) = \det(M - (a + ib)I)\det(M - (a - ib)I) = 0$. Entonces existen $x_0(1) \ldots x_0(n)$ en $\mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$[(M - aI)^2 + b^2 I] \begin{bmatrix} x_0(1) \\ \vdots \\ x_0(n) \end{bmatrix} = [0, \cdots, 0].$$

Sea $x_0 = \sum_{i=1}^{n} x_0(i)a_i$. Entonces $x_0 \neq 0$ y $(A - aI)^2(x_0) + b^2 x_0 = 0$. Así pues,

$$-b^2\|x_0\|^2 = \langle -b^2 I(x_0), x_0 \rangle = \langle (A - aI)^2(x_0), x_0 \rangle = \langle (A - aI)(x_0), (A - aI)(x_0) \rangle \geq 0,$$

ya que A es autoadjunto. Esto prueba que $b = 0$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.

3. Sea X un espacio de Hilbert n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces:

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A es normal si y sólo si existe una base ortonormal en X formada de autovectores de A.

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A es autoadjunto si y sólo si existe una base ortonormal en X formada de autovectores de A.

Vamos a demostrar i) y ii).

Supongamos que A es normal. Es conocido, de álgebra lineal, que la matriz representante de A respecto de cualquier base ortonormal es diagonalizable. Esto significa que si $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ son los autovalores y cada α_j se repite n_j veces podemos hallar n_j vectores independientes en el núcleo de $A - \alpha_j I$ y por el proceso de Gram-Schmidt podemos determinar una base ortonormal de $\ker(A - \alpha_j I)$ formada de n_j vectores. Como A es normal tenemos que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Además $n_1 + \cdots + n_j = n$. Por tanto, juntando estas bases obtendremos una base ortonormal de X formada de autovectores.

De manera similar se demuestra que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y A es autoadjunto entonces existe base ortonormal de X formada de autovectores de A.

Supongamos que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una base ortonormal de X formada de autovectores de A y que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Entonces, si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ son los correspondientes autovalores tenemos para $x \in X$ que

$$\begin{aligned}\langle x, A'(a_i)\rangle &= \langle A(x), a_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, a_j\rangle A(a_j), a_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \langle x, a_j\rangle \alpha_j a_j, a_i\rangle \\ &= \alpha_i \langle x, a_i\rangle = \langle x, \overline{\alpha}_i a_i\rangle.\end{aligned}$$

Así pues, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se verifica $A'(a_i) = \overline{\alpha}_i a_i$ y será $A'A(a_i) = |\alpha_i|^2 a_i = AA'(a_i)$. De aquí ya se deduce que $A'A = AA'$ y que A es normal. En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tendremos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son reales y que, por tanto $A'(a_i) = \overline{\alpha}_i a_i = \alpha_i a_i = A(a_i)$, si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Así pues, $A' = A$ y será A autoadjunto.

4. Observemos que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ existen operadores normales que no tienen autovalores. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^2$ y $A : X \to X$ está definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

tenemos que A es normal pero no tiene autovalores.

5. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sean m_A y M_A el menor y mayor de los valores de $\sigma_a(A)$, respectivamente. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión libre en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $F_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$, $m_n = \text{mín}\,\{\langle A(x), x\rangle : x \in F_n, \|x\| = 1\}$ y $M_n = \text{máx}\{\langle A(x), x\rangle : x \in F_n, \|x\| = 1\}$. Entonces, $m_A \le \cdots \le m_{n+1} \le m_n \cdots \le m_1 = M_1 \le M_2 \le \cdots \le M_n \le M_{n+1} \le \cdots \le M_A$. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal obtenida por el proceso de Gram-Schmidt a partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces para cada n se tiene que m_n y M_n son respectivamente la menor y la mayor de las raíces del siguiente polinomio de grado

n en λ:

$$\det \begin{pmatrix} \langle A(a_1), a_1\rangle - \lambda & \langle A(a_2), a_1\rangle & \cdots & \langle A(a_n), a_1\rangle \\ \langle A(a_1), a_2\rangle & \langle A(a_2), a_2\rangle - \lambda & \cdots & \langle A(a_n), a_2\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle A(a_1), a_n\rangle & \langle A(a_2), a_n\rangle & \cdots & \langle A(a_n), a_n\rangle - \lambda \end{pmatrix}$$

Vamos a ver ahora que si $\mathcal{L}(x_n)$ es denso en X entonces $\lim m_n = m_A$ y $\lim M_n = M_A$. Este resultado, que pasamos ahora a demostrar, es conocido como el teorema de Riesz (1908). Demostraremos sólo las afirmaciones acerca de de m_n y m_A. Las correspondientes a M_n y M_A tienen una demostración similar.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que F_n es finito dimensional y su esfera unidad será compacta. Por tanto, la función continua $\langle A(x), x\rangle$ alcanza su mínimo valor m_n en algún $z_n \in F_n$ con $\|z_n\| = 1$, $m_n = \langle A(z_n), z_n\rangle$. Como $F_n \subset F_{n+1}$, es claro que $m_{n+1} \leq m_n$ y, como $m_A = \inf\{\langle A(x), x\rangle : x \in S_X\}$, será $m_A \leq m_n$ para cada n. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y consideramos la aplicación $q_n : F_n \to \mathbb{K}$ definida por $q(x) = \langle A(x), x\rangle - m_n\langle x, x\rangle$, para $x \in F_n$. Tenemos que $q(x) \geq 0$ y $q(z_n) = 0$; es decir, q alcanza el mínimo valor en z_n. Para cada $t \in \mathbb{R}$ y cada $x \in F_n$ tenemos que $z_n + tx \in F_n$ y

$$\begin{aligned} q(z_n + tx) &= \langle A(z_n + tx),\ z_n + tx\rangle - m_n\langle z_n + tx, z_n + tx\rangle \\ &= (\langle A(x), x\rangle - m_n\langle x, x\rangle)t^2 + 2Re(\langle A(z_n), x\rangle - m_n\langle z_n, x\rangle)t. \end{aligned}$$

Como $q(z_n + tx)$ tiene un mínimo en $t = 0$, esto significa que la derivada en $t = 0$ es cero es decir que $Re\langle A(z_n), x\rangle - m_n\langle z_n, x\rangle = 0$.

En el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ podemos reemplazar x por ix y deducir que $\mathrm{Im}(\langle A(z_n), x\rangle - m_n\langle z_n, x\rangle) = 0$.

Hemos, por tanto, probado que si $x \in F_n$ se cumple $\langle A(z_n), x\rangle - m_n\langle z_n, x\rangle = 0$. En particular, como $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset F_n$ tenemos que $\langle A(z_n), a_j\rangle - m_n\langle z_n, a_i\rangle = 0$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que $z_n \in F_n$ y se verifica $z_n = \sum_{j=1}^{n} b_j a_j$ con $b_j = \langle z_n, a_j\rangle$ y $\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 = \|z_n\|^2 = 1$. Por tanto, $\sum_{j=1}^{n} b_j\langle A(a_j), a_j\rangle - m_n a_i = 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto significa que el sistema lineal, de n ecuaciones en las incógnitas $y_1, \ldots, y_n$,

$$\sum_{j=1}^{n}\langle A(a_j), a_j\rangle y_j - \lambda y_i = 0$$

tiene para $\lambda = m_n$ la solución no trivial $c_1, \ldots, c_n$ y $\sum_{j=1}^{n} c_j\langle A(a_j), a_j\rangle - \alpha_0 c_i = 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $t_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2)^{\frac{1}{2}}} a_j$. Entonces, $z_0 \in F_n$, $|z_0| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\langle A(z_0), z_0\rangle &= \langle A(\sum_{j=1}^{n} c_j a_j), \sum_{i=1}^{n} c_i a_i\rangle \frac{1}{(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \langle \sum_{j=1}^{n} c_j A(a_j), a_i\rangle \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \sum_{j=1}^{n} c_j \langle A(a_j), a_i\rangle \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \alpha_0 c_i \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} |c_i|^2} = \alpha_0.
\end{aligned}$$

Como m_n es el mínimo de $\{\langle A(x), x\rangle : x \in F_n, \|x\| = 1\}$, deducimos que $m_n \leq \alpha_0$.

Finalmente, si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X tenemos que también lo será $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y, por tanto, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será una base ortonormal de X. La sucesión m_n es decreciente y está acotada inferiormente por m_A, por lo que converge a cierto $m_0 \geq m_A$. Si fuese $m_0 > m_A$, por la definición de m_A, tenemos que existe $x_0 \in S_X$ tal que $m_0 > \langle A(x_0), x_0\rangle$, se verifica $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x_0, a_j\rangle a_j$ y por tanto $\lim_n \sum_{j=1}^{n} \langle x_0, a_j\rangle a_j = x_0$, $\lim_n \|\sum_{j=1}^{n} \langle x_0, a_j\rangle a_j\| = \|x_0\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos $y_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} \langle x_0, a_j\rangle a_j}{\|\sum_{j=1}^{n} \langle x_0, a_j\rangle a_j\|}$ y tenemos que $m_0 = \lim m_n \leq \lim \langle A(y_n), y_n\rangle = \langle A(x_0), x_0\rangle < m_0$, lo que es una contradicción. Así pues $m_0 = m_A$.

14.4 Operadores compactos en espacios de Hilbert

TEOREMA 14.4.1 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Entonces si A es compacto se verifica que el adjunto A' es también compacto.*

DEMOSTRACIÓN Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada en X y sea $\alpha > 0$ tal que $\|x_n\| < \alpha$, para $n \in \mathbb{N}$. Se verifica que que $(A'(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión acotada en X y por tanto existe cierta subsucesión $(A(A'(x_{n_j})))_{j\in\mathbb{N}}$ que converge en X. Para cada $i, j \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|A'(x_{n_i}) - A'(x_{n_j})\|^2 &= \langle A'(x_{n_i} - x_{n_j}), A'(x_{n_i} - x_{n_j})\rangle \\ &= \langle AA'(x_{n_i} - x_{n_j}), (x_{n_i} - x_{n_j})\rangle \\ &\leq \| AA'(x_{n_i} - x_{n_j}) \| \; \|x_{n_i} - x_{n_j}\| \\ &\leq 2\alpha \|AA'(x_{n_i}) - AA'(x_{n_j})\|,\end{aligned}$$

y podemos deducir que $(A'(x_{n_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y por tanto convergente.

∎

TEOREMA 14.4.2 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y compacto. Entonces o bien $\|A\|$ o bien $-\|A\|$ es autovalor de A y existe $x_0 \in S_X$ tal que $\langle A(x_0), x_0\rangle = R_A$.*

Además, para $x_0 \in S_X$ se verifica que $\langle A(x_0), x_0\rangle = R_A$ si y sólo si x_0 es autovector que corresponde a un autovalor α con $|\alpha| = \|A\|$.

DEMOSTRACIÓN Sean $m_A = \inf w(A)$ y $M_A = \sup w(A)$. Como A es autoadjunto, m_A y M_A son elementos de $\sigma_a(A)$. Como A es compacto, se tiene que $\sigma_a(A) \subset \sigma_p(A)$. Además como A es autoadjunto se verifica $\|A\| = \text{máx}\{|m_A|, |M_A|\}$. Entonces es claro que o bien $\|A\|$ o bien $-\|A\|$ están en $\sigma_p(A)$; denotemos por α a este autovalor. Si x_0 es un autovector de norma 1 correspondiente a α entonces $|\langle A(x_0), x_0\rangle| = |\langle \alpha x_0, x_0\rangle| = |\alpha| = \|A\| = R_A$, ya que A es autoadjunto.

Recíprocamente, si $x_0 \in S_X$ es tal que $|\langle A(x_0), x_0\rangle| = R_A$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que $|\langle A(x_0), x_0\rangle| \leq \|A(x_0)\| \, \|x_0\| \leq \|A\| = R_A$. Así pues, deducimos que $|\langle A(x_0), x_0\rangle| = \|A(x_0)\| \, \|x_0\|$ y tendrá que ser $A(x_0)$ una combinación lineal de x_0; es decir, existe α tal que $A(x_0) = \alpha x_0$. Entonces $\langle A(x_0), x_0\rangle = \alpha = \|A\|$ y x_0 es autovector asociado a un autovalor α con $|\alpha| = \|A\|$.

∎

TEOREMA 14.4.3 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Si A es no nulo, autoadjunto y compacto entonces:*

i) Existe una sucesión finita o infinita $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales distintos de cero con $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots$ y una correspondiente sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (finita o infinita) ortonormal de modo que $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, a_n\rangle a_n$ si $x \in X$. En la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cada α_i se repite a lo sumo un número infinito de veces. Si el recorrido de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito se verifica que $\lim \alpha_n = 0$.

ii) El conjunto $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es exactamente el conjunto de los elementos no nulos de $\sigma_p(A)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que a_n es un autovector asociado a α_n.

iii) Si $\{b_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una base ortonormal de $\ker A$ *entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{b_\alpha\}_{\alpha\in I}$ constituye una base ortonormal de X formada por autovectores de A.*

DEMOSTRACIÓN i) A tiene un autovalor α_1, con $|\alpha_1| = \|A\|$. Sea a_1 un autovector correspondiente a α_1 con $\|a_1\| = 1$ y sea $F_1 = \mathcal{L}(a_1)$. Si $x \in (\mathcal{L}(a_1))^\perp$ e se cumple $\langle A(x), a_1\rangle = \langle x, A(a_1)\rangle = \langle x, \alpha_1 a_1\rangle = 0$. Por tanto, $A(x) \in F_1^\perp$; esto significa que $A \in C\mathcal{L}(F_1^\perp)$ y es claro que A será compacto y autoadjunto. Si $A_{|F_1^\perp} = 0$ entonces si $x \in X$ se verifica $x = y + z$ con $y \in F_1$, $z \in F_1^\perp$ y

$$A(x) = A(y)+A(z) = A(\langle y, a_1\rangle a_1)+0 = \alpha_1\langle y, a_1\rangle a_1 = \alpha_1\langle y+z, a_1\rangle a_1 = \alpha_1\langle x, a_1\rangle a_1.$$

Por otra parte, si $A_{|F_1^\perp} \neq 0$ tenemos que existirá un autovalor α_2 con $|\alpha_2| = \|A_{|F_1^\perp}\|$. Es claro que $|\alpha_1| \geq \|\alpha_2\|$. Sea $a_2 \in X$ un autovector asociado a α_2 con $\|a_2\| = 1$. Sea $F_2 = \mathcal{L}(a_1 a_2)$. Si $x \in F_2^\perp$ se cumple

$$\langle A(x), a_2\rangle = \langle x, A(a_1)\rangle = \langle x, \alpha_1 a_1\rangle = 0.$$

Análogamente, $\langle A(x), a_2\rangle = 0$, por lo que $A \in C\mathcal{L}(F_2^\perp)$ y será autoadjunto y compacto.

Si $A_{|F^\perp} = 0$ entonces, para cada $x \in X$, se verifica $x = y + z$ con $y \in F_2$, $z \in F_2^\perp$. Por tanto,

$$\begin{aligned} A(x) &= A(\langle y, a_1\rangle a_2 + \langle y, a_2\rangle a_2) = \alpha_1\langle y, a_1\rangle a_1 + \alpha_2\langle y, a_2\rangle a_2 \\ &= \alpha_1\langle x, a_1\rangle a_1 + \alpha_2\langle x, a_2\rangle a_2. \end{aligned}$$

Si $A_{|F_2^\perp} \neq 0$ continuamos con el procedimiento anterior. Si el proceso se detiene en un número finito de pasos tendremos que

$$A(x) = \alpha_1\langle x, a_1\rangle a_1 + \cdots + \alpha_n\langle x, a_n\rangle a_n,$$

para $x \in X$. Si el proceso no se detiene obtenemos una sucesión infinita de número reales no nulos, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots$, también obtenemos un conjunto ortonormal y numerable $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de X, tales que $A(a_n) = \alpha_n a_n$ si $n \in \mathbb{N}$.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $M = \{i \in \mathbb{N} : \alpha_i = \alpha\}$ es infinito tendremos que $\{a_i\}_{i\in M} \subset \ker(A - \alpha I)$, lo que no es posible ya que A es compacto y tiene que ser finita la dimensión de $\ker(A - \alpha I)$. Además, como A es compacto el único punto posible de acumulación de $\sigma_p(A)$ es cero. Esto prueba que si el recorrido de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito entonces $\lim \alpha_n = 0$.

Sea $F = \operatorname{cl}\mathcal{L}(a_i : i \in \mathbb{N})$. Si $x \in F^\perp$ tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\langle A(x), a_i\rangle = \langle x, A(a_i)\rangle = \alpha_i\langle x, a_i\rangle = 0.$$

Así pues, $A \in C\mathcal{L}(F^\perp)$ y es autoadjunto y compacto. Si $x \in F^\perp$ entonces $x \in F_n^\perp$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y por la desigualdad de Schwarz tenemos que $\langle A(x), x\rangle \leq \|A_{|F_n^\perp}\| \, \|x\|^2 = |\alpha_n| \, \|x\|^2$. Esto prueba que $\langle A(x), x\rangle = 0$ si $x \in F^\perp$ y, como A es autoadjunto en $F^\perp$, será $A = 0$ en $F^\perp$. Ahora, para cada $x \in X$, se puede escribir $x = y + z$, con $y \in F$ y $z \in F^\perp$ y tenemos que

$$\begin{aligned} A(x) &= A(y) + A(z) = A(\sum_n \langle y, a_n\rangle a_n) = \sum_n \alpha_n\langle y, a_n\rangle a_n \\ &= \sum_n \alpha_n\langle y + z, a_n\rangle a_n = \sum_n \alpha_n\langle x, a_n\rangle a_n. \end{aligned}$$

ii) Si α es un autovalor no nulo de A y $x \in S_X$ es un autovector asociado a α tenemos que $\alpha x = A(x) = \sum_n \alpha_n \langle x, a_n \rangle a_n$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ fuese $\alpha \neq \alpha_n$ tenemos que $x \perp a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $\alpha x = 0$, lo que no es posible. Por consiguiente, $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ es exactamente el conjunto de los autovalores no nulos de A.

iii) Si $\ker A \neq \{0\}$ podemos tomar una base ortonormal $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $\ker A$. Para cada $\alpha \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que b_α y a_n son autovectores asociados a autovalores distintos; por tanto, $b_\alpha \perp a_n$. Si $x \in X$ es tal que $\langle x, a_n \rangle = 0 = \langle x, b_\alpha \rangle$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in I$, tenemos que $A(x) = \sum_n \alpha_n \langle x, a_n \rangle a_n = 0$ y por tanto $x \in \ker A$. Como $\langle x, b_\alpha \rangle = 0$, si $\alpha \in I$ deducimos que $x = 0$. Esto prueba que $\{b_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base ortonormal de X. ∎

TEOREMA 14.4.4 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y compacto con la representación $A(x) = \sum_n \alpha_n \langle x, a_n \rangle a_n$, para $x \in X$. Para $\alpha \in \mathbb{K}$ con $\alpha \neq 0$ consideremos la ecuación en $x \in X$,*

$$A(x) - \alpha x = y, \tag{14.4.1}$$

donde $y \in X$.

i) Si $\alpha \neq \alpha_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $y \in X$ la ecuación (14.4.1) tiene una solución única dada por

$$x = \frac{1}{\alpha}\Big(\sum_n \Big(\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha} \langle y, a_n \rangle a_n\Big) - y\Big),$$

donde $\|x\| \leq h\|y\|$ siendo h independiente de $y \in X$.

ii) Si $\alpha = \alpha_{j_1} = \cdots = \alpha_{j_m}$ es un autovalor no nulo de A repetido exactamente m veces, entonces para cada $y \in X$ la ecuación (14.4.1) tiene solución en X si y sólo si y es ortogonal a $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\}$. En este caso, cualquier solución $x \in X$ es de la forma

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n \neq j_1, \ldots, j_m} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha} \langle y, a_n \rangle a_n\right) + \lambda_{j_1} a_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m} a_{j_m} - y\right),$$

donde $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_m}$ son escalares arbitrarios.

DEMOSTRACIÓN Sea $y \in X$. Si $x \in X$ es una solución de $A(x) - \alpha x = y$ entonces $x = \frac{1}{\alpha}(A(x) - y) = \frac{1}{\alpha}(\sum_n (\alpha_n \langle x, a_n \rangle a_n) - y)$ y deducimos que $\langle x, a_n \rangle = \frac{1}{\alpha}\alpha_n \langle x, a_n \rangle - \langle y, a_n \rangle$ y que $(\alpha_n - \alpha)\langle x, a_n \rangle = \langle y, a_n \rangle$, para $n \in \mathbb{N}$.

i) Si $\alpha \neq \alpha_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y x es solución de (14.4.1) entonces $\langle x, a_n \rangle = \frac{\langle y, a_n \rangle}{(\alpha_n - \alpha)}$, para $n \in \mathbb{N}$, y tendremos que $x = \frac{1}{\alpha}(\sum_n (\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha} \langle y, a_n \rangle a_n) - y)$.

Por otra parte, si la suma de la derecha es de infinitos términos sabemos que $\lim \alpha_n = 0$ y es claro que existe $\beta > 0$ tal que $\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\right| \leq \beta$, para $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad de Bessel deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\langle y, a_n\rangle\right|^2 \leq \beta^2\|y\|^2.$$

Esto significa que la serie $\sum_n \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\langle y, a_n\rangle a_n$ converge. Ahora es sencillo comprobar que efectivamente

$$x = \frac{1}{\alpha}((\sum_n \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\langle y, a_n\rangle a_n) - y)$$

satisface la ecuación (14.4.1). Por tanto, (14.4.1) tiene solución única. Además tenemos que

$$\|x\| \leq \frac{1}{|\alpha|}(\|\sum_n \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\langle y, a_n\rangle a_n\| + \|y\|) \leq \frac{1}{\alpha}(\beta\|y\| + \|y\|) = \frac{\beta + 1}{|\alpha|}\|y\|$$

ii) Supongamos que $\alpha = \alpha_{j_1} = \cdots = \alpha_{j_m}$ y $\alpha \neq \alpha_i$, para $i \notin \{j_1, \ldots, j_m\}$. Si $x \in X$ es solución de (14.4.1) entonces para $n \notin \{j_1, \ldots, j_m\}$ tenemos, igual que antes, que $\langle x, a_n\rangle = \frac{\langle y, a_n\rangle}{a_n - \alpha}$. Cuando $n \in \{j_1, \ldots, j_m\}$ entonces $\alpha = \alpha_n$ y $\langle y, a_n\rangle = (\alpha_n - \alpha_n)\langle x, a_n\rangle = 0$. Por tanto, para que (14.4.1) tenga solución tiene que ser y ortogonal a $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\}$. En el caso en que y sea ortogonal a $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\}$ es sencillo deducir, como en el apartado anterior, que x tiene que ser de la forma

$$x = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{n \neq j_1, \ldots, j_m} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_n - \alpha}\langle y, a_n\rangle a_n\right) + \lambda_{j_1}a_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_m}a_{j_m} - y\right)$$

donde $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_m}$ son escalares cualesquiera. Por otra parte, razonando como en i), es sencillo comprobar que si la suma de la derecha es de infinitos términos entonces la serie es convergente. Es sencillo comprobar también que dado x de esta forma entonces x resuelve (14.4.1). Finalmente observemos la analogía de este resultado con el teorema de la alternativa de Fredholm. ∎

14.5 Proyecciones ortogonales. Teorema espectral

DEFINICIÓN 14.5.1 *Sea X un espacio de Hilbert. Una proyección $P \in C\mathcal{L}(X)$ se dice que es ortogonal si* $(\ker P) \perp (Im\, P)$.

Si F es subespacio cerrado de X sabemos que $F + F^\perp = X$ y para cada $x \in X$ existen, y son únicos, $y \in F$, $z \in F^\perp$ de modo que $y+z = x$, entonces la aplicación $p_F : X \to X$, $p_F(x) = y$ es una proyección ortogonal tal que $\operatorname{Im} p_F = F$.

Si $p \in C\mathcal{L}(X)$ es proyección ortogonal entonces $\operatorname{Im} p = (\ker p)^\perp$ y $\ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$.

En efecto, es claro que $\operatorname{Im} p \subset (\ker p)^\perp$, si $x \in (\ker p)^\perp$ será $p(x) \in \operatorname{Im} p \subset (\ker p)^\perp$. Por consiguiente, $x - p(x) \in (\ker p)^\perp$. Como $x - p(x) \in \ker p$, se verifica que $x = p(x) \in \operatorname{Im} p$. Por tanto, $\operatorname{Im} p = (\ker p)^\perp$ y deducimos que $(\operatorname{Im} p)^\perp = (\ker p)^{\perp\perp} = \ker p$.

Finalmente, *si F es subespacio cerrado de X tenemos que p_F es la única proyección tal que $\operatorname{Im} p_F = F$.*

En efecto, si $p : X \to X$ es una proyección tal que $\operatorname{Im} p = F$ se verifica $\ker p = F^\perp$. Para $x \in X$ existen y son únicos $y \in F$, $z \in F^\perp$ de modo que $x = y + z$. En este caso, $p(x) = p(y) + p(z) = p(y)$. Como $y \in F = (\ker p)^\perp$ tenemos, igual que antes, que $p(y) = y$; así pues, $p(x) = y = p_F(x)$ y será $p = p_F$.

TEOREMA 14.5.2 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $p \in C\mathcal{L}(X)$ una proyección. Entonces son equivalentes:*

i) *p es proyección ortogonal;*

ii) *$p \geq 0$ (p autoadjunto);*

iii) *p es autoadjunto;*

iv) *p es normal.*

DEMOSTRACIÓN i) $\Rightarrow$ ii) Sea p una proyección ortogonal. Si $x, y \in X$ podemos poner $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ con $\{x_1, y_1\} \subset \operatorname{Im} p$ y $\{x_2, y_2\} \subset \ker p$. Recordemos que $\operatorname{Im} p = (\ker p)^\perp$, $p(x) = x_1$, $p(y) = y_1$. Tenemos que $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x_1), y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$ y que $\langle x, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, p(y_1)\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$. Por tanto $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$ y p es autoadjunto. Además, observemos que $\langle p(x), x\rangle = \langle x_1, x\rangle \geq 0$.

ii) Las implicaciones $\Rightarrow$ iii) y iii) $\Rightarrow$ iv) son inmediatas. Veamos que iv) $\Rightarrow$ i). Si $x \in \ker(p)$ e $y \in \operatorname{Im}(p)$ entonces $p(y) = y$ y $p(x) = 0$; como p es normal, se verifica que $\|p'(x)\| = \|p(x)\| = 0$ y tenemos que $\langle x, y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p'(x), y\rangle = 0$; así pues, $x \perp y$. ∎

TEOREMA 14.5.3 **(Teorema espectral, caso finito dimensional)**

Sea X un espacio de Hilbert finito dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Sean $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y A normal o bien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y A autoadjunto. Entonces si $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son autovalores distintos de A y $p_1, \dots, p_m$ son las proyecciones ortogonales correspondientes a $\ker(A - \lambda_j I)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, se verifica que $I = p_1 + \cdots + p_m$, $A = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$ y $p_i p_j = 0$ si $i \neq j$.

DEMOSTRACIÓN En la situación del enunciado sabemos que existe una base ortonormal, $\{a_1, \dots, a_n\}$ de X, constituida de autovectores de A. Reordenando, si fuese necesario, podemos suponer que $a_1, \dots a_{i_1}$ corresponden al autovalor λ_1 y así sucesivamente $a_{i_{m-1}+1}, \ldots, a_{i_m}$ corresponden al autovalor λ_m. Si $x \in X$ se puede escribir $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, a_j \rangle a_j$ y se verifica $p_1(a_j) = a_j$ si $j \in \{1, \ldots, i_1\}$ y $p_1(a_j) = 0$ si $j > i_1$. De igual manera se puede proceder con $p_2, \ldots, p_m$. Así pues,

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \langle x, a_1 \rangle a_1 + \cdots + \langle x, a_{i_1} \rangle a_{i_1}, \\
p_2(x) &= \langle x, a_{i_1+1} \rangle a_{i_1+1} + \cdots + \langle x, a_{i_2} \rangle a_{i_2},
\end{aligned}
$$

y finalmente deduciremos que $x = p_1(x) + \cdots + p_m(x)$; es decir, $p_1 + \cdots + p_m = I$. Por otra parte si $j \in \{1, \ldots, m\}$ se cumple $A(p_j(x)) = \lambda_j p_j(x)$, por lo que $A(x) = A(p_1(x)) + \cdots + A(p_m(x)) = \lambda_1 p_1(x) + \cdots + \lambda_m p_m(x)$ y $A = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$. Finalmente, es claro que si $i \neq j$ se verifica que $p_i(p_j(x)) = 0$, ya que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es ortogonal. ∎

TEOREMA 14.5.4 **(Teorema espectral, caso autoadjunto compacto)**
Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto, compacto y no nulo. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ la secuencia de autovalores no nulos de A con $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \cdots$ y sean $p_1, p_2, \ldots$ las proyecciones ortogonales correspondientes a $\ker(A - \alpha_1 I), \ker(A - \alpha_2 I), \cdots$.

Entonces, para cada $x \in X$ se verifica que $x = p_0(x) + \sum_{n \geq 1} p_n(x)$, donde p_0 es la proyección ortogonal correspondiente a $\ker A$. *Además $A = \sum_{n \geq 1} \alpha_n p_n$, donde la serie converge en $C\mathcal{L}(X)$ siendo, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\|A - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n p_n\| = |\alpha_{m+1}|$. Además, $p_1, p_2, \cdots$ tienen imagen de dimensión finita y $p_i p_j = 0$ si $i, j \geq 0$, $i \neq j$.*

DEMOSTRACIÓN Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ la sucesión de autovalores no nulos de A, incluyendo las posibles repeticiones. Sabemos que $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales que converge a cero cuando el recorrido es infinito. Además, cada autovalor no nulo de A aparece a lo sumo un número finito de veces en la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y para cada $x \in X$ tenemos que $A(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \langle x, a_n \rangle a_n$, donde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en X con $A(a_n) = \lambda_n a_n$, si $n \in \mathbb{N}$. Hemos denotado a los autovalores no nulos de A por $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_1, \ldots, a_{i_1}$ son los autovectores correspondientes a α_1; $a_{i_1+1}, \cdots, a_{i_2}$ son los autovectores correspondientes a α_2, etc. Entonces, se tiene que $\ker(A - \alpha_1 I) = \mathcal{L}(a_1, \cdots, a_{i_1})$, $\ker(A - \alpha_2 I) = \mathcal{L}(a_{i_1+1}, \cdots, a_{i_2}), \ldots$. Si $x \in X$ tendremos que

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= \langle x, a_1 \rangle a_1 + \cdots + \langle x, a_{i_1} \rangle a_{i_1}, \\
p_2(x) &= \langle x, a_{i_1+1} \rangle a_{i_1+1} + \cdots + \langle x, a_{i_2} \rangle a_{i_2}, \\
&\cdots .
\end{aligned}
$$

Es claro que $p_1 p_2(x) = 0$ y en general que $p_i p_j(x) = 0$ si $i, j \geq 1$ y $i \neq j$.

Sea $\{b_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base ortonormal para $\ker A$. Sabemos que entonces $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{b_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una base ortonormal para X. Denotamos por p_0 la proyección ortogonal correspondiente a $\ker A$. Entonces, si $x\in X$ se verifica

$$x=\sum_{n\geq 1}\langle x,a_n\rangle a_n+\sum_{\alpha\in I}\langle x,b_\alpha\rangle b_\alpha$$

y será $p_0(x)=\sum_{\alpha\in I}\langle x,b_\alpha\rangle b_\alpha$. Por tanto, $x-p_0(x)=\sum_{n\geq 1}\langle x,a_n\rangle a_n=\sum_{n\geq 1}p_n(x)$. Así pues, $x=p_0(x)+\sum_{n\geq 1}p_n(x)$. Entonces, $A(x)=A(p_0(x))+\sum_{n\geq 1}A(p_n(x))=\sum_{n\geq 1}\alpha_n p_n(x)$.

Por otra parte, si $x\in X$ y $m\in\mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|(A-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n p_n)(x)\|^2 &=\|(\sum_{n\geq m+1}\alpha_n p_n)(x)\|^2=\sum_{n\geq m+1}\|\alpha_n p_n(x)\|^2\\ &=|\alpha_{m+1}|^2\sum_{n\geq m+1}\|p_n(x)\|^2\end{aligned}$$

y es fácil comprobar que $\|x\|^2=\|p_0(x)\|^2+\sum_{n\geq 1}\|p_n(x)\|^2$. Así pues,

$$\|(A-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n p_n)(x)\|^2\leq|\alpha_{m+1}|^2\|x\|^2.$$

Sea ahora a_{m+1} un autovector de norma 1 correspondiente a α_{m+1}. Entonces

$$\|(A-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n p_n)(a_{m+1})\|=\|A(a_{m+1})\|=|\alpha_{m+1}|$$

y deducimos que $\|A-\sum_{n=1}^{m}\alpha_n p_n\|=|\alpha_{m+1}|$. Por consiguiente, si el recorrido de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es infinito, como $\lim\alpha_n=0$, podemos afirmar que $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n p_n$ es una serie en $C\mathcal{L}(X)$ que converge a A. ∎

NOTA 14.5.5 Sea X un espacio de Hilbert complejo y sea $A\in C\mathcal{L}(X)$ un operador compacto. Entonces tenemos que $A=\frac{1}{2}(A+A')+i\frac{A-A'}{2i}$. Es sencillo ver que $\frac{A+A'}{2}$ y $\frac{A-A'}{2i}$ son autoadjuntos y compactos. Por consiguiente, del teorema anterior, se deduce que ambos son límite de operadores de imagen finito dimensional; por tanto, también A es límite de operadores de imágenes finito dimensionales.

Recordemos que si X e Y son espacios de Banach tenemos que si $A \in C\mathcal{L}(X,Y)$ es límite de operadores de imagen finito dimensional entonces A es compacto, pero el recíproco no siempre es cierto ni siquiera cuando Y es separable. El recíproco sí es cierto cuando Y es espacio de Banach con base. Ahora también demostraremos que dicho resultado es cierto en el caso de que Y sea un espacio de Hilbert (tanto real como complejo). De esta manera el resultado probado al principio de la nota es un caso particular de éste.

Supongamos que X es de Banach, Y es de Hilbert y $A \in C\mathcal{L}(X,Y)$ es compacto. Tenemos que $\mathrm{cl}\, A(B_X)$ es compacto; por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A(B_X)$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i : \varepsilon) \supset A(B_X)$. Sea $F = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y sea p la proyección ortogonal de Y en F. Recordemos que si $x \in X$ se verifica $\|x - p(x)\| = d(x, F)$; así pues, si $x \in \mathcal{B}_X$ se tiene $\|A(x) - p(Ax)\| = d(A(x), F) \leq \varepsilon$. Por tanto $\|A - pA\| \leq \varepsilon$ y pA tiene imagen finito dimensional.

TEOREMA 14.5.6 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $p \in C\mathcal{L}(X)$ una proyección ortogonal. Entonces:*

i) $\langle p(x), x\rangle = \|p(x)\|^2$ *si* $x \in X$;

ii) $I - p$ *es autoadjunto positivo y si* $p \neq 0$ *es* $\|p\| = 1$;

iii) $Im\, p = \{x \in X : \|p(x)\| = \|x\|\}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $x \in X$. Como p es autoadjunto tenemos que

$$\langle p(x), x\rangle = \langle p(p(x)), x\rangle = \langle p(x), p'(x)\rangle = \langle p(x), p(x)\rangle = \|p(x)\|^2.$$

Es claro que $I - p$ es autoadjunto y que $(I-p)^2 = I - p$. Entonces, si $x \in X$ se cumple

$$\langle (I-p)(x), x\rangle = \langle (I-p)^2(x), x\rangle = \|(I-p)(x)\|^2.$$

Por consiguiente, $I - p \geq 0$. Por otra parte, ya se probó que si $p \neq 0$ se cumple que $\|p\| = 1$. Finalmente, si $x \in \mathrm{Im}\, p$ se verifica $p(x) = x$ y $\|p(x)\| = \|x\|$. Recíprocamente, si $\|p(x)\| = \|x\|$ tenemos que $\|x\|^2 = \|p(x) + x - p(x)\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$, por lo que $\|x - p(x)\|^2 = 0$ y $p(x) = x$. ∎

TEOREMA 14.5.7 *Sea X un espacio de Hilbert y sean $P, Q \in C\mathcal{L}(X)$ dos proyecciones. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $Im(Q) \subset \ker(P) = (Im\, P)^{\perp}$.

ii) $PQ = 0$.

iii) $P + Q$ *es proyección ortogonal.*

Si $P + Q$ es proyección ortogonal entonces $Im(P+Q) = cl\,\mathcal{L}(Im\, P \cup Im\, Q)$

DEMOSTRACIÓN *i)* $\to$ *ii)* Si $\operatorname{Im} Q \subset \ker P$ es claro que $PQ = 0$.

ii) $\to$ *iii)* Si $PQ = 0$ entonces $QP = (PQ)' = 0$ y por tanto $(P+Q)^2 = P^2 + Q^2 = P + Q$. Además, como P y Q son autoadjuntos también lo será $P+Q$; esto prueba que $P+Q$ es una proyección ortogonal.
iii) $\to$ *ii)* Si $P+Q$ es una proyección ortogonal y $x \in \operatorname{Im} Q$ entonces

$$\begin{aligned}\|x\|^2 = \|Q(x)\|^2 &\leq \|Q(x)\|^2 + \|P(x)\|^2 = \langle Q(x), x\rangle + \langle P(x), x\rangle \\ &= \langle (P+Q)(x), x\rangle = \|(P+Q)(x)\|^2 \leq \|x\|^2.\end{aligned}$$

Por tanto, $\|p(x)\| = 0$ y será $x \in \ker P$.

Supongamos que $P+Q$ es una proyección ortogonal y sea $F = \operatorname{cl} \mathcal{L}(\operatorname{Im} P \cup \operatorname{Im} Q)$. Si $x \in X$ tenemos que $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \in F$; por tanto, $\operatorname{Im}(P+Q) \subset F$. Si $x \in \operatorname{Im} Q \subset \ker P$ tenemos que $x = Q(x) = (P+Q)(x)$; por tanto, $x \in \operatorname{Im}(P+Q)$. De manera similar, si $x \in \operatorname{Im} P$ tenemos que $x \in \operatorname{Im}(P+Q)$; así pues, como $\operatorname{Im}(P+Q)$ es cerrado deducimos que $F \subset \operatorname{Im}(P+Q)$. ▪

TEOREMA 14.5.8 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $P, Q \in C\mathcal{L}(X)$ dos proyecciones. Entonces son equivalentes:*

i) *Im*$(Q) \subset$ *Im*$(P) = (\ker P)^{\perp}$.

ii) $PQ = Q$.

iii) $P - Q$ *es una proyección ortogonal.*

iv) $P - Q \geq 0$. *Si $P-Q$ es proyección ortogonal entonces Im$(P-Q) =$ Im$\, P \cap \ker Q$.*

DEMOSTRACIÓN *i)* $\to$ *ii)* Si $\operatorname{Im} Q \subset \operatorname{Im} P$ y $x \in X$ entonces $P(Q(x)) = Q(x)$; así pues, $PQ = Q$.

ii) $\to$ *iii)* Si $PQ = Q$ entonces $QP = (PQ)' = Q' = Q$, por tanto $(P-Q)^2 = P^2 - PQ - QP + Q^2 = P - Q - Q + Q = P - Q$ y, como además $P - Q$ es autoadjunto, deducimos que $P - Q$ es proyección ortogonal.

La implicación *iii)* $\to$ *iv)* es evidente. *iv)* $\to$ *i)* Si $P - Q \geq 0$ y $x \in \ker P$ tenemos que $0 \leq \langle (P-Q)(x), x\rangle = -\langle Q(x), x\rangle$. Por tanto, $\langle Q(x), x\rangle = 0$ y se verifica $\langle Q(x), Q(x)\rangle = \langle Q^2(x), x\rangle = \langle Q(x), x\rangle = 0$. Así pues, $x \in \ker Q$ y por tanto $\operatorname{Im} Q = (\ker Q)^{\perp} \subset (\ker P)^{\perp} = \operatorname{Im} P$.

Supongamos ahora que $P - Q$ es una proyección ortogonal. Sea $x \in X$. Tenemos que $P(x) - Q(x) = P(x) - PQ(x) = P(x - Q(x)) \in \operatorname{Im} P$ y $Q(P(x) - Q(x)) = Q(x) - Q(x) = 0$. Por consiguiente, $\operatorname{Im}(P-Q) \subset \operatorname{Im} P \cap \ker Q$.

Por otra parte, si $x \in \operatorname{Im}(P) \cap \ker(Q)$ entonces $P(x) = x$ y $Q(x) = 0$ y se verifica $x = (P-Q)(x) \in \operatorname{Im}(P-Q)$. ▪

NOTA 14.5.9 Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$. Dado $y_0 \in X$ consideremos la ecuación $A(x) = y_0$, $x \in X$. Sea F un subespacio finito dimensional de X y consideremos la correspondiente proyección ortogonal $p : X \to F$. Nos planteamos ahora la ecuación $p(A(z)) = p(y_0)$, $z \in F$. Pretendemos que la solución de esta última ecuación nos dé información sobre la solución de la primera ecuación. Si fuese $F = \{0\}$ sería $p(y_0) = 0$ y $z = 0$ sería solución de la ecuación, pero esta solución no nos da información sobre la solución de la primera ecuación.

Supongamos ahora que tenemos una sucesión de subespacios finito dimensionales $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $F_n \subset F_{n+1}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es denso en X (en cuyo caso X es separable). Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea p_n la correspondiente proyección ortogonal de imagen F_n y supongamos que $z_n \in F_n$ es tal que $p_n(A(z_n)) = p_n(y_0)$. Si la sucesión (z_n) converge a $z \in X$ de modo que z es solución de $A(x) = y_0$ diremos que (z_n) es una sucesión de **soluciones aproximadas** para $A(x) = y_0$.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos linealmente independientes de X de modo que $\operatorname{cl}\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N}) = X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y $p_n \in C\mathcal{L}(X)$ la correspondiente proyección. Si x_0 es solución de $A(x) = y_0$ deducimos que $A(x_0) - y_0$ será ortogonal a x_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si para cada $n \in \mathbb{N}$ es z_n una solución de $p_n(A(z)) = p_n(y_0)$ tendremos que $p_n(A(z_n) - y_0) = 0$ y será $A(z_n) - y_0$ ortogonal a $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Así pues, si la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cierto $x_0 \in X$ tendremos que x_0 es ortogonal a cada x_n y por tanto es solución de $A(x) = y_0$. En este caso $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de soluciones aproximadas de $A(x) = y_0$.

Este método de obtención de soluciones aproximadas es conocido como el método de Bubnov-Galerkin. En algunas situaciones, este método es de un gran rendimiento.

TEOREMA 14.5.10 *Sea X un espacio de Hilbert separable y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ autoadjunto tal que el ínfimo m_A de su rango numérico es mayor que cero (tales operadores se dice que son definidos positivos).*

Fijamos $y_0 \in Y$ y consideramos la ecuación $A(x) = y_0$, $x \in X$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos linealmente independientes de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y sea p_n la proyección correspondiente a F_n..

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un único $z_n \in F_n$ con $p_n(A(z_n)) = p_n(y_0)$ tal que se verifica que $z_n = k_1x_1 + \cdots k_nx_n$, donde $(k_1, \ldots, k_n)$ es la única solución del sistema

$$\sum_{j=1}^{n} \langle A(x_j), x_i\rangle k_j = \langle y_0, x_i\rangle, \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Si $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ es denso en X entonces $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la única solución x_0 de la ecuación y

$$\|z_n - x_0\| \leq \frac{1}{m_A}\|A(z_n) - y_0\|,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $z \in F_n$ es solución de $p_n(A(z)) = p_n(y_0)$ si y sólo si $A(z) = y_0$ es ortogonal a F_n; es decir, $\langle A(z) - y_0, x_i\rangle = 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, si $z = k_1x_1 + \cdots + k_ny_n$ está en F_n tenemos que z es solución de $p_n(A(z)) = p_n(y_0)$ si y sólo si $\langle A(\sum_{j=1}^{n} k_jx_j), x_i\rangle = \langle y_0, x_i\rangle$, para

$i \in \{1, \ldots, n\}$; es decir, si y sólo si $k_1, \ldots, k_n$ es solución del sistema

$$\langle A(x_1), x_i\rangle k_1 + \cdots + \langle A(x_n), x_i\rangle k_n = \langle y_0, x_i\rangle, \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Veremos que esta solución existe y es única probando que el correspondiente sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial. En efecto, si para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ se verifica $\langle A(\sum_{j=1}^{n} k_j x_j), x_i\rangle = 0$, se tiene $\langle A(z), z\rangle = 0$ para $z = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j$. Como $\|z\|^2 \leq \frac{1}{m_A}\langle A(z), z\rangle$, necesariamente $z = 0$ y $k_1 = \cdots = k_n = 0$.

Sea $k_1, \cdots, k_n$ la única solución de $\langle A(\sum_{j=1}^{n} k_j x_j), x_i\rangle = 0$, $i = 1, \ldots, n$, y sea $z = k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n$. Como $m_A > 0$ tenemos que $0 \notin \sigma(A)$ y A es invertible. Por tanto, existe un único $x_0 \in X$ tal que $A(x_0) = y_0$.

Finalmente trataremos de probar que $\lim z_n = x_0$; para esto introducimos la siguiente función real definida en X por $q(x) = \langle A(x), x\rangle - 2Re\langle x, y_0\rangle$. Si $x, y \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \langle A(x+y), x+y\rangle - 2Re\langle x+y, y_0\rangle \\ &= \langle A(x), x\rangle - 2Re\langle x, y_0\rangle + \langle A(y), y\rangle + \langle A(y), x\rangle + \langle A(x), y\rangle - 2Re\langle y, y_0\rangle \\ &= q(x) + \langle A(y), y\rangle + 2Re\langle A(x) - y_0, y\rangle. \end{aligned}$$

Si $x = x_0$, donde $A(x_0) = y_0$, deducimos que para cada $y \in X$ es $q(x_0 + y) = q(x_0) + \langle A(y), y\rangle$, ya que cualquier $x \in X$ puede escribirse en la forma $x_0 + y$, para algún $y \in X$. Tenemos que para cada $x \in X$ es $q(x) \geq q(x_0)$. Si tomamos $x = z_n$, donde $(A(z_n) - y_0) \perp F_n$, podemos deducir que para cada $y \in F_n$ se verifica $q(z_n + y) = q(z_n) + \langle A(y), y\rangle$. Como cada $z \in F_n$ puede escribirse como $z_n + y$, para algún $y \in F_n$, resulta que $q(z) \geq q(z_n)$, para cada $z \in Y$.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión ortonormal obtenida por el método de Gram-Schmidt a partir de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tenemos que si $\mathcal{L}(x_n : n \in \mathbb{N})$ es denso en X entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ será una base ortonormal de X. Por tanto, $x_0 = \sum_{j=1}^{\infty}\langle x_0, a_j\rangle a_j$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos $y_n = \sum_{j=1}^{n}\langle x_0, a_j\rangle a_j$. Entonces $y_n \in F_n$ y $\lim y_n = x_0$. Como q es continua, tenemos que $\lim q(y_n) = q(x_0)$. Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $q(x_0) \leq q(z_n) \leq q(y_n)$, resulta que también $\lim q(z_n) = q(x_0)$. Tomando $y = z_n - x_0$ en la igualdad $q(x_0+y) = q(x_0) + \langle A(y), y\rangle$, tenemos que $q(z_n) - q(x_0) = \langle A(z_n - x_0), z_n - x_0\rangle \geq m_A\|z_n - x_0\|^2$. Por tanto, $\|z_1 - x_0\|^2 \leq \frac{1}{m_A}(q(z_n) - q(x_0))$ y será $\lim z_n = x_0$. De la desigualdad de Schwarz se deduce que $\|z_n - x_0\|^2 \leq \frac{1}{m_A}\|A(z_n - x_0)\|\,\|z_n - x_0\|$; por tanto

$$\|z_n - x_0\| \leq \frac{1}{m_A}\|A(z_n) - A(x_0)\| = \frac{1}{m_A}\|A(z_n) - y_0\|.$$

NOTA 14.5.11 Estudiaremos ahora una sencilla aplicación del método de Bubnov-Galerkin para el estudio de la solución de un sistema lineal de infinitas ecuaciones e incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}x(j) = y(i), \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

donde $k_{ij} \in \mathbb{K}$ para $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Si $x = (x(1), x(2), \cdots)$, denotamos $A(x)(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}x(j)$. Con esta notación podemos expresar el sistema en la forma $A(x) = y$. Vamos a suponer que si $x \in l_2$ entonces $A(x) \in l_2$ y que $y \in l_2$. También supondremos que $k_{ij} = \overline{k_{ij}}$ si $i, j \in \mathbb{N}$ y que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} k_{ii}|x(i)|^2 + 2 \sum_{i,j=1, i\langle j} Re\,(k_{ij}\overline{x(i)}x(j)) \geq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^2, \qquad (x \in l_2).$$

Las matrices (k_{ij}) de este tipo son denominadas matrices **definidas positivas**. No es complicado comprobar que la aplicación $A : l_2 \to l_2$ verifica las condiciones del teorema anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n = e_n, F_n = \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n)$ y p_n la proyección ortogonal correspondiente a F_n. Con el teorema anterior podemos afirmar que para cada $y_0 \in l_2$ existe un único $z_n \in F_n$ tal que $p_n(A(z_n)) = p_n(y_0)$. Es decir, $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}z_n(j) = y_0(i)$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces en l_2 la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0, de modo que x_0 es la única solución de $A(x) = y_0$. Así pues, en ciertos casos la solución de sistemas infinito dimensionales se obtiene como límite de soluciones de sistemas n-dimensionales.

14.6 Resoluciones de la identidad. Cálculo funcional

DEFINICIÓN 14.6.1 *Sea X un espacio de Hilbert. Una **resolución de la identidad** sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ es una familia $\{P_t : t \in [a, b]\}$ de proyecciones ortogonales sobre X tal que $P_s \leq P_t$ si $a \leq s \leq t \leq b$, $P_a = 0$ y $P_b = I$.*

En esta situación si $x \in X$ y $a \leq s \leq t \leq b$ se verifica que $\langle P_s(x), x\rangle \leq \langle P_t(x), x\rangle$. Por tanto, la función $\alpha_{xx} : [a, b] \to \mathbb{K}$ definida por $\alpha_{xx}(t) = \langle P_t(x), x\rangle$ es creciente. Para cada $x, y \in X$ definimos $\alpha_{xy} : [a, b] \to \mathbb{K}$ por $\alpha_{xy}(t) = \langle P_t(x), y\rangle$.

Probaremos que α_{xy} es de variación acotada. Tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha_{xy}(t) &= \langle P_t(x), y\rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle P_t(x+y), x+y\rangle - \langle P_t(x-y), x-y\rangle \\ &\qquad + i\langle P_t(x+iy), x+iy\rangle - i\langle P_t(x-iy), x-iy\rangle).\end{aligned}$$

Por consiguiente, tanto la parte real como la parte imaginaria de α_{xy} se puede expresar como diferencia de funciones crecientes. Esto significa que α_{xy} es de variación acotada. Por otra parte, como α_{xx} es creciente, su variación total será $V(\alpha_{xx}) = \alpha_{xx}(b) - \alpha_{xx}(a) = \langle x, x\rangle - 0 = \|x\|^2$ y entonces será

$$V(\alpha_{xy}) \leq \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

NOTA 14.6.2 1) Sea X un espacio de Hilbert y supongamos que $Q_1, \cdots, Q_n$ son proyecciones ortogonales de X con imágenes mutuamente ortogonales y de modo que $Q_1 + \cdots + Q_n = I$. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado y sea $\{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del mismo, definimos

$$P_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t = a, \\ Q_1 + \cdots + Q_i, & \text{si } t \in [t_{i-1}, t_i], i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Como cada Q_i es positivo, es claro que $P_s \leq P_t$ si $a \leq s \leq t \leq b$. Además, $P_a = 0$ y $P_b = Q_1 + \cdots + Q_n = I$. Así pues, $\{P_t\}$ es una resolución de la identidad sobre $[a,b]$.

2) Sea X un espacio de Hilbert y sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[a,b]$. Consideremos la aplicación $\alpha_{xy} : [a,b] \to \mathbb{K}$. Como α_{xy} es de variación acotada, existe la integral de Riemann Stieljes $\int_a^b t d\alpha_{xy}$, en el siguiente teorema haremos uso de este concepto.

TEOREMA 14.6.3 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[a,b]$. Entonces existe un único $A \in C\mathcal{L}(X)$ que sea autoadjunto y de modo que si $x, y \in X$ sea*

$$\langle A(x), y\rangle = \int_a^b t d\alpha_{xy}.$$

Para cada partición $p = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ denotemos

$$S(p) = \sum_{i=1}^{n} s_i(P_{t_i} - P_{t_{i-1}}),$$

donde $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i \in \{1, \ldots, 1\}$. Se verifica que $S(p)$ es autoadjunto y que converge, en $C\mathcal{L}(X)$, hacia A cuando el diámetro de p (diam (p)) tiende a cero; es decir si $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si p es una partición de $[a,b]$ con $d(p) \leq \delta$ es $\|A - S(p)\| \leq \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN Definimos la aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ por $\varphi(x,y) = \int_a^b t d\alpha_{xy}$. Si $x, x', y, y' \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos que

$$\varphi(x + x'. y) = \int_a^b t d\alpha_{x+x',y} = \int_a^b t d\alpha_{x,y} + \int_a^b t d\alpha_{x',y} = \varphi(x,y) + \varphi(x',y).$$

De forma análoga, se puede ver que $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$. Como cada P_t es autoadjunto, tenemos que

$$\alpha_{yx}(t) = \langle P_t(y), x\rangle = \langle y, P_t'(x)\rangle = \langle y, P_t(x)\rangle = \overline{\langle P_t(x), y\rangle} = \overline{\alpha_{xy}(t)}.$$

De aquí se deduce que $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$. Así pues, φ es sesquilineal y hermítica, además

$$|\varphi(x,y)| = |\int_a^b t d\alpha_{xy}| \leq \text{máx}\{|t| : t_0 \in [a,b]\} V(\alpha_{xy}) \leq \text{máx}(|a|,|b|)(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

De esta forma, si $x, y \in S_X$ se verifica $|\varphi(x,y)| \leq 2\,\text{máx}(|a|,|b|)$. Por tanto, φ es continua y existirá un único $A \in C\mathcal{L}(X)$ tal que

$$\langle A(x), y\rangle = \varphi(x,y), \qquad (x, y \in X).$$

Además, como φ es hermítica deducimos que si $x, y \in X$ es

$$\langle A'(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle = \overline{\langle A(y), x\rangle} = \overline{\varphi(y,x)} = \varphi(x,y) = \langle A(x), y\rangle$$

y será $A' = A$, por lo que A es autoadjunto.

Finalmente si $p = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ tenemos que $\langle A(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} t d\alpha_{xx}$ y

$$\langle S(p), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} s_i(\langle P_{t_i}(x), x\rangle - \langle P_{t_{i-1}}(x), x\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} s_i d\alpha_{xx}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\langle (A - S(p))(x), x\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t - s_i) d\alpha_{xx} \leq d(p) \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} d\alpha_{xx} \\ &= d(p)\langle x, x\rangle = d(P)\|x\|^2.\end{aligned}$$

Como $A - S(p)$ es autoadjunto se verifica que $\|A - S(p)\| = \sup\{\langle (|A - S(p))(x), x\rangle : x \in S_X\}$. Por tanto, $\|A - S(p)\| \leq d(p)$. ■

Hemos demostrado que cada resolución de la identidad determina un único operador autoadjunto, pero distintas resoluciones de la identidad pueden determinar el mismo operador. Nuestro próximo propósito es conseguir que haya una correspondencia uno a uno por medio de un concepto nuevo, la normalización, que introduciremos después del siguiente lema.

LEMA 14.6.4 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[a, b]$.*

i) Sea $t \in [a, b)$; para $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} P_{t+\frac{1}{n}}(x)$ y define una proyección ortogonal P_{t+0} tal que $P_t \leq P_{t+0}$ y si $a \leq t \leq s < b$ entonces $P_{t+0} \leq P_{s+0}$.

ii) Sea $t \in (a,b]$; para $x \in X$ existe $\lim_{n\to\infty} P_{t-\frac{1}{n}}(x)$ y define una proyección ortogonal P_{t-0} tal que $P_{t-0} \leq P_t$ y si $a < t \leq s \leq b$ entonces $P_{t-0} \leq P_{s-0}$.

DEMOSTRACIÓN Probaremos sólo i) ya que la demostración de ii) es similar.

Sea $t \in [a,b)$. Para $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes y con $n \geq m$, tenemos que, como $P_{t+\frac{1}{m}} \leq P_{t+\frac{1}{n}}$, $P_{t+\frac{1}{n}} - P_{t+\frac{1}{m}}$ es una proyección ortogonal. Por tanto,

$$\|P_{t+\frac{1}{n}}(x) - P_{t+\frac{1}{m}}(x)\|^2 = \langle (P_{t+\frac{1}{n}} - P_{t+\frac{1}{m}})(x), x\rangle = \alpha_{xx}(t+\frac{1}{n}) - \alpha_{xx}(t+\frac{1}{m}).$$

Como α_{xx} es creciente en $[a,b]$, existe $\lim \alpha_{xx}(t+\frac{1}{n})$, por lo que $(P_{t+\frac{1}{n}}(x))$ es una sucesión de Cauchy que es, por tanto, convergente en X a un elemento que denotamos por $P_{t+0}(x)$. Es fácil ver que la aplicación $P_{t+0} : X \to X$ es lineal.

Como $\|P_{t+\frac{1}{n}}(x)\| \leq x$, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\|P_{t+0}(x)\| \leq \|x\|$. Por consiguiente, $P_{t+0} \in C\mathcal{L}(X)$ y además es autoadjunto, ya que si $x, y \in X$ se cumple

$$\langle P_{t+0}(x), y\rangle = \lim\langle P_{t+\frac{1}{n}}(x), y\rangle = \lim\langle x, P_{t+\frac{1}{n}}(y)\rangle = \langle x, P_{t+0}(y)\rangle.$$

Por otra parte, si $s\rangle t$ y $x \in X$ tenemos que

$$P_s(P_{t+0}(x)) = P_s(\lim P_{t+\frac{1}{n}}(x)) = \lim P_s P_{t+\frac{1}{n}}(x) = \lim P_{t+\frac{1}{n}}(x) = P_{t+0}(x).$$

Por tanto, si $x \in X$ se verifica

$$P_{t+0}(P_{t+0}(x)) = \lim P_{t+\frac{1}{n}}(P_{t+0}(x)) = \lim P_{t+0}(x) = P_{t+0}(x).$$

Por consiguiente, P_{t+0} es una proyección ortogonal.

Finalmente, si $a \leq t \leq s < b$ entonces, para $n \in \mathbb{N}$, se verifica $P_t \leq P_{t+\frac{1}{n}} \leq P_{s+\frac{1}{n}}$, por lo que $P_t \leq P_{t+0} \leq P_{s+0}$. ■

DEFINICIÓN 14.6.5 *Sean X un espacio de Hilbert y sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[a,b]$. Se dice que $\{P_t\}$ es* ***normalizada*** *si para cada $t \in (a,b)$ se verifica que $P_{t+0} = P_t$.*

Dada una función real α de variación acotada sobre $[a,b]$ se dice que es ***normalizada*** *si $\alpha(a) = 0$ y para cada $t \in (a,b)$ es $\lim_{s\to t_+} \alpha(s) = \alpha(t)$; es decir, α es continua por la derecha en cada $t \in (a,b)$.*

Al conjunto de las funciones reales de variación acotada definidas en $[a,b]$ lo denotaremos con la notación anglosajona de $BV([a,b])$, al subconjunto de la que además son normalizadas lo denotaremos por $NBV([a,b])$.

NOTA 14.6.6 *Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y definimos $\alpha' : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $\alpha'(a) = 0$, $\alpha'(b) = \alpha(b) - \alpha(a)$ y $\alpha'(t) = \lim \alpha(t+\frac{1}{n}) - \alpha(a)$, para $t \in (a,b)$. Entonces α' es la única función de variación acotada que es normalizada y que además verifica que*

$$\int_a^b f d\alpha' = \int_a^b f d\alpha,$$

para cada $f \in C([a,b])$. Además también se verifica que $V(\alpha') \leq V(\alpha)$, donde V representa la variación total.

En efecto, como α es de variación acotada sólo tiene discontinuidades de salto y para cada $t \in (a,b)$ existe $\alpha(t+) = \lim_{s\to t+}\alpha(s)$. Veamos que α' es continua por la derecha. Sea $t \in (a,b)$ y sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $s > t$ y $|t-s| < \delta$ se verifica $|\alpha'(t) - \alpha(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $t' > t$ tal que $|t-t'| < \frac{\alpha}{2}$. Para t' existe $\delta' < \frac{\delta}{2}$ tal que si $s' > t'$ y $|t'-s'| < \delta'$ entonces $|\alpha'(t') - \alpha(s')| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues, será

$$|\alpha'(t) - \alpha'(t')| \leq |\alpha'(t) - \alpha'(s')| + |\alpha(s') - \alpha'(t')| \leq \varepsilon,$$

ya que $t < s'$ y $|t-s'| \leq |t-t'| + |t-t'| + |t'-s'| \leq \delta$. Esto prueba que α' es normalizada.

Probaremos ahora que $V(\alpha') \leq V(\alpha)$. Sea $\{t_0, \cdots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$ y sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $s_1, \cdots, s_{n-1}$, de modo que α sea continua en ellos, y $t_j < s_j$ con $|\alpha(t_j+) - \alpha(s_j)| < \frac{\varepsilon}{2n}$, para $j \in \{1, \ldots, n-1\}$. Sean $s_0 = 0$, $s_n = b$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha'(t_j) - \alpha'(t_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})| + \varepsilon \leq V(\alpha).$$

Ha quedado, por tanto, probado también que α' es de variación acotada. Observemos que $\alpha' - \alpha = 0$ excepto a lo sumo en una cantidad numerable de puntos de $[a,b]$ (las posibles discontinuidades de α). Esto significa que si $f \in C([a,b])$ será $\int_a^b fd(\alpha' - \alpha) = 0$ y, por tanto, $\int_a^b fd\alpha = \int_a^b fd\alpha'$.

Supongamos que α_0 es otra función real definida en $[a,b]$ que es de variación acotada normalizada y de modo que $\int_a^b fd\alpha = \int_a^b fd\alpha_0$. Demostraremos que $\alpha' = \alpha_0$. Sea $\beta = \alpha_0 - \alpha'$. Tenemos que $\beta(a) = 0$ y si f es la función constante 1 y que $0 = \int_a^b 1d\beta = \beta(b) - \beta(a)$. Esto prueba que $\beta(b) = 0$. Supongamos ahora que $t_0 \in (a,b)$ es un punto de continuidad de β. Para n suficientemente grande consideremos

$$f_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [a, t_0], \\ 1 - n(t - t_0) & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{si } t_0 + \frac{1}{n} < t \leq b. \end{cases}$$

Se verifica que $f_n \in C([a,b])$ y

$$0 = \int_a^b f_n d\beta = \int_a^{t_0} d\beta + \int_{t_0}^{t_0+\frac{1}{n}} [1 - n(t - t_0)]d\beta + \int_{t_0+\frac{1}{n}}^{b} 0d\beta.$$

Esto prueba que $|\beta(t_0)| = \left|\int_{t_0}^{t_0+1}[1-n(t-t_0)]d\beta\right|$, siendo $|1-n(t-t_0)| \leq 1$, para $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$. Por consiguiente, $|\beta(t_0)|$ es menor o igual que la variación de β en $[t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$. Esta variación tiende a cero cuando n crece, ya que β es continua, por lo que $\beta(t_0) = 0$ si t_0 es un punto de continuidad de β. Como β es continua por la derecha en $[a, b]$ y los puntos de continuidad de β son densos en (a, b), se deduce que $\beta = 0$ en $[a, b]$ y por tanto $\alpha' = \alpha_0$ en $[a, b]$.

TEOREMA 14.6.7 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[a, b]$. Entonces,*

i) $\{P_t\}$ es normalizada si y sólo si para cada $x, y \in X$ la función de variación acotada definida en $[a, b]$ por $\alpha_{xy}(t) = \langle P_t(x), y\rangle$ es normalizada.

ii) Existe una única resolución normalizada de la identidad $\{P'_t\}$ sobre $[a, b]$ de modo que las correspondientes funciones asociadas α'_{xy} verifican que para cada $x, y \in X$ y cada $f \in C([a, b])$ es $\int_a^b f d\alpha_{xy} = \int_a^b f d\alpha'_{xy}$.

DEMOSTRACIÓN i) Para cada $x, y \in X$ tenemos que α_{xy} es de variación acotada y de aquí se deduce que para cada $t \in (a, b)$ existe $\lim_{s\to t+} \alpha_{xy}(s)$ y coincide con $\lim \alpha_{xy}(t + \frac{1}{n})$. Si $\{P_t\}$ es normalizada y $x, y \in X$ tenemos que

$$\lim_{s\to t+} \alpha_{xy}(s) = \lim \alpha_{xy}(t + \frac{1}{n}) = \lim\langle P_{t+\frac{1}{n}}(x), y\rangle = \langle P_t(x), y\rangle = \alpha_{xy}(t).$$

Recíprocamente, supongamos que para cada $x, y \in X$ se verifica que α_{xy} es normalizada. Si $t \in (a, b)$ y $n \in \mathbb{N}$ es suficientemente grande tenemos que $P_t \leq P_{t+\frac{1}{n}}$ y por tanto $P_{t+\frac{1}{n}} - P_t$ es una proyección ortogonal. Así pues,

$$\begin{aligned}\|P_{t+\frac{1}{n}}(x) - P_t(x)\|^2 &= \langle (P_{t+\frac{1}{n}} - P_t)(x), x\rangle = \langle P_{t+\frac{1}{n}}(x), x\rangle - \langle P_t(x), x\rangle \\ &= \alpha_{xx}(t + \tfrac{1}{n}) - \alpha_{xx}(t).\end{aligned}$$

Esto prueba que $P_{t+0} = P_t$.

ii) Para cada $t \in [a, b]$ sea

$$P'_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t = a, \\ P_{t+0}, & \text{si } t \in (a, b), \\ I, & \text{si } t = b. \end{cases}$$

Ya se probó anteriormente que $\{P'_t\}$ es una resolución de la identidad sobre $[a, b]$. Denotemos por α'_{xy} a las correspondientes funciones asociadas, que serán de variación acotada. Si $t \in (a, b)$ tenemos que

$$\alpha'_{xy}(t) = \langle P'_t(x), y\rangle = \lim\langle P_{t+\frac{1}{n}}(x), y\rangle = \lim \alpha_{xy}(t + \frac{1}{n}).$$

Esto demuestra que α'_{xy} es normalizada y, por i), deducimos que $\{P'_t\}$ es una resolución normalizada de la identidad sobre $[a, b]$. Además, de la nota anterior, se deduce que, para cada $x, y \in X$, α'_{xy} es la única función normalizada tal que

$$\int_a^b f d\alpha_{xy} = \int_a^b f d\alpha'_{xy}.$$

Por consiguiente, $\{P'_t\}$ es la única resolución normalizada de la identidad que cumple las condiciones exigidas. ■

NOTA 14.6.8 1. Sea X un espacio de Hilbert y sean $Q_1, \ldots, Q_n$ proyecciones ortogonales en X con imágenes mutuamente ortogonales y tales que $Q_1 + \cdots + Q_n = I$. Sea $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ y para $t \in [a, b]$ definimos

$$P_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t = a, \\ Q_1 + \cdots + Q_i, & \text{si } t \in (t_{i-1}, t_i], i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

Sabemos que $\{P_t\}$ es una resolución de la identidad sobre $[a, b]$ y la correspondiente normalización de esta resolución de la identidad viene dada por

$$P'_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t = a, \\ Q_1 + \cdots Q_i, & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1, \\ I, & \text{si } t = b. \end{cases}$$

2. Sea $X = l_2$ y sea $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números reales. Sean $a = \inf\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b = \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sea $P_a = 0$ y, para $t \in [a, b]$ y $x \in l_2$, sea

$$P_t(x)(j) = \begin{cases} x(j), & \text{si } t_j \leq t, \\ 0, & \text{si } t < t_j. \end{cases}$$

Entonces P_t es lineal y $\|P_t(x)\| \leq \|x\|$. Además $P_b = I$ y $P_t \leq P_s$ para $t \leq s$. Si $x, y \in X$ entonces

$$\langle P_t(x), y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} P_t(x)(j)\overline{y(j)} = \sum_{t_j \leq t} x(j)\overline{y(j)} = \langle x, P_t(y). \rangle$$

Por tanto, P_t es autoadjunto y podemos afirmar que $\{P_t\}$ es una resolución de la identidad sobre $[a, b]$.

Veamos que esta resolución de la identidad es normalizada, si $t \in (a, b)$ y $x, y \in X$ tenemos que

$$\|P_{t+\frac{1}{n}}(x) - P_t(x)\|^2 = \sum_{t < t_j \leq t + \frac{1}{n}} |x(j)|^2.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^2 < \infty$, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=N+1}^{\infty} |x(j)|^2 < \varepsilon$. Por otra parte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{t_1, \ldots, t_N\} \cap (t, t + \frac{1}{n_0}] = \emptyset$. Entonces, si $n \geq n_0$

tenemos que

$$\|P_{t+\frac{1}{n}}(x) - P_t(x)\|^2 \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |x(j)|^2 < \varepsilon.$$

Esto significa que $\lim P_{t+\frac{1}{n}}(x) = P_t(x)$.

LEMA 14.6.9 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(x)$ un operador autoadjunto. Sea $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ un polinomio en t de coeficientes reales. Si para cada $t \in [m_A, M_A]$ se tiene que $p(t) \geq 0$ entonces $p(A) \geq 0$, donde $p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots a_n A^n$.*

DEMOSTRACIÓN Es claro que $p(A)$ es autoadjunto. Demostraremos que es $\langle p(A)(x), x\rangle \geq 0$ para cada $x \in X$; para esto, probaremos que $p(t)$ se puede expresar como la suma de un número finito de polinomios de las formas

a) $(t - m_A)(q(t))^2$.

b) $(M_A - t)(q(t))^2$.

c) $(q(t))^2$,

donde $q(t)$ es un polinomio en t con coeficientes reales. Vamos a demostrar esta afirmación por inducción sobre el grado $n \in \mathbb{N}$ de $p(t)$.

Si $n = 0$ será $p(t) = a_0$ con $a_0 \geq 0$. Sea $b_0 = \sqrt{a_0}$ y $q = b_0$ entonces $p = q^2$. Supongamos que la afirmación es cierta para todo polinomio de grado menor que n y sea $p(t)$ un polinomio de grado n. Sea $\alpha = \min\{p(t) : t \in [m_A, M_A]\}$. Se tiene que $\alpha \geq 0$ y consideremos $p(t) = (p(t) - \alpha) + \alpha$. Existe algún $t_0 \in [m_A, M_A]$ tal que $p(t_0) = \alpha$ y s $p(t) - \alpha = (t - t_0)p_1(t)$. Si $t_0 = m_A$ se cumple $p(t) - \alpha = (t - m_A)p_1(t)$, donde $p_1(t)$ es de grado menor que n, y podemos suponer que será una suma de polinomios de las formas a), b) y c). Si fuese, por ejemplo, $p_1(t) = (M_A - t)(q(t))^2$ entonces sería $p(t) - \alpha = (t - m_A)(M_A - t)(q(t))^2$ y si $r = (M_A - m_A)^{-1/2}$ tenemos que

$$p(t) = [(t - m_A)(r(M_A - t))^2 + (M_A - t)(r(t - m_A))^2](q(t))^2 + (\sqrt{\alpha})^2.$$

Es decir, p es de la forma deseada.

Es fácil entender que otro tipo de suposiciones para $p_1(t)$ dan lugar al mismo tipo de conclusión.

Si $t_0 = M_A$ razonaremos de manera parecida al caso $t_0 = m_A$.

Supongamos que $t_0 \in (m_A, M_A)$. Tenemos que $p(t) - \alpha = (t - t_0)p_1(t)$ y $p(t) - \alpha \geq 0$ en $[m_A, M_A]$. Si $t \in (m_A, t_0)$ se tiene $t - t_0 < 0$ y $p_1(t) \leq 0$. Si $t \in (t_0, M_A)$ se cumple $t - t_0 > 0$ y $p_1(t) \leq 0$. Así pues, tiene que ser $p_1(t_0) = 0$ y podemos poner $p(t) - \alpha$ en la forma deseada. De aquí se deduce que también $p(t)$ es de la forma deseada.

Finalmente, si por ejemplo es $p(t) = (t - m_A)(q(t))^2$ y $x \in X$, se tendría

$$\begin{aligned}\langle p(A). x\rangle &= \langle (A - m_A I)(q(A))^2(x), x\rangle = \langle q(A)(A - m_A I)q(A)(x), x\rangle \\ &= \langle (A - m_A I)q(A)(x), q(A)(x)\rangle\end{aligned}$$

y si $z = q(A)(x)$

$$\langle p(A)\,(x), x\rangle = \langle A(y), y\rangle - m_A(y, y)\rangle \geq 0.$$

Los otros supuestos para $p(t)$ se razonan de igual manera y es fácil concluir entonces que $p(A) \geq 0$. ∎

TEOREMA 14.6.10 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Para cada $f \in Z = C([m_A, M_A])$ existe un único $f(A) \in C\mathcal{L}(X)$ tal que si $f_1, f_2 \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica*

i) $f_0(A) = A$ *si* $f_0(t) = t$ *para* $t \in [m_A, M_A]$.

ii) $(f_1 + f_2)(A) = f_1(A) + f_2(A)$, $(\alpha f_1)(A) = \alpha f_1(A)$.

iii) $(f_1 f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$.

iv) $(f_1(A))' = \overline{f_1}(A)$, *donde* $\overline{f_1}$ *es la conjugada compleja de* f_1.

v) Si $\lim f_n = f$ *en* Z *entonces* $\lim f_n(A) = f(A)$ *en* $C\mathcal{L}(X)$.

Además si $f \in Z$ y $f \geq 0$ en $[m_A, M_A]$ entonces $\langle f(A)(x), x\rangle \geq 0$ si $x \in X$ y si f es real valorada entonces $f(A)$ es autoadjunto. Además $\|f(A)\| \leq \|f\|$.

DEMOSTRACIÓN Si p y q son polinomios, en una variable, de coeficientes reales y $\alpha \in \mathbb{K}$, es fácil comprobar que $(p+q)(A) = p(A) + q(A)$, $(\alpha p)(A) = \alpha(p, (A))$ y $(pq)(A) = p(A)q(A)$. Además si $p \geq 0$ en $[m_A, M_A]$, del lema anterior, deducimos que $p(A) \geq 0$.

Observemos que si p es de coeficientes reales entonces $\|p\| \pm p \geq 0$ en $[m_A, M_A]$, siendo $\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in [m_A, M_A]\}$. De aquí se deduce que $-\|p\|I \leq p(A) \leq \|p\|I$. Como $p(A)$ es autoadjunto, tenemos que

$$\|p(A)\| = \sup\{|\langle p(A)(x), x\rangle| : x \in S_X\} \leq \|p\|.$$

Sea $f \in Z$ real valorada, por el teorema de Weierstrass existe una sucesión de polinomios, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de coeficientes reales, tal que $\lim \|P_n - f\| = 0$. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|P_n(A) - P_m(A)\| \leq \|P_n - P_m\|$. Por tanto, $(P_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C\mathcal{L}(X)$ y existe algún $B \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $\lim P_n(A) = B$. Definimos $f(A) = \lim P_n(A)$.

Claramente $f(A)$ no depende de la sucesión de polinomios que converja a f, ya que si para una sucesión, $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de polinomios de coeficientes reales se cumple $\lim \|f - Q_n\| = 0$, entonces $\|P_n(A) - Q_n(A)\| \leq \|P_n - Q_n\| \leq \|P_n - f\| + \|f - Q_n\|$. Observemos que $f(A)$ es autoadjunto, ya que cada $P_n(A)$ es autoadjunto y $\|f(A)\| = \lim \|P_n(A)\| \leq \lim \|P_n\| = \|f\|$.

Si $f \geq 0$ en $[m_A, M_A]$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq f \leq P_n + \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Por tanto, $0 \leq P_n(A) + \varepsilon I$ si $n \geq n_0$. Como esto es cierto para cada $\varepsilon > 0$, deducimos que $0 \leq f(A)$.

Supongamos ahora que estamos en el caso $k = \mathbb{C}$. Sea $f \in Z$. Podemos escribir $f = f_1 + i f_2$, donde f_1 y f_2 son funciones continuas real valoradas.

Definimos $f(A)$ por $f(A) = f_1(A) + if_2(A)$ y es claro que las propiedades i), ii), iii) y iv) son evidentes. Probaremos la propiedad v).

Como $f \cdot \overline{f} = |f|^2$, deducimos que $f(A)(f(A))' = f(A)\overline{f}(A) = |f|^2(A)$. Por tanto, $\|f(A)(f(A))'\| = \||f|^2(A)\| \leq \||f|^2\| = \|f\|^2$. Como $\|f(A)(f(A))'\| = \|f(A)\|^2$, resulta que $\|f(A)\| \leq \|f\|$.

Si ahora es $\lim f_n = f$ en Z entonces $\|f_n(A) - f(A)\| = \|(f_n - f)(A)\| \leq \|f_n - f\|$.

La unicidad de $f(A)$ verificando i), ii), iii), iv) y v) es sencilla de probar: si $(f(A))_0 \in C\mathcal{L}(X)$ verifica estas propiedades tenemos que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son polinomios tales que $\lim p_n = f$ en Z entonces, por v), se verifica $(f(A))_0 = \lim p_n(A) = f(A)$. ∎

COROLARIO 14.6.11 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sea $\{P_t\}$ una resolución de la identidad sobre $[m_A, M_A]$ tal que para cada $x, y \in X$ es*

$$\langle A(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} t d\alpha_{xy}.$$

Entonces, para cada $f \in C([m_A, M_A])$ y cada $x, y \in X$ es

$$\langle f(A)(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} f(t) d\alpha_{xy} \quad y \quad f(A) = \int_{m_A}^{M_A} f dP,$$

con el sentido de que las sumas de Riemann-Stieljes convergen hacia $f(A)$ en $C\mathcal{L}(X)$.

DEMOSTRACIÓN

Sabemos que $A = \displaystyle\int_{m_A}^{M_A} t dP$ en el sentido de que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $p = \{t_0, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[m_A, M_A]$ con diámetro menor que δ entonces $\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i(P_{t_i} - P_{t_{i-1}}) - A\| < \varepsilon$, donde $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})(P_{t_j} - P_{t_{j-1}}) = \begin{cases} P_{t_i} - P_{t_{i-1}}, & \text{si } j = i, \\ 0, & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

De aquí se deduce que, si $B = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})$ y $m \in \mathbb{N}$, se verifica $B^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i^m(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})$. En particular, $B^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} s_i^2(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})$.

Observemos que la aplicación $\varphi : C\mathcal{L}(X) \times C\mathcal{L}(X) \to C\mathcal{L}(X)$ definida por $\varphi(C, D) = CD$ es bilineal y continua. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon' > 0$ tal que si $\|C - C'\| < \varepsilon'$ y $\|D - D'\| < \varepsilon'$ entonces $\|CD - C'D'\| < \varepsilon$. Para ε' existe $\delta > 0$ tal que si $p = \{t_0, \cdots, t_n\}$ es una partición de $[a, b]$ con diámetro menor que δ se cumple $\|A-B\|<\varepsilon'$ donde $B=\sum_{i=1}^{n} s_i\,(P_{t_i}-P_{t_{i-1}})$ y $s_i\in[t_{i-1}-t_i]$. En esta situación, si consideramos (A,A) y (B,B) deducimos que $\|A^2-B^2\|<\varepsilon$. Como $B^2=\sum_{i=1}^{n} s_i^2(P_{t_i}-P_{t_{i-1}})$, podemos afirmar que $\int_{m_A}^{M_A} t^2dP=A^2$.

Con argumentos similares se prueba que para cada $m\in\mathbb{N}$ es $\int_{m_A}^{M_A} t^m dP=A^m$. Además, se verifica que $I=P_{M_A}-P_{m_A}=\int_{m_A}^{M_A} dP$. Por tanto deducimos que para cada polinomio p se verifica que

$$p(A)=\int_{m_A}^{M_A} pdP.$$

Si $f\in C([m_A,M_A])$ entonces existen sucesiones de polinomios, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $\lim\|f-(p_n+iq_n)\|=0$. Como en $C\mathcal{L}(X)$ se verifica $\lim(p_n(A)+iq_n(A))=f(A)$, se tiene que $f(A)=\int_{m_A}^{M_A} fdP$. De aquí se deduce en particular que para cada $x,y\in X$ es

$$\langle f(A)(x),y\rangle=\int_{m_A}^{M_A} f(t)d(\langle p_t(x),y\rangle).$$

∎

NOTA 14.6.12 Sea X un espacio de Hilbert y sea $A\in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto, tenemos que $A-m_AI\geq 0$ y $M_AI-A\geq 0$. Entonces, si $m_A=M_A=a$ deducimos que $A-aI=0$ y $A=aI$. Observemos que si $A=aI$ con $A\in\mathbb{R}$ entonces también es $m_A=M_A$.

En el próximo teorema probaremos la unicidad de la resolución normalizada de la identidad asociada a $A\in C\mathcal{L}(X)$, cuando $m_A<M_A$.

TEOREMA 14.6.13 **(Teorema espectral para operadores acotados autoadjuntos (1912))**.

Sea X un espacio de Hilbert y sea $A\in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto con $m_A<M_A$. Entonces existe una única resolución normalizada de la identidad $\{P_t\}$ sobre $[m_A,M_A]$ tal que si $x,y\in X$ es

$$\langle A(x),y\rangle=\int_{m_A}^{M_A} td(\langle P_t(x),y\rangle).$$

DEMOSTRACIÓN

Para cada $x,y\in X$ definimos la aplicación $\varphi_{x,y}:C([m_A,M_A])\to\mathbb{K}$ por $\varphi_{x,y}(f)=\langle f(A)(x),y\rangle$. Es claro que $\varphi_{x,y}$ es lineal y de la desigualdad de Schwarz deducimos que $|\varphi_{x,y}(f)|\leq\|f(A)\|\,\|x\|\,\|y\|\leq\|f\|\,\|x\|\,\|y\|$. Por tanto, $\varphi_{x,y}$ es lineal y continua, por lo que existe una aplicación $\beta_{x,y} : [m_A, M_A] \to \mathbb{K}$ de variación acotada y normalizada tal que $\varphi_{x,y}(f) = \int_{m_A}^{M_A} f d\beta_{x,y}$ y $V(\beta_{x,y}) = \|\varphi_{x,y}\|$.

Para cada $t \in [m_A, M_A]$, definimos la aplicación $h_t : X \times X \to \mathbb{K}$ por $h_t(x,y) = \beta_{x,y}(t)$. Veamos que h_t es sesquilineal. Sean $x, x', y \in X$ y $f \in C([m_A, M_A])$. Se verifica que

$$\begin{aligned}\varphi_{x+x',y}(f) &= \langle f(A)(x+x'), y\rangle = \langle f(A)(x), y\rangle + \langle f(A)(x'), y\rangle \\ &= \varphi_{x,y}(f) + \varphi_{x',y}(f) = (\varphi_{x,y} + \varphi_{x',y})(f).\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\beta_{x+x',y}(t) = \beta_{x,y}(t) + \beta_{x',y}(t)$; es decir $h_t(x+x', y) = h_t(x,y) + h_t(x', y)$.

De una forma parecida concluiríamos la demostración de que h_t es sesquilineal. Además,

$$|h_t(x,y)| = |\beta_{x,y}(t)| = |\beta_{x,y}(t) - \beta_{x,y}(a)| \leq V(\beta_{x,y}) = \|\varphi_{x,y}\| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Por tanto, existe $P_t \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $h_t(x,y) = \langle P_t(x), y\rangle$ si $x, y \in X$. Veamos que P_t es autoadjunto. Si $f \in C([m_A, M_A])$ es real-valorada tenemos que $f(A)$ es autoadjunto y

$$\varphi_{x,y}(f) = \langle f(A)(x), y\rangle = \langle x, f(A)(y)\rangle = \overline{\langle f(A)(y), x\rangle} = \overline{\varphi_{y,x}(f)}.$$

Por tanto, $\int_{m_A}^{M_A} f d\beta_{x,y} = \int_{m_A}^{M_A} f d\overline{\beta}_{y,x}$. Como esto es cierto para cada función real valorada se deduce que $\beta_{x,y} = \overline{\beta}_{y,x}$. Por tanto

$$\langle P_t(x), y\rangle = \beta_{x,y}(t) = \overline{\beta_{y,x}}(t) = \overline{\langle P_t(y), x\rangle} = \langle x, P_t(y)\rangle,$$

para $x, y \in X$, por lo que $P_t' = P_t$.

Probaremos ahora que si $s \leq t$ entonces $P_s \leq P_t$. En efecto, sea $x \in X$; tenemos que φ_{xx} es un funcional lineal positivo, ya que si $f \in C([m_A, M_A])$ es tal que $f \geq 0$ se verifica $f(A) \geq 0$ y la correspondiente $\beta_{x,y}$ será creciente. Así pues, para $s \leq t$ se verifica que $\langle P_t(x), x\rangle - \langle P_s(x), x\rangle = \beta_{xx}(t) - \beta_{xx}(s) \geq 0$; es decir, $P_s \leq P_t$.

Cada P_t es una proyección. En efecto, si $t = m_A$ se cumple $P_t^2 = 0 = P_t$. Ahora si $t \in [m_A, M_A]$ y $x, y \in X$ entonces

$$\langle P_t^2(x), y\rangle = \langle P_t(P_t(x)), y\rangle = \beta_{P_t(x),y}(t)$$

y $\langle P_t(x), y\rangle = \beta_{x,y}(t)$. Vamos a probar pues que $\beta_{P_t(x),y}(t) = \beta_{x,y}(t)$; para esto demostraremos que si $f \in C([m_A, M_A])$ entonces

$$\int_{m_A}^{M_A} f d\beta_{P_t(x),y} = \int_{m_A}^{t} f\,|_{[m_A,t]} d\beta_{x,y}.$$

En efecto, consideremos la función

$$\alpha(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s = m_A, \\ \displaystyle\int_{m_A}^{s} f d\beta_{x,y}, & \text{si } s \in [m_A, M_A]. \end{cases}$$

Se verifica que α es de variación acotada en $[m_A, M_A]$, ya que si $\{s_0, \ldots, s_n\}$ es una partición de $[m_A, M_A]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\alpha(s_j) - \alpha(s_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} |f| d\beta_{x,y} \\ &\leq \|f\| \sum_{j=1}^{n} |\beta_{x,y}(s_j) - \beta_{x,y}(s_{j-1})| \leq \|f\| V(\beta_{x,y}). \end{aligned}$$

Tenemos también que β es continua a la derecha en $[m_A, M_A]$, ya que si $s \in (m_A, M_A)$ y n es suficientemente grande se verifica que

$$|\alpha(s + \frac{1}{n}) - \alpha(s)| \leq |\int_{s}^{s+\frac{1}{n}} f d\beta_{x,y}| \leq \|f\| V(\beta_{x,y}|_{[s,s+\frac{1}{n}]}).$$

Como $\beta_{x,y}$ es de variación acotada en $[m_A, M_A]$, se deduce que $\lim V(\beta_{x,y}|_{[s,s+\frac{1}{n}]}) = 0$. Por tanto α es de variación acotada en $[m_A, M_A]$.

Consideremos $g \in C([m_A, M_A])$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la partición $m_A = s_0 < t_1 < s_1 < \cdots t_n < s_n = M_A$.

Entonces

$$\begin{aligned} &|\sum_{j=1}^{n} g(t_j)(\alpha(s_j)) - \alpha(s_{j-1}) - \int_{m_A}^{M_A} g f d\beta_{x,y}| \\ &= |\sum_{j=1}^{n} g(t_j) \int_{s_{j-1}}^{s_j} f d\beta_{x,y} - \sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} g f d\beta_{x,y}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\int_{s_{j-1}}^{s_j} (g(t_j) - g) f d\beta_{x,y}|. \end{aligned}$$

Es sencillo comprobar que como g es uniformemente continua en $[a, b]$ se verifica que esta última cantidad tiende a cero cuando el diámetro de la partición $s_0, s_1, \cdots, s_n$ tiende a cero. De aquí se deduce que $\int_{m_A}^{M_A} g\, d\,\alpha = \int_{m_A}^{M_A} g\, f\, d\beta_{x,y}$.

Como

$$\begin{aligned} \int_{m_A}^{M_A} g\, f\, d\beta_{x,y} &= \langle g f(A)(x), y \rangle = \langle f(A) g(A)(x), y \rangle \\ &= \langle g(A)(x), \overline{f}(A)(y) \rangle = \int_{m_A}^{M_A} g d\beta_{x,\overline{f}(A)(y)}, \end{aligned}$$

resulta que $\int_{m_A}^{M_A} g d\alpha = \int_{m_A}^{M_A} g d\beta_{x,\overline{f}(A)(y)}$ para cada $g \in C([m_A, M_A])$. Como α y $\beta_{x,\overline{f}(A)(y)}$ son de variación acotada en $[m_A, M_A]$ deducimos que $\alpha = \beta_{x,\overline{f}(A)(y)}$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{m_A}^{M_A} f d\beta_{P_t(x),y} &= \langle f(A)(P_t(x)), y\rangle = \langle P_t(x), \overline{f}(A)(y)\rangle \\ &= h_t(x, \overline{f}(A)\ (y)) = \beta_{x,\overline{f}(A)(y)}(t) = \alpha(t) = \int_{m_A}^{t} f|_{[m_A,t]} d\beta_{x,y}.\end{aligned}$$

Consideremos

$$\gamma(s) = \begin{cases} \beta_{x,y}(s), & \text{si } s \in [m_A, t], \\ \beta_{x,y}(t), & \text{si } s \in [t, m_A]. \end{cases}$$

Entonces, γ es de variación acotada en $[m_A, M_A]$ y es fácil comprobar que

$$\int_{m_A}^{M_A} f d\gamma = \int_{m_A}^{t} f|_{[m_A,t]} d\beta_{x,y}.$$

Por tanto, $\int_{m_A}^{M_A} f d\beta_{P(t)(x),y} = \int_{m_A}^{M_A} f d\gamma$ para cada $f \in C([m_A, M_A])$ y será $\beta_{P(t)(x),y}(t) = \gamma(t) = \beta_{x,y}(t)$. Queda probado que P_t es una proyección. Además tenemos que si $x \in X$ se verifica $\langle P_a(x), x\rangle = \beta_{xx}(a) = 0$ y

$$\langle x, x\rangle = \varphi_{xx}(1) = \int_{m_A}^{M_A} d\beta_{x,x} = \beta_{x,x}(M_A) - \beta_{x,x}(m_A) = \langle P_b(x), x\rangle$$

Por tanto, $P_a = 0$ y $P_b = I$ y tenemos que $\{P_t\}$ es una resolución de la identidad sobre $[m_A, M_A]$. $\{P_t\}$ es normalizada ya que, para cada $x, y \in X$, $\beta_{x,y}$ es de variación acotada en $[m_A, M_A]$. Consideremos la función $g(t) = t$ si $t \in [m_A, M_A]$. Tenemos que $g(A) = A$ y para $x, y \in X$ se cumple

$$\langle A(x), y\rangle = \varphi_{x,y}(g) = \int_{m_A}^{M_A} t d\beta_{x,y}(t) = \int_{m_A}^{M_A} t d(\langle P_t(x), y\rangle).$$

Finalmente, probaremos la unicidad de $\{P_t\}$. Supongamos que $\{Q_t\}$ es otra resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$ tal que si $x, y \in X$ es $\langle A(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} t d(\langle Q_t(x), y\rangle)$. Entonces, para cada $f \in C([m_A, M_A])$ se verifica $\int_{m_A}^{M_A} f(t) d(\langle P_t(x), y\rangle) = \int_{m_A}^{M_A} f(t) d(\langle Q_t(x), y\rangle)$ y deducimos que $Q_t = P_t$ si $t \in [m_A, M_A]$. ∎

COROLARIO 14.6.14 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in \mathcal{CL}(X)$ un operador autoadjunto. Sea $\{P_t\}$ la correspondiente resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$. Sea $f \in C([m_A, M_A])$. Entonces, $f(A) = \int_{m_A}^{M_A} f dP$ en el sentido* *de que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{t_0, \ldots, t_n\}$ es partición de $[m_A, M_A]$ de diámetro menor que δ entonces $\|f(A) - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(P_{t_i} - P_{t_{i-1}})\| \leq \varepsilon$, donde $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ si $i \in \{1, \ldots, n\}$. En particular, para cada $x, y \in X$ se verifica que*

$$\langle f(A)(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} f(t)d(\langle P_t(x), y\rangle) \quad y \quad \|f(A)(x)\|^2 = \int_{m_A}^{M_A} |f(t)|^2 d(\|P_t(x)\|^2).$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que $m_A < M_A$, ya que el caso $m_A = M_A$ es evidente. Como para cada $x, y \in X$ se cumple

$$\langle A(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} td(\langle P_t(x), y\rangle),$$

de resultados anteriores deducimos que si $f \in C([m_A, M_A])$ se verifica $f(A) = \int_{m_A}^{M_A} fdP$ y $\langle f(A)(x), y\rangle = \int_{m_A}^{M_A} f(t)d(\langle P_t(x), y\rangle)$. Finalmente si $x \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f(A)(x)\|^2 &= \langle f(A)(x), f(A)(x)\rangle = \langle (f(A))' f(A)(x), x\rangle \\
&= \langle \bar{f}(A) f(A)(x), x\rangle = \langle |f|^2(A)(x), y\rangle \\
&= \int_{m_A}^{M_A} |f|^2(t)d(\langle P_t(x), x\rangle) = \int_{m_A}^{M_A} |f|^2(t)d(\|P_t(x)\|^2),
\end{aligned}$$

ya que como P_t es una proyección ortogonal se verifica que $\langle P_t(x), y\rangle = \|P_t(x)\|^2$. ■

NOTA 14.6.15 1. Sea X un espacio de Hilbert n-dimensional y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sabemos que existen proyecciones ortogonales, $P_1, \ldots, P_m$, en $C\mathcal{L}(X)$ y existen números reales distintos, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_m$, $(1 \leq m \leq n)$, tales que $A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_m P_m$, $I = P_1 + \cdots + P_m$ y $P_i P_j = 0$, si $i \neq j$. Si fuese $m = 1$, sería $m_A = M_A = \alpha_1$ y $A = \alpha_1 I$. Supongamos que $m \geq 2$. Entonces $m_A = \alpha_1$, $M_A = \alpha_m$. Sea

$$Q_t = \begin{cases} 0, & \text{si } t = m_A, \\ P_1 + \cdots + P_i, & \text{si } t \in (\alpha_i, \alpha_{i-1}), 1 \leq i \leq m-1, \\ P_1 + \cdots + P_m, & \text{si } t = M_A. \end{cases}$$

Se verifica que $\{Q_t\}$ es una resolución normalizada de la identidad y también tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{m_A}^{M_A} tdQ &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} tdQ = \alpha_1 P_1 + \sum_{i=2}^{m-1} \alpha_{i+1}(Q_{\alpha_{i+1}} - Q_{\alpha_i}) \\
&= \alpha_1 P_1 + \sum_{i=2}^{m-1} \alpha_{i+1} P_{i+1} = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_m P_m = A.
\end{aligned}$$

2. Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \subset C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y compacto. Si la imagen de A es finito dimensional entonces la resolución normalizada de la identidad correspondiente a A es similar a la de 1. Supongamos que la imagen de A es infinito dimensional y, por comodidad, asumamos que todos los autovalores no nulos de A son positivos, siendo $t_1 < t_2 < \cdots$ y $\lim t_n = 0$. Sean $P_1, \ldots, P_n, \cdots$ las proyecciones correspondientes a $\ker(A - t_i I), \cdots, \ker(A - t_n I) \cdots$. Sabemos que $A = \sum_{A=0}^{\infty} t_n P_n$, donde $t_0 = 0$ y P_0 es la proyección ortogonal correspondiente a $\ker A$.

Para cada $x \in X$ tenemos que $A(x) = \sum_{A=0}^{\infty} t_n P_n(x)$. Además $m_A = 0$ y $M_A = t_1$. Sean $Q_0 = 0$, $Q_{t_1} = I$ y, para cada $t \in (0, t_1)$, sea Q_t la proyección ortogonal correspondiente al subespacio vectorial cerrado generado por $\{\mathrm{Im}(P_n) : t_n \leq t, n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Entonces puede verse que $\{Q_t\}$ es una resolución normalizada de la identidad sobre $[0, t_1]$ que corresponde a A, ya que

$$\int_0^{t_1} t dQ = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_{i+1}}^{t_i} t dQ = \sum_{i=1}^{\infty} t_i (Q_{t_i} - Q_{t_{i+1}}) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i P_i = A.$$

3. *Sea $X = l_2$ y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ tal que $A \neq 0$ y $A(x) = (t_1 x(1), t_2 x(2), \ldots)$, donde (t_n) es una sucesión acotada de $\mathbb{R}$. Entonces $m_A = \inf\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $M_A = \sup\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. La correspondiente resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$ viene dada por: $P_{m_A} = 0$ y si $t \in [m_A, M_A]$ es*

$$P_t(x)(j) = \begin{cases} x(j), & si\ t_j \leq t, \\ 0, & si\ t < t_j. \end{cases}$$

En efecto, para cada $x \in X$ se tiene $\langle A(x), x \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} t_j |x(j)|^2$ y $\langle P_t(x), x \rangle = \sum_{t_j \leq t} |x(j)|^2$. Por tanto, $\langle A(x), x \rangle = \int_{m_A}^{M_A} td(\langle P_t(x), x \rangle)$.

TEOREMA 14.6.16 *Sea X un espacio de Hilbert, sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y sea $\{P_t\}$ la correspondiente resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$.*

a) Para cada $f \in [m_A, M_A]$ y cada $t \in C([m_A, M_A])$ se verifica que $f(A)P_t = P_t f(A)$.

b) Para cada $B \in C\mathcal{L}(X)$ las siguientes condiciones son equivalentes

i) B conmuta con A.

ii) B conmuta con $f(A)$ para cada $f \in C([m_A, M_A])$.

iii) B conmuta con P_t para cada $t \in [m_A, M_A]$.

DEMOSTRACIÓN a) Sea $f \in C([m_A, M_A])$. Como $f(A) = \int_{m_A}^{M_A} f dP$, podemos deducir que existe una sucesión de combinaciones lineales finitas de elementos P_t que converge a $f(A)$ en $C\mathcal{L}(X)$. Si $t \in [m_A, M_A]$ tenemos que para cada $s \in [a, b]$ es $P_t P_s = P_s P_t$ y por tanto también será $P_t A_n = A_n P_t$, para $n \in \mathbb{N}$. De aquí se deduce que $P_t f(A) = f(A) P_t$.

b) Si B conmuta con A entonces B conmuta con $P(A)$, para cada polinomio $P(t)$. Si $f \in C([m_A, M_A])$ tenemos que existe una sucesión de polinomios $(P_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim P_n = f$ en $C([m_A, M_A])$. Entonces, $\lim P_n(A) = f(A)$, por lo que $f(A)B = \lim P_n(A)B = \lim BP_n(A) = Bf(A)$.

Si B conmuta con $f(A)$ para cada $f \in C([m_A, M_A])$ entonces si $x, y \in X$ y $f \in C([m_A, M_A])$ tenemos que

$$\langle f(A)B(x), y\rangle = \langle Bf(A)(x), y\rangle = \langle f(A)(x), B'(y)\rangle.$$

Por tanto,

$$\int_{m_A}^{M_A} fd(\langle P_t B(x), y\rangle) = \int_{m_A}^{M_A} fd(\langle P_t(x), B'(y)\rangle).$$

Como esto último es cierto para cada $f \in C([m_A, M_A])$, tenemos que $\langle P_t B(x), y\rangle = \langle P_t(x), B'(y)\rangle = \langle BP_t(x), y\rangle$. Por tanto B conmuta con P_t para cada $t \in [m_A, M_A]$.

Finalmente supongamos que B conmuta con P_t para cada $t \in [m_A, M_A]$. Tenemos que existe una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de combinaciones lineales finitas de elementos P_t que converge hacia A en $C\mathcal{L}(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $BA_n = A_n B$ y por tanto $BA = AB$. ∎

TEOREMA 14.6.17 **(Raíz cuadrada de operadores positivos)**
Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y positivo. Entonces existe un único $B \in C\mathcal{L}(X)$ autoadjunto y positivo tal que $B^2 = A$ (B es llamado ***raíz cuadrada positiva de*** *A). Además, si $C \in C\mathcal{L}(X)$ y $AC = CA$ entonces también $BC = CB$. Si A es invertible se verifica que B es también invertible.*

DEMOSTRACIÓN Como A es autoadjunto y positivo, tenemos que el rango numérico de A está contenido en $(0, +\infty)$ y será $m_A \geq 0$. Consideremos la función $f(t) = \sqrt{t}$ en $[m_A, M_A]$. Tenemos que $f \in C([m_A, M_A])$ y es $f \geq 0$. Sea $B = f(A)$, tenemos que B es autoadjunto y $B \geq 0$. Además $B^2 = f(A)f(A) = f^2(A) = A$.

Supongamos que $C \in C\mathcal{L}(X)$ y que $AC = CA$. Sabemos que entonces $Cf(A) = f(A)C$, para cada $f \in C([m_A, M_A])$, por lo que $CB = BC$.

Supongamos ahora que $C \in C\mathcal{L}(X)$ es autoadjunto y positivo y que $C^2 = A$. Demostraremos que $C = B$. Como $AC = C^3 = CA$ deducimos que $BC = CB$. Por otra parte, también existen $B_1, C_1 \in C\mathcal{L}(X)$ tales que $B_1^2 = B$ y $C_1^2 = C$. Sea $x \in X$ y sea $y = (B - C)(x)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|B_1(y)\|^2 + \|C_1(y)\|^2 &= \langle B_1(y), B_1(y)\rangle + \langle C_1(y), C_1(y)\rangle = \langle B_1^2(y), y\rangle + \langle C_1^2(y), y\rangle \\
&= \langle (B + C)(y), y\rangle = \langle (B + C)(B - C)(x), y\rangle \\
&= \langle (B^2 - C^2)(x), y\rangle = \langle (A - A)(x), y\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $B_1(y) = C_1(y) = 0$ y $B(y) = C(y) = 0$. Como $\|B(x) - C(x)\|^2 = \langle (B-C)(x), (B-C)(x)\rangle = \langle (B-C)^2(x), x\rangle = \langle (B-C)(y), x\rangle = 0$, resulta que $B = C$.

Finalmente si A es invertible tendremos que $AA^{-1} = A^{-1}A$ y también será $BA^{-1} = A^{-1}B$. Por consiguiente, $B(A^{-1}B) = A^{-1}B^2 = (A^{-1}B)B$; es decir, $B^{-1} = A^{-1}B$. ∎

COROLARIO 14.6.18 **(Descomposición polar de operadores invertibles)** *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador invertible. Entonces existen y son únicos dos operadores $p, u \in C\mathcal{L}(X)$ tales que $A = pu, p \geq 0$ y u es unitario.*

DEMOSTRACIÓN Como A es invertible también son invertibles A' y AA'. Como AA' es autoadjunto y $AA' \geq 0$ podemos considerar su raíz cuadrada positiva $p \in C\mathcal{L}(X)$, que será también invertible. Sea $u = p^{-1}A$; entonces u es invertible y $uu' = p^{-1}A(p^{-1}A)' = p^{-1}AA'p^{-1} = p^{-1}p^2p^{-1} = I$. Así pues, u es unitario con $pu = A$. Supongamos que $A = Qv$ donde $Q \geq 0$ y v unitario. Entonces $AA' = Qv(Qv)' = Qvv'Q = Q^2$. Por la unicidad de la raíz cuadrada positiva tenemos que $Q = p$ y por tanto $v = Q^{-1}A = p^{-1}A = u$. ∎

COROLARIO 14.6.19 *Sea X un espacio de Hilbert y sean $A_1, A_2 \in C\mathcal{L}(X)$ dos operadores autoadjuntos con $A_1, A_2 \geq 0$ y $A_1A_2 = A_2A_1$. Entonces $A_1A_2 \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN Se tiene $(A_1A_2)' = A_2A_1 = A_1A_2$, por lo que A_1A_2 es autoadjunto. Sea B_1 la raíz cuadrada positiva de A_1, como $A_1A_2 = A_2A_1$ será $B_1A_2 = A_2B_1$. Sea $x \in X$, tenemos que

$$\langle A_1A_2(x), x\rangle = \langle B_1^2A_2(x), x\rangle = \langle B_1A_2(x), B_1(x)\rangle = \langle A_2(B_1(x)), B_1(x)\rangle \geq 0.$$

∎

TEOREMA 14.6.20 *Sea X un espacio de Hilbert, sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Sea $\{P_t\}$ la correspondiente resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$. Sea $t_0 \in [m_A, M_A]$. Entonces, t_0 es un autovalor aproximado de A si y sólo si $\{P_t\}$ no es constante en cualquier subconjunto abierto de (m_A, M_A) que contenga a t_0.*

DEMOSTRACIÓN Recordemos que si A es autoadjunto entonces m_A y M_A son del espectro y $\sigma(A) = \sigma_a(A)$.

Supongamos que $\{P_t\}$ no es constante en cualquier subintervalo abierto que contenga a t_0. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen $t_1, t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ de modo que $t_1 < t_2$ y $P_{t_1} \neq P_{t_2}$. Como $P_{t_1} \leq P_{t_2}$ se tiene $\mathrm{Im}(P_{t_1}) \subset \mathrm{Im}(P_{t_2})$; pero como $P_{t_1} \neq P_{t_2}$ se verifica $\mathrm{Im}(P_{t_1}) \neq \mathrm{Im}(P_{t_2})$. Sea $x \in \mathrm{Im}(P_{t_2})$ tal que $x \perp \mathrm{Im}(P_{t_1})$, entonces $P_{t_2}(x) = x$ y $P_{t_1}(x) = 0$. Si $t \leq t_1$ se sigue que $P_t(x) = P_tP_{t_1}(x) = 0$ y si $t_2 \leq t$ entonces $P_t(x) = P_t(P_{t_2}(x)) = P_{t_2}(x) = x$. Por tanto, $\{P_t(x)\}$ es constante sobre $[m_A, t_1]$ y sobre $[t_2, M_A]$. Así pues,

$$\|(A - t_0I)(x)\|^2 = \int_{m_A}^{M_A} (t - t_0)^2 d(\|P_t(x)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} (t - t_0)^2 d(\|P_t(x)\|^2) \leq \varepsilon^2\|x\|^2,$$

ya que $\|P_t(x)\|^2$ es creciente en $[t_1, t_2]$ y $\|P_{t_2}(x)\|^2 - \|P_{t_1}(x)\|^2 = \|x\|^2 - 0 = \|x\|^2$. De aquí deducimos que $\inf\{\|(A - t_0 I)(x)\| : x \in S_x\} = 0$ y que, por tanto, t_0 es un autovalor aproximado de A.

Recíprocamente, supongamos que $\{P_t\}$ es constante en $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, para algún $\varepsilon > 0$. Consideremos las funciones reales f y g definidas por $f(t) = t - t_0$, para $t \in [m_A, M_A]$, y

$$g(t) = \begin{cases} 1/t - t_0, & \text{si } t \notin (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \\ t - t_0/\varepsilon^2, & \text{si } t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Entonces, $f, g \in C([m_A, M_A])$ y $(fg)(t) = 1$ si $t \notin (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Por tanto

$$f(A) \cdot g(A) = fg(A) = \int_{m_A}^{M_A} fgdP = \int_{m_A}^{M_A} dP,$$

ya que P_t es constante en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Así pues, tenemos que $g(A)f(A) = f(A)g(A) = P_{M_A} - P_{m_A} = I$ y $g(A)$ es el inverso de $f(A) = A - t_0 I$. ∎

NOTA 14.6.21 En la situación del teorema anterior se verifica que el soporte de la resolución normalizada de la identidad $\{P_t\}$ está contenida en $\sigma(A)$. Además si I es un subintervalo de $[m_A, M_A]$ que no tiene valores espectrales se verifica que

$$A = \int_{m_A}^{M_A} tdP = \int_{[m_A, M_A] \setminus I} tdP.$$

TEOREMA 14.6.22 *Sea X un espacio de Hilbert, sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y sea $f \in C([m_A, M_A])$, entonces $\|f(A)\| = \sup\{|f(t)| = t \in \sigma(A)\}$.*

DEMOSTRACIÓN

Sea $x \in X$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|f(A)(x)\|^2 &= \int_{m_A}^{M_A} |f(t)|^2 d\left(\|P_t(x)\|^2\right) = \int_{\sigma(A)} |f(t)|^2 \, d\left(\|P_t(x)\|^2\right) \\ &\leq \sup\left\{ |f(t)|^2 : t \in \sigma(A)\right\} \int_{m_A}^{M_A} d(\|P_t(x)\|^2) \\ &= \sup\{|f(t)|^2 : t \in \sigma(A)\}\|x\|^2. \end{aligned}$$

Como esto último es verdadero para cada $x \in X$ deducimos que

$$\|f(A)\| \leq \sup\{|f(t)| : t \in \sigma(A)\}.$$

Vamos a probar la desigualdad inversa. Sea $t_0 \in \sigma(A)$ tal que $t_0 \neq m_A$ y $t_0 \neq M_A$. Dado $\delta > 0$ escogemos $\varepsilon > 0$ de modo que $|f(t)|^2 \geq |f(t_0)|^2 - \delta$ si $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Tenemos que $\{P_t\}$ no es constante en $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ y, de la demostración del teorema anterior, deducimos que existen $t_1, t_2 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $t_1 \langle t_2, x \in X$, de modo que $\{P_t(x)\}$ es convergente en $[m_A, t_1]$ y en $[t_2, M_A]$. Entonces

$$\|f(A)(x)\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 d(\|P_t(x)\|^2) \geq (|f(t_0)|^2 - \delta)\|x\|^2$$

y de aquí deducimos que $\|f(A)\| \geq |f(t_0)|$. Para los casos $t_0 = m_A$ y $t_0 = M_A$ la prueba es similar. Por tanto $\|f(A)\| \geq \sup\{|f(t)| : t \in \sigma(A)\}$ y tenemos pues la igualdad. ∎

TEOREMA 14.6.23 *Sea X un espacio de Hilbert, sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto y sea $\{P_t\}$ la correspondiente resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$. Supongamos que $m_A < M_A$ y sea $s \in [m_A, M_A]$.*

Entonces

$$\ker(A - sI) = \begin{cases} Im(P_{m_A+0}), & si\ s = m_A, \\ Im(P_s - P_{s-0}), & si\ s \in (m_A, M_A]. \end{cases}$$

En particular, m_A es autovalor de A si y sólo si $P_{m_A+0} \neq 0$; si $s \in (m_A, M_A]$ entonces s es autovalor de A si y sólo si $P_s \neq P_{s-0}$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $x \in X$. Entonces $\|(A - sI)(x)\|^2 = \displaystyle\int_{m_A}^{M_A} (t - s)^2 d(\|P_t(x)\|^2)$ y vamos a demostrar que esta integral es cero si y sólo si $P_t(x)$ es de la forma

$$P_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in (m_A, s), \\ x, & \text{si } t \in (s, M_A]. \end{cases}$$

Supongamos primero que $P_t(x)$ es de esta forma. Entonces $\|P_t(x)\|^2 = 0$, para $t \in [m_A, s)$ y $\|P_t(x)\|^2 = \|x\|^2$ si $t \in [s, M_A]$ ya que $P_s = P_{s+0}$. Como la función $f(t) = (t - s)^2$ se anula en $t = s$ deducimos que $\displaystyle\int_{m_A}^{M_A} (t - s)^2 d(\|P_t(x)\|^2) = 0$.

Recíprocamente supongamos que $\displaystyle\int_{m_A}^{M_A} (t - s)^2 d(\|P_t(x)\|^2) = 0$. Sea $t_1 \in [m_A, s)$ entonces

$$0 \leq (s - t_1)^2(\|P_{t_1}(x)\|^2 - \|P_{m_A}(x)\|^2) \leq \int_{m_A}^{t_1} (t - s)^2 d(\|P_t(x)\|^2) = 0.$$

Por tanto, $\|P_{t_1}(x)\| = \|P_{m_A}(x)\| = 0$ si $t_1 \in [m_A, s)$. Si $t_2 \in (s, M_A]$ entonces

$$0 \leq (t_2 - s)^2(\|P_{M_A}(x)\|^2 - \|P_{t_2}(x)\|^2) \leq \int_{t_2}^{M_A} (t - s)^2 d(\|P_t(x)\|^2) = 0.$$

Por tanto, $\|P_{t_2}(x)\| = \|P_{M_A}(x)\| = \|x\|$ y $P_{t_2}(x) = x$.

Por consiguiente, podemos deducir que si $s \in (m_A, M_A]$ entonces $x \in \ker(A - sI)$ si y sólo si $P_{s-0}(x) = 0$ y $P_s(x) = x$. Es decir, $x \in \text{Im}(P_s) \cap \ker(P_{s-0}) =$

$\operatorname{Im}(P_s - P_{s-0})$. También, $x \in \ker(A - m_A I)$ si y sólo si $P_{m_A+0}(x) = x$; es decir $x \in \operatorname{Im}(P_{m_A+0})$. Entonces es inmediato ver que m_A es un autovalor si y sólo si $\operatorname{Im}(P_{m_A+0}) \neq \{0\}$; es decir $P_{m_A+0} \neq 0$. Para $s \in (m_A, M_A]$, tenemos que s es un autovalor si y sólo si $\operatorname{Im}(P_s - P_{s-0}) \neq \{0\}$; es decir $P_s \neq P_{s-0}$. ∎

COROLARIO 14.6.24 *Sea X un espacio de Hilbert y sea $A \in C\mathcal{L}(X)$ un operador autoadjunto. Si t_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$ entonces t_0 es autovalor de A.*

DEMOSTRACIÓN Si $m_A = M_A$ entonces A es de la forma αI y será $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\alpha\}$. Supongamos que $m_A \langle M_A$. Sea $\{P_t\}$ la resolución normalizada de la identidad sobre $[m_A, M_A]$ correspondiente a A. Supongamos que $t_0 \in (m_A, M_A)$. Como t_0 es un punto aislado de $\sigma(A)$, existen $t_1, t_2 \in (m_A, M_A)$ tales que $t_1 < t_2$ y $(t_1, t_2) \cap \sigma(A) = \{t_0\}$. Vamos a demostrar que $P_{t_1+0} = P_{t_0-0}$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se verifica $a_n = t_1 + \frac{1}{n} < t_0 - \frac{1}{n} = b_n$. Como $[a_n, b_n] \cap \sigma(A) = \emptyset$, tenemos que, para cada $t \in [a_n, b_n]$, existe $\varepsilon_t > 0$ tal que $\{P_t\}$ es constante en $[t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t]$. De la compacidad de $[a_n, b_n]$ deducimos que existen $s_1, \cdots, s_m$ en $[a_n, b_n]$ tales que

$$[a_n, b_n] \subset \bigcup_{i=1}^{m} (s_i - \varepsilon_{s_i}, s_i + \varepsilon_{s_i}).$$

Es claro que esto último demuestra que

$$P_{t_1+\frac{1}{n}} = P_{a_n} = P_{s_1} = P_{s_2} = \cdots = P_{s_m} = P_{b_n} = P_{t_0-\{\frac{1}{n}\}}.$$

Como esto es cierto para cada $n \geq n_0$, deducimos que $P_{t_1+0} = P_{t_0-0}$. De manera similar se puede probar que $P_{t_0+0} = P_{t_2-0}$. Como $t_0 \in \sigma(A)$ tenemos que $\{P_t\}$ no puede ser constante en $[t_1, t_2]$. Como $\{P_t\}$ es una resolución normalizada de la identidad, se verifica $P_{t_1} = P_{t_1+0}$ y, como t_2 no es autovalor, se tiene $P_{t_2} = P_{t_2-0}$. Por tanto, $P_{t_1} = P_{t_0-0}$ y $P_{t_2} = P_{t_0+0} = P_{t_0}$; esto prueba que $P_{t_0-0} \neq P_{t_0+0}$; es decir t_0 es un autovalor de A.

Las demostraciones en los casos $t_0 = m_A$ y $t_0 = M_A$ son similares. ∎

Bibliografía

[1] Aizpuru, A.: *"Apuntes y notas de Topología"*. Universidad de Cádiz, 1996.

[2] Alaoglu, L.: *"Weak topologies of normed linear spaces"*. Ann. Of Math, 41, 1940.

[3] Altshuler, Z., Casazza Z., Lin, B.L.: *"On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces"*. Israel J. Math. 15, 1973.

[4] Antosik, P.; Swartz, C.: *"Matrix Methods in Analysis"*. Springer, 1986.

[5] Asplund, E.; Namioka, I.: *"A geometric proof of Ryll-Nardweski's fixed point theorem"*. Bull. A.M.S., 1967.

[6] Aziz El Kacimi Alaoui: *"Introducción al Análisis Funcional"*. Reverté, 1994.

[7] Bachelis, G.F.; Rosenthal, H.P.: *"On unconditionally converging series and biorthogonal systems in a Banach space"*. Pacific J. Math. 37, 1971.

[8] Bachman, G. L.; Narici, L.: *"Análisis Funcional"*. Tecnos, 1981.

[9] Banach, S.: *"Sur les fonctionelles linéaires"*. Studia Math. 1, 1929.

[10] Banach, S.: *"Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales"*. Fund. Math. 3, 1922.

[11] Banach, S.: *"Sur les fonctionelles linéaires II"*. Studia Math. 1, 1929.

[12] Banach, S.: *"Theorie des opérations linéaires."* Chelsea Publ. Co., 1955. (North-Holland, 1987. Con comentarios de Pelczynski y Bessaga).

[13] Banach, S.; Steinhaus, H.: *"Sur le principe de la condensation de singularités"*. Fund. Math. 9, 1927.

[14] Bartle, R.G.: *"Nets and filters in topology"*. Amer. Math. Monthly 62, 1955.

[15] Bartle, R.G.; Dunford, N.; Schwartz, J.T.: *"Weak compactness and vector measures"*. Canad, J. Math. 7, 1955.

[16] Beauzamy, B.: *"Introduction to Banach spaces and their geometry"*. 1982.

[17] Beauzamy, B.: *"Introduction to operator theory and Invariant subspaces"*. North Holland, 1988.

[18] Beauzamy, B.; Maurey, B.: *"Points minimaux et ensembles optimaux dans les Espaces de Banach."* J. Funct. Anal., 1977.

[19] Berberian, S.K.: *"Introduction to Hilbert space, second ed"*. Chelsea, 1976.

[20] Bessaga, C.; Pelczynski, A.: *"A generalization of results of R.C. James concerning absolute in Banach spaces"*. Studia Math. 17, 1958.

[21] Bessaga, C.; Pelczynski, A.: *"On subspaces of a space with an absolute basis"*. Bull. Acad. Sci. Po. 6, 1958.

[22] Bessaga, C.; Pelczynski, A.: *"On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces."* Studia Math, 1958.

[23] Bishop, E.; Phelps, R.R.: *"A proof that every Banach space in subreflexive"*. Bull Amer. Math. Soc. 67, 1961.

[24] Bonsall, F.F.; Duncan, J.: *"Complete Normed Algebras"*. Springer-Verlag, 1973.

[25] Bourbaki, N.: *"Eléments de Mathématiques: Topologie Générale"*. Hermann, 1961.

[26] Bourbaki, N.: *"Eléments de Mathématiques: Espaces vectoriels topologiques."* Hermann, 1955.

[27] Bourgain, J.: *"On dentability and the Bishop-Phelps property"*. Israel J. Math. 28, 1977.

[28] Bourgin, R.D.: *"Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodým property"*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 993, Springer, 1983.

[29] Boyer, C.B.; Merzbach U.C.: *"A history of mathematics"*. Willey, 1989.

[30] Boyer, C.B.: *"Historia de la Matemática"*. Alianza Editorial, 1986.

[31] Brown, A.L.; Page, A.: *"Elements of functional analysis"*. Van Nostrand, 1970.

[32] Brown, A.L.; Page, A.: *"Elements of Functional Analysis"*. Van Nostrand, 1970.

[33] Casazza, P.G.; Johnson, P.G.; Tzafriri, L.: *"Tsrielson's space"*. Israel J. Math, 1984.

[34] Casazza, P.G.; Lin, B.L.: *"Projections on Banach spaces with symmetric bases"*. Studia Math, 52, 1974.

[35] Casazza, P.G.; Shura, T.J.: *"Tsirelson's space"*. Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1989.

[36] Casazza, P.G.; Lin, B.L.: *"On symmetric basic sequences in Lorentz sequence spaces II"*. Israel J. Math 17, 1974.

[37] Casazza, P.G.: *"The Schroeder-Bernstein property for Banach spaces"*. Contemp. Math, 1989.

[38] Cioranescu, I.: *"Geometry of Banach Spaces. Duality Mappings and Nonlinear Problems"*. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[39] Conway, J.B.: *"Functions of one complex variable"*. Graduate Texts in Mathematics, vol 11, Springer, 1973.

[40] Conway, J.B.: *"A course in functional Analysis."* Graduate Texts in Mathematics, vol 96, Springer, 1985.

[41] Dales, H.G.; Woodin, W.H.: *"An Introduction to Independence for Analysts"*. Cambridge University Press, 1987.

[42] Davie, A.M.: *"The approximation problem for Banach spaces"*. Bull. London Math. Soc, 1973.

[43] Davie, A.M.: *"Embedding space with unconditional bases"*. Israel J. Math., 1975.

[44] Davis, W.J.; Dean, D.W.; Singer, I.: *"Multipliers and unconditional convergence of biorthogonal expansions"*. Pacific J. Math, 37, 1971.

[45] Davis, W.J.; Figiel, T.; Johnson, W.B.; Pelczynski, A.: *"Factoring weakly compact operators"*. J. Funct. Anal, 17, 1974.

[46] Davis, W.J.; Johnson, W.B.: *"A renorming of nonreflexive Banach spaces"*. Proc. Amer. Math. Soc. 37, 1973.

[47] Day, M.M.: *"Normed Linear spaces"*. Springer-Verlag, 1962.

[48] Day, M.M.: *"On the basis problem in normed spaces"*. Proc. Amer. Math.Soc. 13, 1962.

[49] Day, M.M.: *"Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces"*. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 1941.

[50] Day, M.M.: *"Strict convexity and smoothness of normed spaces"*. Trans. Amer. Math.Soc. 78, 1955.

[51] Day, M.M.; James, R.C.; Swaminathan, S.: *"Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction"*. Canad. J. Math. 23, 1971.

[52] Dean, D.W.; Singer, I.; Sternbach, L.: *"On shrinking basic sequences in Banach spaces".* Studia Math. 40, 1971.

[53] Deville, R.; Godefroy, G.; Zizler, V.: *"Smoothness and renormings in Banach spaces".* Longman Scientific and Technical, 1992.

[54] Díaz Moreno, J.M.: *"Introducción a la Topología de los Espacios Métricos".* Servicio de Publicaciones. Universidad de Cádiz 1998.

[55] Diendonné, J.:*"History of functional analysis".* North-Holland, Amsterdam, 1981.

[56] Diestel, J.: *"Geometry of Banach spaces: Selected Topics."* Lecture Notes, 485. Springer, 1975.

[57] Diestel, J.; Jarchow, H.; Jonge, A.: *"Absolutely Summing Operators".*

[58] Diestel, J.; Uhl, J.J.: *"Vector Measures".* Mathematical surveys of the A.M.S. Vol 15, 1977.

[59] Dinculeanu, N.: *Vector measures.* Pergamon Press, 1967.

[60] Diestel, J.: *"Sequences and series in Banach spaces".* Springer-Verlag, 1984.

[61] Dudley, R.M.: *"Real Analysis and Probability".* Wadsworth and Brooks, 1989.

[62] Dugundji, J.: *"Topology".* Allyn and Bacon, 1966.

[63] Dunford, N.; Schwartz, J.T.: *"Linear Operators".* Vol I,II,III. Pure and Applied Mathematics, Interscience Publishers, 1963.

[64] Dvoretzki, A.; Rogers, C.A.: *"Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces".* Proc. Nat. Acad. Sci. 36, 1950.

[65] Eberlein, W.F.: *"Weak compactness in Banach spaces, I".* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 33, 1947.

[66] Edelstein, I.S.; Wojtaszczyk, P.: *"On projections and uncontional bases in direct sums of Banach spaces".* Studia Math, 56, 1976.

[67] Edwards, R.E.: *"Functional analysis. Theory and applications".* Holt. Rinehart and Winston 1965.

[68] Ekeland, I.; Temam, R.: *"Convex Analysis and Variational Problems".* North Holland.

[69] Enflo, P.: *"A counter-example to the approximation problem in Banach spaces."* Acta Math. 130, 1973.

[70] Enflo, P.: *"A Banach space with basis constant > 1".* Ark. Mat. 11, 1973.

[71] Facenda Aguirre, J.A.: *"Geometría de Espacios de Banach."* Universidad de Sevilla. Secretariado de publicaciones, 1998.

[72] Ferenczi, V.: *"Hereditarily finitely decomposable Banach spaces".* Studia Math., 1997.

[73] Figiel, T.; Johnson W.B.: *"A uniformly convex space which contains no l_p."* Compositio Math, 1974.

[74] Figiel, T.; Lindenstrauss, J.; Milman V.: *"The dimension of almost spherical sections of convex sets".* Acta Math, 1977.

[75] Figiel, T.; Lindenstrauss, J.; Milman, V.D.: *"The dimension of almost spherical sections of convex sets."* Acta Math, 139, 1977.

[76] Gillman, L.; Jerison, M.: *"Rings of Continuous Functions."* Van Nostrand, 1960.

[77] Gohberg, I.C.; Krein M.G.: *"Fundamental theorems on deficiency numbers, root numbers and indices of linear operators".* Usp. Math. Nauk 12, 1957.

[78] Goldstine, H.G.: *"Weakly complete Banach spaces".* Duke Math. J. 4, 1938.

[79] Gordon, Y.; Lewis, D.R.: *"Absolutely summing operators and local unconditional structures".* Acta Math. 133, 1974.

[80] Gouyon, R.: *"Integración y Distribuciones".* Reverté 1979.

[81] Gowers, W.T.: *"Symmetric block bases of sequences with large average growth".* Israel J. Math, 69, 1990.

[82] Gowers, W.T.; Maurey, B.: *"The unconditional basic sequence problem".* J. Amer. Math. Soc. 6, 1993.

[83] Gowers, W.T.: *"A Banach space not containing c_o, l_1 or a reflexive subspace".* Trans. Amer. Math. Soc., 1994.

[84] Gowers, W.T.: *"A new dichotomy for Banach spaces".* Geom. Funct. Anal., 6, 1996.

[85] Gowers, W.T.: *"A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces".* Bull. London Math. Soc., 1996.

[86] Gowers, W.T.: *"A solution to Banach's hiperplane problem".* Bull. London Math. Soc., 26, 1994.

[87] Gowers, W.T.: *"Recent results in the theory of infinite-dimensional Banach spaces".* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol 1,2. Zurich, 1994.

[88] Grothendieck, A.: *"Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$".* Canad. J. Math. 5, 1953.

[89] Guerre, S.; Delabriere.: *"Classical sequences in Banach spaces".* Marcel-Dekker, 1992.

[90] Habola, P.; Hájek, P.; Zizler V.: *"Introduction to Banach Spaces".* Matfyzpress, 1996.

[91] Halmos, P.R.: *"Measure Theory".* Springer, 1974.

[92] Halmos, P.R.: *"A Hilbert Space Problem Book".* Springer, 1982.

[93] Halmos, P.R.: *"Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity."* Chelsea Publ. Co., 1951.

[94] Haydon. R.; Maurey, B.: *"On Banach spaces with strongly separable types"* J. London Math. Soc 33, 1986.

[95] Hewitt, E.; Stromberg, K.: *"Real and abstract analysis".* Springer, 1965.

[96] James, R.C.: *"A counterexample for a sup theorem in normed spaces".* Israel J. Math. 9, 1971.

[97] James, R.C.: *"A non-reflexive Banach space isometric with its second conjugate space".* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 1951.

[98] James, R.C.: *"Bases and reflexivity of Banach spaces."* Ann. of Maths, 52, 1950.

[99] James, R.C.: *"Bases in Banach spaces".* Amer. Math. Monthly 89, 1982.

[100] James, R.C.: *"Characterizations of reflexivity".* Studia Math. 23, 1964.

[101] James, R.C.: *"Reflexivity and the sup of linear functionals".* Israel J. Math. 13, 1972.

[102] James, R.C.: *"Reflexivity and the supremum of linear functionals."* Ann. of Maths, 66, 1957.

[103] James, R.C.: *"Uniformly non-square Banach spaces".* Ann. of Math. (2) 80, 1964.

[104] James, R.C.: *"Weak compactness and reflexivity".* Israel J. of Maths, 41-2, 1964.

[105] James, R.C.: *"Weakly compact sets".* Trans. Amer. Math. Soc. 113, 1964.

[106] Jameson, G.J.O.: *"Topology and Normed Spaces".* Chapman and Hall, 1974.

[107] Johnson, W.B.; Rosenthal, H.P.: *"On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces".* Studia Math 43, 1972.

[108] Johnson, W.B.; Rosenthal, H.P.; Zippin, M.: *"On bases, finite-dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces"*. Israel J. Math, 9, 1971.

[109] Johnson, W.B.; Szankowski, A.: *"Complementably universal Banach spaces."* Studia Math. 58, 1976.

[110] Johnson, W.B.; Zippin, M.: *"On subspaces of quotients of* $(\sum G_n)_{l_p}$ *and* $(\sum G_n)_{c_o}$*"*. Israel J. Math. 17, 1972.

[111] Johnson, W.B.; Zippin, M.: *"Subspaces and quotient spaces of* $(\sum G_n)_{l_p}$ *and* $(\sum G_n)_{c_o}$*"*. Israel J. Math. 17, 1974.

[112] Kadec, M.I.; Pelczynski, A.: *"Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space Lp."* Studia Math, 21, 1962.

[113] Kadets, M.I.; Kadets, V.M.: *"Rearrangements of series in Banach spaces.* Springer. 1991.

[114] Kadets, M.I.; Kadets, V.M.: *"Series in Banach spaces.* Springer. 1997.

[115] Kelley, J.L.: *"Convergence in topology"*. Duke Math. J. 18, 1950.

[116] Kelley, J.L.: *"General Topology"*. Van Nostrand, 1955.

[117] Kircev, K.P.; Troianskii, S.L.: *"On Orlicz spaces associated to Orlicz functions not satisfying the* A_2*-condition"*. Serdica 1, 1975.

[118] Klee, V.L.: *"A conjecture on weak compactness"*. Trans. Amer. Math. Soc. 104, 1962.

[119] Klee, V.L.: *"Extremal structure of convex sets, II"*. Math. Z. 69, 1958.

[120] Klee, V.L.: *"Mappings into normed linear spaces"*. Fund. Math. 49, 1960/61.

[121] Klee, V.L.: *"Some new results on smothness and rotundity in normed linear spaces"*. Math. Ann. 139, 1959.

[122] Kolmogorov, A.N.: *"Elementos de la teoría de Funciones y del Análisis Funcional"*. Mir, 1975.

[123] Kolmogorov, A.N.; Fomin, S.V.: *"Introductory real analysis"*. Prentice-Hall, 1970.

[124] Kothe, G.: *"Topological vector spaces I"*. Springer, 1983.

[125] Kothe, G.: *"Topological Vector Spaces II."* Springer, 1983.

[126] Krasnoselskii, M.A.; Rutickii, Ya. B.: *"Convex functions and Orlicz spaces"*. Groningen, 1961.

[127] Krein, M.G.; Milman, D.P.: *"On extreme points of regular convex sets"*. Studia Math. 9, 1940.

[128] Krein, M.G.; Milman, D.P.; Rutman, M.A.: *"On a property of the basis in Banach space"*. Zapiski Mat. T., 16, 1940.

[129] Kwapien, S.: *"On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators"*. Studia Math. 38, 1970.

[130] Kwapien, S.: *"On Banach spaces containing c_o"*. Studia Math. 52, 1974.

[131] Lacey, E.: *"The isometric theory of classical Banach spaces."* Springer, 1974.

[132] Larsen, R.: *"Banach algebras: An introducion"*. Marcel Dekker, 1973.

[133] Larsen, R.: *"Functional Analysis. An Introduction"*. Marcel-Dekker, 1973.

[134] Lewin, J.: *"A simple proof of Zorn's lemma"*. Amer. Math. Monthly 98, 1991.

[135] Limaye, B.V.: *"Functional Analysis"*. Wiley Eastern Limited, 1981.

[136] Lindenstrauss, J.: *"On complemented subspaces of m"*. Israel J. Math. 5, 1967.

[137] Lindenstrauss, J.: *"On operators which attain their norm"*. Israel J. Math. 1, 1963.

[138] Lindenstrauss, J.: *"On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces"*. Michigan Math. J. 10, 1963.

[139] Lindenstrauss, J.; Pelczynski, A.: *"Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$ spaces and their applications"*. Studia Math, 29, 1968.

[140] Lindenstrauss, J.; Pelczynski, A.: *"Contributions to the theory of the classical Banach spaces"*. J. Funct. Anal 8, 1971.

[141] Lindenstrauss, J.; Rosenthal, H.P.: *"Automorphisms in c_o, l_1 and m"*. Israel J. Math. 7, 1969.

[142] Lindenstrauss, J.; Rosenthal, H.P.: *"The $\mathcal{L}_p$ spaces"*. Israel J. Math. 7, 1969.

[143] Lindenstrauss, J.; Stegall, C.: *"Examples of separable spaces which do not contain l_1 and whose duals are non-separable"*. Studia Math. 54, 1975.

[144] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"Classical Banach spaces I: Sequences spaces"*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[145] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"Classical Banach spaces II: Funtion spaces"*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[146] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"On Orlicz sequence spaces II"*. Israel J. Math. 11, 1972.

[147] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"On Orlicz sequence spaces III"*. Israel J. Math. 14, 1973.

[148] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"On Orlicz sequence spaces"*. Israel J. Math. 10, 1971.

[149] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L.: *"On the complemented subspaces problem."* Israel J. Math. 9, 1971.

[150] Lindenstrauss, J.; Zippin, M.: *"Banach spaces with a unique unconditional basis"*. J. Funct. Anal 3, 1969.

[151] Maddox, I.J.: *"Elements of functional analysis"*. Cambridge University Press, 1970.

[152] Marti, J.T.: *"Introduction to the Theory of Bases"*. Springer, 1969.

[153] Mauey, B.; Rosenthal, H.P.: *"Normalized weakly null sequences with no unconditional subsequence"*. Studia Math.

[154] McCarthy, C.A.; Schwartz. J.: *"On the norm or a finite Boolean algebra of projections and applications to theorems of Kreiss and Morton."*. Comm. Pure Appl. Math, 18, 1965.

[155] Megginson, R.E.: *"An introduction to Banach Space Theory"*. Springer, 1998.

[156] Mosak, R.O.: *"Banach Algebras"*. Chicago Lectures in Mathematics, 1975.

[157] Nagata, J.: *"Modern General Topology"*. North-Holland, 1985.

[158] Odell, E.; Rosenthal, H.P.: *"A double dual characterisation of Banach spaces containing l_1"*. Israel J. Math. 20, 1981.

[159] Odell, E.: *"Applications of Ramsey theorem to Banach spaces theory"*. Notes in Banach spaces (H.E. Lacey, ed), Univ. Texas Press, 1981.

[160] Ovsepian, R.I.; Pelczynski, A.: *"The existence in every separable Banach space of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in L^2"*. Studia Math. 54, 1975.

[161] Oxtoby, J.C.: *"Measure and category"*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.

[162] Pelczynski, A.: *"A note on the paper of I. Singer 'Basic sequences and reflexivity of Banach spaces'"*. Studia Math. 21, 1962.

[163] Pelczynski, A.; Singer, I.: *"On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces"*. Studia Math. 25, 1964.

[164] Pelczynski, A.; Sudakov, V.N.: *"Remark on noncomplemented subspaces of the space $m(s)$"*. Colloq. Math. 9, 1962.

[165] Phelps, R.R.: *"A representation theorem for bounded convex sets"*. Proc. Amer. Math. Soc. 11, 1960.

[166] Pflaumann, E.; Unger, H.: *"Análisis Funcional"*. Alhambra 1974.

[167] Pietsch, A.: *"Operator Ideals"*. North-Holland, 1980.

[168] Pryce, J.D.: *"Basic Methods of Linear Functional Analysis"*. Hutchinson, 1973

[169] Rolewicz, S.: *"Metric Linear Spaces"*. Monografie Matematyczne Warsaw, 1972.

[170] Rosenthal, H.P.: *"A characterisation of Banach spaces containing l_1"*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71, 1974.

[171] Rudin, W.: *"Functional analysis"*. McGraw-Hill, 1973.

[172] Rudin, W.: *"Análisis funcional"*. Reverté, 1979.

[173] Rudin, W.: *"Análisis Real y Complejo"*. Mc Graw-Hill, 1987.

[174] Rudin, W.: *"Real and complex analysis"*. Interscience, 1962.

[175] Schaefer, H.H.: *"Espacios vectoriales Topológicos"*. Teide, 1971.

[176] Schäffer, J.J.; Sundaresan, K.S.: *"Reflexivity and the girth of spheres."* Math. Ann. 184, 1970.

[177] Schwartz. L.: *"Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle"*. Hermann, 1970.

[178] Schwartz, L.: *"Cours d'Analyse"*. Hermann.

[179] Semadeni, Z.: *"Banach Spaces of Continuous Functions"*. Polish Scientific Publishers, 1971.

[180] Singer, I.: *"Bases in Banach spaces I"*. Springer, 1970.

[181] Singer, I.: *"Bases in Banach spaces II"*. Springer, 1981.

[182] Szarek, S.J.: *"A Banach space whithout a basis which has the bounded approximation property"*. Acta Math. 159, 1987.

[183] Taylor, A.E.: *"Introduction to functional analysis"*. Wiley, 1958.

[184] Trenoguin, V.A.; Pisarievski, B.M.; Sóboleva, T.S.: *"Problemas y ejercicios de Análisis Funcional"*. Mir, 1984.

[185] Troyanski, S.L.: *"An example of a smooth space whose dual is not strictly normed"*. Studia Math. 35, 1970.

[186] Troyanski, S.L.: *"On locally unifromly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces"*. Studia Math. 37, 1971.

[187] Tzafriri, L.: *"On the complemented subspaces problem"*. Israel J. Math., 1971.

[188] Wheeden, R.L.; Zygmund, A.: *"Measure and integral: An introduction to real analysis"*.Marcel Dekker, 1977.

[189] Wheeler, R.F.: *"Projecting m onto c_o"*. Amer. Math. Monthly 73, 1966.

[190] Wheeler, R.F.: *"The equicontinuos weak* topology and semireflexivity"*. Studia Math. 41, 1972.

[191] Wilansky, A.: *"Functional analysis"*. Blaisdell, 1964.

[192] Wilansky, A.: *"Topology for Analysis"*. Ginn, 1970.

[193] Wilansky, A.: *"Summability through"*. North-Holland, 1984.

[194] Yoshida, K.: *"Functional Analysis"*. Springer-Verlag.

Índice de términos

9 788498 282429